УДК 517.518.8

Д. Мітін, асист., М. Назаренко, канд.фіз.-мат. наук

ФРАКТАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ У ПРОСТОРАХ L_p, $0<p<1$

Розглянуто умови збіжності фрактальних наближень у просторах L_p, $0<p<1$. Сформульовано достатні умови, за яких оператор фрактального перетворення виявляється евентуально стискуючим. При цьому використано відповідну метричну теорему про нерухомі точки для відображень просторів, в яких порушується нерівність трикутника. Встановлено оцінки похибки фрактального наближення (нерівності типу Барнслі) для випадку, коли фрактальний оператор є стискуючим.

The conditions for convergence of fractal approximations in spaces L_p, $0<p<1$, are considered. Sufficient conditions for fractal transform operator to be eventually contractive are formulated. Correspondent metric theorem about fixed points for maps of spaces with triangle inequality broken is used. Estimates for fractal approximation error (Barnsley type inequalities) are found for the case when fractal operator is contactive.

1. Вступ

Питання збіжності послідовності фрактальних наближень та оцінки похибки фрактального наближення вивчаються в різних функціональних просторах, а саме: з рівномірною метрикою [2, 3], інтегральною [2], хаусдорфовою [5], інтегральною хаусдорфовою відстанню, метрикою Скорохода, Канторовича-Васерштейна, поточковою збіжністю [4], збіжністю майже скрізь тощо. Отримувані результати знаходять застосування в задачах кодування та стиску (з втратами) графічних даних при відповідній інтерпретації. Не завжди розглядуваний простір функцій є метричним (наприклад, простір хаусдорфово-неперервних функцій з інтегральною хаусдорфовою відстанню) за рахунок порушення, найчастіше, нерівності трикутника для функції відстані, що унеможливлює застосування теореми Банаха про нерухому точку стискуючого відображення. В літературі відомо чимало метричних узагальнень принципу стискуючих відображень (див., наприклад, огляд [1]), в яких послаблюються умови або на відображення, або на функцію відстані в просторі. Узагальнення першого типу приводять, зокрема, до поняття евентуально стискуючого відображення (тобто відображення, деякий степінь якого є стискуючим). Узагальнення другого типу – до так званих слабко метричних просторів (інакше – квазіметричних, напівметричних тощо), в яких нерівність трикутника замінюється деякою більш слабкою умовою.

У даній статті встановлюються достатні умови, за яких оператор фрактального перетворення виявляється евентуально стискуючим у слабко метричному просторі функцій L_p, $0<p<1$. В цих просторах вже досліджувалися різні класичні питання теорії апроксимації (див., наприклад, [6]). Для наших цілей перевіряється, що залишаються в силі міркування, задіяні раніше [2] для випадку метричних просторів L_p, $1\le p<+\infty$. Після цього застосування однієї порівняно нещодавно встановленої метричної теореми (твердження 6) про нерухомі точки відображень слабко метричних просторів одного типу дає змогу стверджувати збіжність фрактальних наближень у розглядуваному просторі. Збіжність цих наближень до нерухомої точки, якою є апроксимована функція, виявляється експоненційно швидкою. Виписано явні оцінки похибки фрактального наближення (нерівності типу Барнслі) для випадку, коли фрактальний оператор є стискуючим (твердження 7).

2. Умови збіжності фрактальних наближень у просторах L_p, $0<p<+\infty$

Як завжди [2-5] при фрактальній апроксимації функцій, заданих на відрізку $I=[a,b]\subset\mathbf{R}$, зафіксуємо:

1) набір точок x_i, $i=0,\ldots,n$, які є вузлами розбиття відрізку I, тобто таких, що $a=x_0<x<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. Позначимо $I_i=[x_{i-1},x_i)$, $i=1,\ldots,n-1$; $I_n=[x_{n-1},x_n]$. Очевидно, що $I_i\subset I$, $i=1,\ldots,n$; $\bigcup_{i=1}^n I_i=I$; $I_{i_1}\cap I_{i_2}=\varnothing$, $1\le i_1\ne i_2\le n$.

2) два набори точок α_i, β_i, $i=1,\ldots,n$, таких, що $a\le\alpha_i<\beta_i\le b$. Позначимо $I_i'=[\alpha_i,\beta_i)$ або $(\alpha_i,\beta_i]$, $i=1,\ldots,n-1$; $I_n'=[\alpha_n,\beta_n]$.

