УДК 539.3

О. П'ятецька, канд. фіз.-мат. наук
E-mail:pyatetska@univ.kiev.ua

ВПЛИВ ТЕПЛОВИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ЕФЕКТИВНІСТЬ АКТИВНОГО ДЕМПФІРУВАННЯ КОЛИВАНЬ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ З ЖОРСТКИМ ЗАКРІПЛЕННЯМ ТОРЦІВ

У даній роботі досліджується вплив теплових граничних умов на ефективність активного демпфірування вимушених коливань круглої пластини з жорстким закріпленням торців. З використанням класичних варіаційних методів одержано формули для амплітуди коливань пластини та різниці потенціалів, що підводиться до актуатора для компенсації рівномірного поверхневого тиску.

The influence of temperature boundary conditions on efficiency of active damping of forced vibrations of circular plate is investigated. Applying the classical variation methods, the simple formulas for the amplitude of this plate and the difference of potentials of actuator to compensate for harmonic surface pressure is obtained.

1. Вступ.

У сучасній техніці для обмеження амплітуд вимушених коливань тонкостінних елементів конструкцій ефективно використовуються активні методи, коли в структуру пасивного (без п'єзоефекту) тонкостінного елементу з металічного, полімерного чи композитного матеріалу вводяться п'єзоактивні включення. Одні з них виконують функції сенсора, що дають інформацію про механічний стан елементу, а інші – функції так званих актуаторів. Існує два основних методи активного демпфірування стаціонарних і нестаціонарних коливань тонкостінних елементів. Один із них полягає у сумісному використанні сенсорів та актуаторів. При цьому до актуатора підводиться різниця потенціалів, пропорційна першій похідній від різниці потенціалів сенсора або струму. Тоді змінюються дисипативні характеристики тонкої пластини, в результаті чого зменшується амплітуда коливань. Керуючи амплітудою та фазою електричного збудження, можна підсилювати або зменшувати амплітуду механічних коливань найбільш енергоємних мод. Одним із важливих факторів, який може суттєво вплинути на ефективність демпфірування механічних коливань тонкостінного елементу, являються температурні ефекти. Зміна температури може бути обумовлена взаємодією елемента із зовнішнім середовищем і дисипативним розігрівом через внутрішні втрати в матеріалах . Слід зауважити, що тонкостінні елементи із полімерних матеріалів та композити на їх основі, дуже чутливі до зміни температури. Важливість впливу температури пов'язана з тим, що при досягненні температурою точки Кюрі п'єзоматеріал втрачає своє функціональне призначення, так що сенсор не дає інформацію про механічний стан пластини, а актуатор не може компенсувати механічне навантаження за допомогою підведеної до нього різниці потенціалів.

У даній статті розглядається задача про активне демпфірування вимушених гармонічних резонансних коливань суцільної круглої в'язкопружної пластини з жорстким закріпленням торців. Розв'язок задачі одержано варіаційним методом. На основі аналізу результатів розв'язку конкретної задачі досліджено вплив теплових граничних умов на ефективність активного демпфірування коливань за допомогою розподілених сенсорів та актуаторів.

2. Постановка задачі.

Загальна теорія активного демпфірування вимушених коливань тонких пластин за допомогою сумісного використання п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів подана в статті $[3]$. Пасивний шар вважаємо орто-тропним металічним, полімерним або композитним, а п'єзоактивні – трансверсально-ізотропними і поляри-зованими по товщині пластини. Деформації та кути повороту вважаються настільки малими, що кінематичні співвідношення між деформаціями і переміщеннями – лінійні. При цьому лінійними є й рівняння руху. Приймаються ті ж позначення та гіпотези, що й в $[1]$.

Обмежимося випадком згинних коливань круглої пластини, що складається з пасивного середнього шару товщиною h_0, і верхнього та нижнього протилежно поляризованих п'єзоактивних шарів однакової товщини h_1. Властивості цих п'єзошарів відрізняються тільки знаками п'єзоконстанти. На пластину діє рівномірно розподілений поверхневий тиск, який змінюється з часом за гармонічним законом. Матеріал пластини вважається в'язкопружним з комплексними характеристиками, які залежать від температури.

Термомеханічна поведінка пластини описується такою нелінійною системою диференціальних рівнянь в полярній системі координат:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d^2}{d\rho^2}\left[D\left(\rho\frac{d^2w}{d\rho^2}+\nu\frac{dw}{d\rho}\right)\right]+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[D\left(\nu\frac{d^2w}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dw}{d\rho}\right)\right]-\left(\tilde{\rho}h\right)a^4\omega^2w+a^4p_0\left(\rho\right)=0, \quad (1)$$

$$\frac{d^2T}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dT}{d\rho}-\frac{2\alpha a^2}{(\lambda h)}\left(T-T_C\right)+\frac{\omega E''(T)h^3}{24a^2\left(1-\nu^2\right)(\lambda h)}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{d^2w'}{d\rho^2}\right)^2+\left(\frac{d^2w''}{d\rho^2}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\frac{dw'}{d\rho}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\frac{dw''}{d\rho}\right)^2+2\nu\left(\frac{1}{\rho}\frac{dw'}{d\rho}\frac{d^2w'}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dw''}{d\rho}\frac{d^2w''}{d\rho^2}\right)\right]=0. \quad (2)$$

Тут w - поперечний прогин, $D=\dfrac{E\,h^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$ - згинна жорсткість, γ - густина матеріалу, ω - частота коливань, E,ν - комплексний модуль та коефіцієнт Пуасона, T - температура дисипативного розігріву, α - кое-фіцієнт тепло-обміну із зовнішнім середовищем з температурою T_C, λ - коефіцієнт теплопровідності, a - радіус пластини.

Нехай контур пластини жорстко закріплений, а температура на ньому дорівнює T_C. Тоді механічні й теплові граничні умови матимуть вигляд:

$$w=0,\ \frac{d\ w}{d\ \rho}=0\ \left(\ \rho=1\ \right)\ , \tag{3}$$

$$T=T_C. \tag{4}$$

Будемо вважати, що нанесені на сенсор нескінченно тонкі електроди розімкнуті. Тоді різниця потенціалів, яку показує сенсор при коливаннях пластини, матиме вигляд:

$$V_S=-\frac{h_1\left(\ h_0+h_1\ \right)\int\limits_0^{\rho_1}\dfrac{d_{31}}{S_{11}\left(1-\nu\right)}\left(\dfrac{d^2w}{d\,\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\,w}{d\,\rho}\right)\rho\,d\rho}{2\int\limits_0^{\rho_1}\varepsilon_{33}\left(1-k_p^2\right)\rho\,d\rho}. \tag{5}$$

Тут використані позначення монографії $\left[\,2\,\right]$.

3. Аналітичний розв'язок задачі.

Для розв'язку системи (1)-(2) можна використати варіаційні методи, задавши відповідні вирази для прогину і для температури з деякими невідомими параметрами, для яких шляхом мінімізації функціоналів знаходяться нелінійні алгебраїчні рівняння.

Так, при коливаннях круглої пластини на першій резонансній частоті вираз для прогину вибираємо у стандарт-ному для такої пластини вигляді:

$$w=A\left(1-\rho^2\right)^2. \tag{6}$$

Тоді температурне поле дисипативного розігріву знаходиться з такого рівняння:

$$\frac{d^2T}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dT}{d\rho}-\frac{2\alpha\,a^2}{\left(\lambda\,h\right)}\left(T-T_C\right)+\frac{4\,\omega\,h^2\left|A\right|^2}{3\left(1-\nu\right)a^2\,\lambda}\left(G_0''-G_1''T\right)f\left(\rho\right)=0. \tag{7}$$

Тут

$$f\left(\rho\right)=\left(2+2\nu\right)-\left(8+8\ \ \nu\right)\ \ \rho^2+\left(10+6\ \ \nu\right)\ \ \rho^4. \tag{8}$$

До нього слід додати граничні умови (4).

Розв'язок такої крайової задачі зводиться до мінімізації функціоналу:

$$F=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left[\left(\frac{d\,\theta}{d\,\rho}\right)^2+\Psi_2\left(\rho\right)\theta^2-2\Psi_3\left(\rho\right)\theta\right]\rho\,d\rho\ , \tag{9}$$

де $\theta=T-T_C$, (10)

а $\Psi_2\left(\rho\right)=\Psi_4+\Psi_1\ f\left(\rho\right),\quad \Psi_3\left(\rho\right)=\Psi_0\ f\left(\rho\right),\quad \Psi_4=\dfrac{2\,\alpha\,a^2}{\left(\lambda\,h\right)}$,

$$\Psi_1=\frac{4\ \ \omega\ \ h^2\ \ G_1''}{3\ \left(\ 1-\nu\ \right)\ a^2\ \ \lambda}\ \left|\ A\ \right|^2,\ \Psi_0=\frac{4\ \ \omega\ \ h^2}{3\ \left(\ 1-\nu\ \right)\ a^2\ \ \lambda}\ \tilde{G}_0''\ ,\ \tilde{G}_0''=G_0''-G_1''\ T_C \tag{11}$$

Задамо температуру у вигляді:

$$\theta=T_1\left(1-\rho^2\right). \tag{12}$$

Тоді для параметра T_1 одержимо вираз:

$$T_1=\frac{C_1\ \tilde{x}}{C_0+C_2\ \tilde{x}}\ ,\quad \tilde{x}=\left|\,A\,\right|^2, \tag{13}$$