3) набір дифеоморфізмів $\varphi_i:I_i'\to I_i$, $i=1,\ldots,n$.

4) набір відображень $\psi_i:I_i'\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $i=1,\ldots,n$, які задовольняють умовам:

$$\psi_i\in C(I_i'\times\mathbf{R}),$$
$$\left|\psi_i(x,y_1)-\psi_i(x,y_2)\right|\le d_i\left|y_1-y_2\right|,\ x\in I_i',\ y_1,y_2\in\mathbf{R},\ d_i>0.$$

Нагадаємо [2], що оператор фрактального перетворення $T:L_p(I)\to L_p(I)$, $p\ge 1$, задається таким чином:

$$(T(f))(x)=\sum_{i=1}^n\psi_i(\varphi_i^{-1}(x),f(\varphi_i^{-1}(x)))\,1_{I_i}(x),\ f\in L_p(I),\ x\in I.$$

Тут використано позначення 1_A для індикаторної функції множини A.

Твердження 1. [2, п. 3] Нехай задано $\{x_i\}$, $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$, $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_i\}$, які задовольняють умовам 1)-4). Тоді оператор $T:L_p(I)\to L_p(I)$, $p\ge 1$, визначений коректно та неперервний відносно метрики $\rho(f,g)=\left(\int_I\left|f-g\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$, $p\ge 1$.

Твердження 2. [2, п. 3] У тих самих позначеннях та припущеннях покладемо:

$$u_{i_1\ldots i_k}(F)=\sup_{\substack{f,g\in F\\ f\neq g}}\frac{\int\limits_{\varphi_{i_1}^{-1}\left(I_{i_1}\cap\varphi_{i_2}^{-1}\left(I_{i_2}\cap\ldots\varphi_{i_k}^{-1}\left(I_{i_k}\right)\right)\right)}|f-g|^p\left|\left(\varphi_{i_1}\circ\ldots\circ\varphi_{i_k}\right)'\right|\mathrm{d}\,x}{\int\limits_I|f-g|^p\,\mathrm{d}\,x},\ 1\le i_1,\ldots,i_k\le n,$$

$$v_k(T,F)=\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}d_{i_1}^p\ldots d_{i_k}^p u_{i_1\ldots i_k}(F),\ k\ge 1,$$

де $F\subset L_p(I)$ – деяка підмножина, інваріантна відносно оператора T, тобто така, що $T(F)\subset F$. Нехай $\inf_{k\ge1}v_k(T,F)<1$. Тоді оператор T – евентуально стискуючий на F, тобто для T знайдеться його ітерація з деяким номером, яка буде стискуючим оператором на F.

Твердження 3. [2, п. 3] Нехай задано $\{x_i\}$, $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$, $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_i\}$, які задовольняють умовам 1)-4), а величини $u_{i_1\ldots i_k}(F)$, $v_k(T,F)$ визначено для інваріантної підмножини F, як вище. Припустимо, що множина F додатково задовольняє умові:

$$f\in F\ \Rightarrow f\left(\varphi_i^{-1}(\cdot)\right)1_{I_i}(\cdot)\in F,\ i=1,\ldots,n.$$

Тоді існує границя $w(T,F):=\lim_{k\to\infty}\left(v_k(T,F)\right)^{1/k}<+\infty$. І якщо $w(T,F)<1$, то оператор T – евентуально стискуючий на F.

Твердження 4. [2, п. 3] Припустимо, що умови 1)-4) виконані. Нехай інваріантна відносно оператора T множина F замкнена. Тоді за умови, що оператор T евентуально стискуючий на F, у нього існує єдина нерухома точка $f_*\in L_p(I)$, причому для довільної $f\in L_p(I)$ маємо: $T^{\circ k}(f)\to f_*$, $k\to\infty$.

Більш того, ця збіжність є експоненційно швидкою (явні оцінки швидкості наведено в [2, п. 4.1]). Тут використано позначення $T^{\circ k}(f)=\underbrace{T\circ\ldots\circ T}_{k}(f)$.

Тепер перенесемо визначення оператора T на функції $f\in L_p(I)$ при $0<p<1$. Як добре відомо, простори $L_p(I)$ при $0<p<1$ не є метричними, оскільки відстань $\rho(f,g)=\left(\int_I|f-g|^p\,\mathrm{d}\,x\right)^{1/p}$ при $0<p<1$ не задовольняє нерівності трикутника. Проте, справджується така нерівність, що є аналогом нерівності трикутника:

$$\rho(f,g)\le C\cdot\left(\rho(f,h)+\rho(h,g)\right),\ f,g,h\in L_p(I),\ C:=2^{1/p\ -1}>1,\ 0<p<1.$$

Дійсно, використовуючи елементарні нерівності між середніми степеневими,

$$\left(\int_I|f-g|^p\,\mathrm{d}\,x\right)^{1/p}\le\left(\int_I\left(|f-h|+|h-g|\right)^p\mathrm{d}\,x\right)^{1/p}\le\left(\int_I\left(|f-h|^p+|h-g|^p\right)\mathrm{d}\,x\right)^{1/p}$$

$$=\left(\int_I|f-h|^p\,\mathrm{d}\,x+\int_I|h-g|^p\,\mathrm{d}\,x\right)^{1/p}\le 2^{1/p\ -1}\left[\left(\int_I|f-h|^p\,\mathrm{d}\,x\right)^{1/p}+\left(\int_I|h-g|^p\,\mathrm{d}\,x\right)^{1/p}\right].$$

Можна ввести поняття збіжної послідовності, фундаментальної послідовності, повного простору, відображення стиску тощо аналогічно тому, як це робиться у випадку метричного простору. Доведення тверджень 1-3 залишаються в силі. Відомо [7, п. 1.2.2], що простори $L_p(I)$, $0<p<1$, є повними, тобто кожна ρ-фундаментальна послідовність є ρ-збіжною (ρ – відстань в $L_p(I)$, $0<p<1$). За рахунок того, що відстань у $L_p(I)$ при $0<p<1$ задовольняє наведеній вище нерівності типу нерівності трикутника, стає можливим встановити аналог твердження 4, якщо скористатися однією з метричних теорем про нерухомі точки, що узагальнюють теорему Банаха:

Твердження 5. [1, §2, п. 11] Нехай задано пару (X,ρ), де функція $\rho:X\times X\to\mathbf{R}$ задовольняє стандартним аксіомам метрики, окрім нерівності трикутника (невід'ємність, невиродженість, симетричність), замість якої виконано умову:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall x,y,z\in X,\ \rho(z,y)<\delta:\quad\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\varepsilon.$$

Припустимо, що (X,ρ) є повним простором. Нехай відображення $f:X\to X$ є відображенням стиску, тобто $\rho(f(x),f(y))\le d\cdot\rho(x,y)$ для всіх $x,y\in X$ і деякого числа $0\le d<1$. Тоді існує єдина нерухома точка $x_*\in X$ відображення f, причому для всіх $x\in X$: $f^{\circ n}(x)\to x_*$, $n\to\infty$.

Проте, скористатися саме твердженням 5 в нашому випадку (в $L_p(I)$ при $0<p<1$) не можна, оскільки, як можна пересвідчитись, вказана умова на відстань не справджується. Розглянемо узагальнення твердження 5.

Твердження 6. [8, п. 3] Нехай задано пару (X,ρ), де функція $\rho:X\times X\to\mathbf{R}$ задовольняє стандартним аксіомам метрики, окрім нерівності трикутника (невід'ємність, невиродженість, симетричність), замість якої виконано умову:

$$\exists\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y,z\in X,\ \rho(x,z)+\rho(z,y)\le\delta:\quad\rho(x,y)\le\varepsilon.$$

Припустимо, що (X,ρ) є хаусдорфовим простором (тобто для довільних двох точок простору знайдуться ρ - кулі з центрами в цих двох точках, які не перетинаються) і повним простором. Нехай відображення $f:X\to X$ задовольняє умову $\rho(f(x), f(y)) \le \varphi(\rho(x,y))$ для всіх $x, y \in X$, де функція $\varphi:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ не спадає, причому $\lim_{n\to\infty} \varphi^{\circ n}(t) = 0$, $t \ge 0$. Тоді існує єдина нерухома точка $x_* \in X$ відображення f, причому для всіх $x \in X$: $f^{\circ n}(x) \to x_*$, $n \to \infty$.