де

$$C_0=1+\frac{1}{6}\psi_4\ ,\quad C_1=\left(\ 1+\frac{\nu}{12}\ \right)\psi_0\ ,\quad C_2=\left(\ \frac{1}{6}+\frac{\nu}{10}\ \right)\psi_1\ . \tag{14}$$

Тут введено позначення:

$$\psi_0=\frac{8\,\omega}{\lambda\,h\,a^2}\,D_0''\ ,\quad \psi_1=\frac{8\,\omega}{\lambda\,h\,a^2}\,D_1''\ ,\quad \psi_4=\frac{2\,\alpha\,a^2}{\lambda\,h}\,. \tag{15}$$

Крайова задача механіки зводиться до варіаційної задачі:

$$Э=\frac{1}{2}\int_0^1\left\{\left(D'+iD''\right)\left[\left(\frac{d^2w}{d\rho^2}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\frac{dw}{d\rho}\right)^2+\frac{2\nu}{\rho}\frac{dw}{d\rho}\frac{d^2w}{d\rho^2}\right]-\left(\tilde{\rho}\,h\right)a^4\omega^2w^2-\right.$$

$$\left.-2p_0\left(\rho\right)a^4\,w-2M_0\,a^2\,\nabla^2\,w\right\}\rho\,d\rho. \qquad (16)$$

За допомогою стандартної варіаційної техніки знайдемо вираз для комплексної амплітуди коливань:

$$A=\frac{p_0}{A_1+i\,A_2}, \qquad (17)$$

де $A_1=B_1-b_1\,T_1$, $A_2=B_2-b_2\,T_1$, $B_1=\dfrac{64\,D_0'}{a^4}-\dfrac{3}{5}\left(\gamma\,h\right)\omega^2$,

$$B_2=\frac{64\,D_0''}{a^4},\quad b_1=\frac{96\,D_1'}{a^4}\left(\frac{1}{4}+\frac{\nu}{12}\right),\quad b_2=\frac{96\,D_1''}{a^4}\left(\frac{1}{4}+\frac{\nu}{12}\right). \qquad (18)$$

Як видно з функціоналу (16), для компенсації механічного навантаження до актуатора необхідно підвести різницю потенціалів:

$$V_A=-\frac{a^2\int_0^1 p_0\left(\rho\right)\;w\;\rho\;d\rho}{\frac{1}{2}\left(h_0+h_1\right)\int_0^{\rho_1}\gamma_{31}\left(\rho\right)\;\nabla^2\;w\;\rho\;d\rho}\;. \qquad (19)$$

Для розрахунку різниці потенціалів актуатора потрібно використати наведені вище формули, в які не обхід-но підставити знайдені вирази для амплітуди й температури.

4. Додаткове демпфірування.

Для введення додаткового демпфірування вимушених коливань використовується описана вище техноло-гія, коли прикладена до актуатора різниця потенціалів V_A пропорційна швидкості зміни різниці потенціалів сенсора $\dot{V}_s$:

$$V_A=-G_S\,\dot{V}_S\,,\quad G_S=G\,G_e\,. \qquad (20)$$

При цьому в рівнянні руху появляється член, пропорційний швидкості зміни амплітуди зміщення. В (20) G_e - опір підсилювача, а G вибирається з умови найбільш швидкого затухання вільних коливань або суттєвого зменшення вимушених коливань.

У варіаційному принципі (16) фігурує величина M_0:

$$M_0=B\,V_A\,,\quad B=\left(h_0+h_1\right)\gamma_{31}\,. \qquad (21)$$

Для нестаціонарних коливань $w=A\left(t\right)\tilde{w}\left(x,y\right)$. Для стаціонарних коливань $A\left(t\right)=A\,e^{i\omega t}$. При цьому для нестаціонарних і стаціонарних коливань відповідно матимемо формули:

$$M_0=-m_0\,F\;\dot{A}\left(t\right),\quad M_0=-m_0 i\omega\,F\;A\,e^{i\omega t}\;. \qquad (22)$$

Тут $m_0=G_S\;\;\gamma_{31}^2\;\left(h_0+h_1\right)^2$, (23)

$$F=\iint_{(S_1)}\left(\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial y^2}\right)dx\,dy\;. \qquad (24)$$

Для визначення M_0 потрібно обчислити інтеграл F по площі сенсора, який залежить від граничних умов і апроксимації прогину.