Зокрема, у твердженні 6 можна покласти $\varphi(t) = d \cdot t$, $t \ge 0$, $0 \le d < 1$. З нерівності типу нерівності трикутника (в $L_p(I)$ при $0 < p < 1$) випливає вказана умова на відстань.

Висновок. Твердження 1-4 залишаються в силі й при $0 < p < 1$.

Зауваження 1. Як показано в [4, п. 4], при виборі $I = [0,1]$, $n = 2$, $I_1 = [0,1/2)$, $I_2 = [1/2,1]$, $I_1' = [0,1)$, $I_2' = [0,1]$, $\varphi_1(x) = x/2$, $\varphi_2(x) = (x+1)/2$, $\psi_1(x,y) = d_1 x$, $\psi_2(x,y) = d_2 x$ фрактальні наближення збігаються майже скрізь на відрізку I при $d_1 d_2 < 1$, а в просторі $L_p(I)$, $1 \le p < +\infty$ – при $(d_1^p + d_2^p)/2 < 1$. Тепер ми можемо стверджувати, що в просторі $L_p(I)$, $0 < p < 1$, буде збіжність теж при $(d_1^p + d_2^p)/2 < 1$. Зауважимо, що гіпербола $d_1 d_2 = 1$ є обвідною сім'ї кривих $(d_1^p + d_2^p)/2 = 1$, $0 < p < +\infty$.

3. Оцінки похибки фрактального наближення у просторах L_p, $0 < p < 1$

Встановимо оцінки похибки фрактального наближення (нерівності типу нерівності Барнслі) для випадку, коли фрактальний оператор є стискуючим.

Твердження 7. Нехай у позначеннях попереднього пункту $0 \le d := v_1(T, L_p(I)) < 1$. Тоді оператор фрактального перетворення $T: L_p(I) \to L_p(I)$, $0 < p < 1$, – стискуючий зі сталою d, $f_* \in L_p(I)$ – його єдина нерухома точка, причому має місце оцінка:

$$\rho(T^{\circ n}(f), f_*) \le \frac{Cd^n}{1-Cd^j}\rho(f, T^{\circ j}(f)) \le \begin{cases} \dfrac{Cd^n}{1-Cd^j}\left(C\dfrac{C^{j-1}d^{j-1}-1}{Cd-1} + C^{j-1}d^{j-1}\right)\rho(f, T(f)), \ Cd \ne 1, \\ \dfrac{Cd^n}{1-Cd^j}\big(C(j-1)+1\big)\rho(f, T(f)), \ Cd = 1, \end{cases}$$

де $j \ge \left\lfloor \dfrac{\ln C}{-\ln d} \right\rfloor + 1$. Зокрема, при $n = 0$:

$$\rho(f, f_*) \le \frac{C}{1-Cd^j}\rho(f, T^{\circ j}(f)) \le \begin{cases} \dfrac{C}{1-Cd^j}\left(C\dfrac{C^{j-1}d^{j-1}-1}{Cd-1} + C^{j-1}d^{j-1}\right)\rho(f, T(f)), \ Cd \ne 1, \\ \dfrac{C}{1-Cd^j}\big(C(j-1)+1\big)\rho(f, T(f)), \ Cd = 1. \end{cases}$$

Тут $\lfloor A \rfloor$ – ціла частина числа A.

Доведення. Маємо ланцюжок нерівностей:

$$\begin{aligned} &\rho(T^{\circ n}(f), T^{\circ(n+m)}(f)) \le C\rho(T^{\circ n}(f), T^{\circ(n+1)}(f)) + C\rho(T^{\circ(n+1)}(f), T^{\circ(n+m)}(f)) \\ &\le C\rho(T^{\circ n}(f), T^{\circ(n+1)}(f)) + C^2\rho(T^{\circ(n+1)}(f), T^{\circ(n+2)}(f)) + C^2\rho(T^{\circ(n+2)}(f), T^{\circ(n+m)}(f)) \\ &\le \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\le C\rho(T^{\circ n}(f), T^{\circ(n+1)}(f)) + C^2\rho(T^{\circ(n+1)}(f), T^{\circ(n+2)}(f)) + C^3\rho(T^{\circ(n+2)}(f), T^{\circ(n+3)}(f)) + \ldots \\ &+C^{m-1}\rho(T^{\circ(n+m-2)}(f), T^{\circ(n+m-1)}(f)) + C^{m-1}\rho(T^{\circ(n+m-1)}(f), T^{\circ(n+m)}(f)) \\ &\le Cd^n\left(\frac{1-C^{m-1}d^{m-1}}{1-Cd} + C^{m-2}d^{m-1}\right)\rho(f, T(f)). \end{aligned}$$

У випадку $Cd < 1$, переходячи в отриманій оцінці до границі при $m \to \infty$, маємо:

$$\rho(T^{\circ n}(f), f_*) \le \frac{Cd^n}{1-Cd}\rho(f, T(f)).$$

Нехай тепер $Cd \ge 1$. Знайдемо таке $j \in \mathbf{N}$, що $Cd^j < 1$. Застосуємо отриману оцінку для відображення $T^{\circ j}$, яке є стискуючим зі сталою d^j. Матимемо:

$$\rho(T^{\circ nj}(f), f_*) \le \frac{Cd^{nj}}{1-Cd^j}\rho(f, T^{\circ j}(f)).$$

Звідси:

$$\rho(T^{\circ(nj+i)}(f), f_*) = \rho(T^{\circ(nj+i)}(f), T^{\circ i}(f_*)) \le \frac{Cd^{nj+i}}{1-Cd^j}\rho(f, T^{\circ j}(f)),$$

що й доводить твердження після перепозначення $nj+i$ через n.

Зауваження 2. Аналогічно встановлюються оцінки похибки фрактального наближення для випадку, коли фрактальний оператор є евентуально стискуючим.

4. Висновок

З прикладу оператора фрактального перетворення, наведеного в зауваженні 1, можна бачити, що умови евентуального стиску в просторах $L_p(I)$, $0<p<1$, займають, так би мовити, проміжне положення між умовами евентуального стиску в просторах $L_p(I)$, $1\le p<+\infty$, та умовами збіжності майже скрізь.

1. *Иванов А. А.* Неподвижные точки отображений метрических пространств // Записки ЛОМИ. – 1976. – Т. 66. – С. 5–102. 2. *Мітін Д. Ю., Назаренко М. О.* Фрактальна апроксимація в просторах C і L_p та її застосування в задачах кодування зображень // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2005. – Т. 2, № 2. – С. 161–175. 3. *Мітін Д. Ю., Назаренко М. О.* Інваріантність підпросторів неперервних та гладких функцій відносно фрактальних перетворень // Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка, серія «Математика, механіка». – 2007. – Вип. 18 (здано до друку). 4. *Мітін Д. Ю., Назаренко М. О.* Поточкова фрактальна апроксимація функцій // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2007 (прийнято до друку). 5. *Мітін Д. Ю., Назаренко М. О.* Фрактальна апроксимація функцій в просторі функцій з хаусдорфовою метрикою // 11-та Міжнародна наукова конференція ім. М. Кравчука: Матер. конф., Київ, 2006. – К., 2006. – С. 523. 6. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L^p, $0<p<1$ // Матем. сборник. – 1975. – Т. 98, № 3. – С. 395–415. 7. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. – М., 1986. 8. *Jachymski J., Matkowski J., Świątkowski T.* Nonlinear contactions on semimetric spaces // J. of applied analysis. – 1995. – Vol. 1, no. 2. – P. 125–134.

Надійшла до редколегії 08.10.2007

УДК 517.9

Н.Задоянчук, асп. П.Касьянов, канд.фіз.-мат.наук
e-mail: ninelll@ukr.net e-mail:kasyanov@univ.kiev.ua

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З M-ПСЕВДОМОНОТОННИМИ НЕКОЕРЦИТИВНИМИ ВІДОБРАЖЕННЯМИ

Ми розглядаємо диференціально-операторні рівняння першого порядку з некоерцитивними відображеннями M-псевдомонотонного типу, зокрема, для некоерцитивних операторів варіаційного числення. Ми довели розв'язність методом Фаедо-Гальоркіна і одержали апріорні оцінки для наближених розв'зків.

We consider the first order differential-operators equations with non-coercive maps of M-pseudomonotone type, in particular, for non-coercive operators of variational calculus. We proved the solvability by using of Faedo-Galerkin method and obtained a priory estimations for approximate solutions.