Для круглої пластини з жорстким закріпленням торців: $\tilde{w}\left(\rho\right)=\left(1-\rho^2\right)^2$. А тому

$$F=8\;\pi\;\rho_1^2\;\left(1-\rho_1^2\right)\;. \qquad (25)$$

Для дослідження впливу додаткового затухання на демпфірування вимушених коливань пластини в одержаних вище співвідношеннях (18) потрібно замінити величину B_2 на величину

$$\tilde{B}_2=B_2+G_2. \qquad (26)$$

Додаткове затухання характеризується величиною G_2, яка розраховується або з варіаційного принципу (16) або методом Бубнова-Гальоркіна з використанням наведених вище виразів для M_0.

Застосовуючи ці методи, для круглої пластини з жорстким закріпленням торця знаходимо

$$G_2=\frac{24}{a^2}\,G_S\,\gamma_{31}^2\,\omega\left(h_0+h_1\right)^2\,\rho_1^2\left(1-\rho_1^2\right)F. \qquad (27)$$

Таким чином, крім затухання, яке породжується гістерезисними втратами в матеріалах, за рахунок G_2 з'являється додаткове затухання, яким можна керувати у досить широких межах.

Для прикладу розглянемо тришарову пластину з поліетиленовим середнім шаром і двома зовнішніми шарами протилежної поляризації з п'єзокераміки $ЦТС_T БС-2$. У випадку круглої пластини з жорстким закріпленням торців, коли на контурі пластини задана постійна температура, взято такі характеристики: радіус пластини $a = 0.0536\ м$, товщина пластини $h = 0.01\ м$, з температурою $T_C = 20^0 C$, нормальний поверхневий тиск $p_0 = 2500\ Pa$.

При врахуванні впливу температури дисипативного розігріву й залежності властивостей матеріалу від температури в околі частоти лінійного резонансу $\omega_P = 4109\ c^{-1}$, маємо амплітудно-частотні характеристики (Рис. 1) для різних значень параметра G_2 (*верхня крива* – $G_2 = 0$, *середня крива* – $G_2 = 0{,}5\ B_2$, *нижня крива* – $G_2 = 1{,}5\ B_2$). Аналізуючи ці графіки, слід відмітити наявність впливу нелінійності із-за термомеханічної спряженості, хоча ця нелінійність практично не приводить до появи областей неоднозначності. При цьому амплітуда коливань пластини на частоті лінійного резонансу значно зменшується, хоча максимальні значення амплітуди коливань залишаються майже незмінними, але досягаються вони при менших частотах. Рис.1 відповідає амплітудно-частотній характеристиці для коефіцієнту теплообміну із зовнішнім середовищем $\alpha = 0.5\, Bam / м^2 \cdot град$ з температурою $T_C = 20^0 C$. Якщо взяти $\alpha = 2.5\, Bam / м^2 \cdot град$ (Рис.2), то спостерігається зменшення модуля амплітуди коливань на частоті лінійного резонансу.

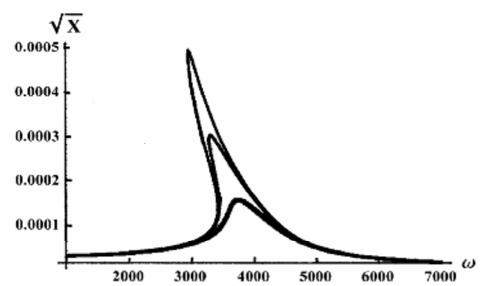

Рис.1. Амплітудно-частотна характеристика при $\alpha = 0.5\, Bam / м^2 \cdot град,\ a = 0{,}1072\ м$

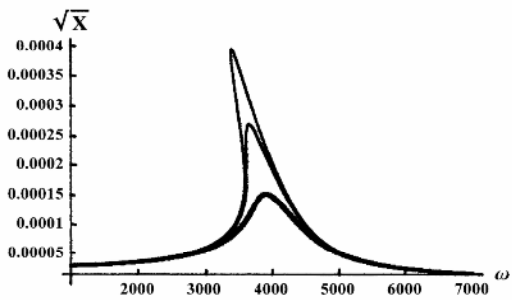

Рис. 2. Амплітудно-частотна характеристика при $\alpha = 2.5\, Bam / м^2 \cdot град,\ a = 0{,}1072\ м$

5. Висновки.

Введення додаткового затухання суттєво зменшує амплітуду коливань. Як видно з наведених графіків, врахування термомеханічної спряженості приводить до помітного впливу нелінійності, так, що з'являються області неоднозначності в амплітудно-частотних характеристиках. При цьому збільшення коефіцієнта теплообміну приводить до зменшення впливу не лінійності та амплітуди коливань.

1. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Электротермовязкоупругость. - К., 1988. 2. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек.- К., 1986. 3. *Карнаухов В.Г., Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В.* Основные соотношения термомеханики неупругих тонких пластин с распределенными сенсорами и актуаторами при моногар-моническом нагружении // Прикладная механика.- 2008. – 44, № 6.

Надійшла до редколегії 25.11.07