1.Вступ

В останні роки активізувались дослідження нелінійних некоерцитивних граничних задач в частинних похідних, які породжують еволюційні рівняння та включення з некоерцитивними відображеннями псевдомонотонного типу [1-15]. Так, в роботах [1; 7] досліджено випадок монотонних некоерцитивних операторів. В роботах [4; 5] описані некоерцитивні задачі з операторами, які мають напівобмежену варіацію. Мета даної роботи полягає у тому, щоб узагальнити ці результати на випадок M-псевдомонотонних некоерцитивних відображень. Це дозволить досліджувати ряд задач гідродинамічного типу, що породжують нелінійні диференціально-операторні рівняння з некоерцитивними операторами варіаційного числення [7; 8], з сумою некоерцитивного по старшим похідним та демінеперервного некоерцитивного по похідним нижчого порядку операторів.

2.Постановка задачі

Нехай V_i, $i=1,2$ - рефлексивні банахові простори; H - гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$, ототожнений зі спряженим простором H^*, V_σ - сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_{V_\sigma}$ і $V_\sigma\subset V_i\subset H$, де кожне вкладення неперервне і щільне. Тоді маємо такий ланцюжок неперервних та щільних вкладень $V_\sigma\subset V_i\subset H\subset V_i^*\subset V_\sigma^*$, де V_i^* - спряжений простір до V_i, V_σ^* - спряжений до V_σ відносно $(\cdot,\cdot)$.

Введемо позначення $S=[0,T]$ - скінченний інтервал часу,

$$X=L_{p_0}(S;H)\bigcap L_{p_1}(S;V_1)\bigcap L_{p_2}(S;V_2),\quad X_\sigma=L_{p_0}(S;H)\bigcap L_{\max\{p_1,p_2\}}(S;V_\sigma),$$

$$X^*=L_{q_0}(S;H)+L_{q_1}(S;V_1^*)+L_{q_2}(S;V_2^*),\quad X_\sigma^*=L_{q_0}(S;H)+L_{\min\{q_1,q_2\}}(S;V_\sigma^*),\ ,$$

де $\frac{1}{p_0}+\frac{1}{q_0}=\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}=1$, $1<p_i<\infty$, $p_i\le p_0<\infty$, $i=1,2.$

Лінійний простір $W=\{y\in X\,|\,y'\in X^*\}$ (відповідно $W_\sigma=\{y\in X\,|\,y'\in X_\sigma^*\}$) є рефлексивним банаховим простором відносно норми $\|y\|_W=\|y\|_X+\|y'\|_{X^*}$ (відповідно $\|y\|_{W_\sigma}=\|y\|_X+\|y'\|_{X_\sigma^*}$), де y' - похідна від елемента $y\in X$ в сенсі простору скалярних розподілів $D^*(S,V_\sigma^*)=L(D(S);V_\sigma^*)$ [1].

Для довільних $v\in X$ та $f\in X^*$: $f=f_0+f_1+f_2$, $f_0\in L_{q_0}(S;H)$, $f_1\in L_{q_1}(S;V_1^*)$, $f_2\in L_{q_2}(S;V_2^*)$, розглянемо

$$\langle f,v\rangle_X=\int_S(f_0(t),v(t))dt+\int_S\langle f_1(t),v(t)\rangle_{V_1}dt+\int_S\langle f_2(t),v(t)\rangle_{V_2}dt=\int_S(f(t),v(t))dt.$$

Тут $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_i}:V_i^*\times V_i\to R$ - канонічне спарювання, що співпадає на $H\times V_i$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ в H.

Розглянемо диференціально-операторне рівняння вигляду

$$y' + A(y) + B(y) = f \tag{1}$$

$$y(0) = y_0 \tag{2}$$

де $A, B : X \to X^*$, $f \in X^*$, $y_0 \in H$.

Основною метою даної роботи є встановлення властивостей розв'язуючого оператора для некоерцитивної задачі (1)-(2) за умов узагальненої M -псевдомонотонності та обмеженості на відображень A та B.

3.Основні класи відображень.

Означення 1. Оператор $A : X \to X^*$ називається коерцитивним, якщо існує визначена на $[0, \infty)$ дійсна функція γ з $\lim\limits_{s\to\infty}\gamma(s) = +\infty$ така, що $\langle Au, u\rangle_X \ge \gamma(\|u\|_X)\|u\|_X \quad \forall u \in X.$

Означення 2. Оператор $A : X \to X^*$ називається демінеперервним, якщо з $u_n \to u$ в X випливає, що Au_n слабко збігається до Au в X^*.

Означення 3. Оператор $A : X \to X^*$ називається:

1) M -псевдомонотонним на W (на W_σ), якщо для довільної послідовності $\{y_n\}_{n\ge1}$, слабко збіжної до y в X, $y_n' \to y'$ слабко в X^* (в X_σ^*) і нерівності

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A(y_n), y_n - y\rangle_X \le 0 \tag{3}$$

можна виділити таку підпослідовність $\{y_{n_k}\}$, що

$$\underline{\lim}_{n_k\to\infty} \left\langle A(y_{n_k}), y_{n_k} - w\right\rangle_X \ge \left\langle A(y), y - w\right\rangle_X \quad \forall\, w \in W \quad (w \in W_\sigma); \tag{4}$$

2) M_0 -псевдомонотонним на W (на W_σ), якщо з того, що $y_n \to y$ слабко в X, $A(y_n) \to d$ слабко в X^*, $y_n' \to y'$ слабко в X^* (в X_σ^*) і нерівності (3) випливає нерівність (4).

Зауваження 1. Оператори M -псевдомонотонного типу на W в значно більш загальній ситуації були введені в роботах [7] (означення 4.3.2), а також [4]. Перехід в (4) до підпослідовностей має тут принципове значення, і ця ідея запозичена нами з [2]. Очевидно також, що кожний M - псевдомонотонний на W (на W_σ) оператор є M_0 - псевдомонотонним на W (на W_σ).

Пропозиція 1. [13] Нехай $A, B : X \to X^*$ - M -псевдомонотонні на W (на W_σ) оператори. Тоді оператор $\mathrm{A} = A + B$ ($\mathrm{A}(y) = A(y) + B(y), \quad y \in X$) є M -псевдомонотонним на W (на W_σ).

Зауваження 2. Для M_0 -псевдомонотонних відображень аналогічне твердження справедливе, якщо один з операторів обмежений.

Пропозиція 2. [13] Справедливі імплікації:

" A - радіально неперервний оператор з $(X; W_\sigma)$ -напівобмеженою варіацією " $\Rightarrow$ " $A - M_0$ -псевдомонотонний на W_σ оператор " $\Rightarrow$ " A задовольняє властивість (M) на W_σ ".

4.Основні результати.

Нехай $A : X \to X^*$. Розглянемо задачу Коші для нелінійного диференціально-операторного рівняння I - го порядку

$$y' + A(y) = f \tag{5}$$

$$y(0) = y_0, \tag{6}$$

де $f \in X^*, y_0 \in H$.

Зауваження 3. Рівняння (5) можна розуміти як рівність в $D^*(S; V^*)$, а оскільки $y' = f - A(y) \in X^*$, то в силу неперервності вкладення $W_\sigma^* \subset C(S; V_\sigma^*)$ рівність (6) має сенс (наприклад, в V_σ^*).

Нехай $\lambda > 0, \quad p_0 \ge 2,$ тобто $X \subset X^*, \quad I : X \to X \subset X^*$ - тотожнє відображення. Накладемо на A наступні умови:

α_1 *) оператор* $A : X \to X^*$ - λ_0 *-псевдомонотонний на* W_σ *і обмежений;*

α_2 *) оператор* $A : C(S; V_\sigma^*) \to X^*$ *- демінеперервний;*

α_3 *) оператор* $A + \lambda I$ *- коерцитивний.*

Нехай також виконується умова

P) простір V_σ (а, тому і V) сепарабельний (ця вимога не є суттєвою, проте вона спрощує доведення), і нехай $\{h_1, ..., h_n, ...\}$ - повна система лінійно незалежних елементів; H_n - лінійна оболонка сукупності $\{h_1, h_2, ..., h_n\}$, наділена скалярним добутком із H . Припустимо, що система $\{h_1, h_2, ...\}$ така, що $\forall n$ *оператор ортогонального проектування* $\pi_n : H \to H_n$ *рівномірно обмежений одиницею в* $L(H;H)$, $L(V_\sigma;V_\sigma)$ і $L(V_\sigma^*;V_\sigma^*)$.

Теорема 1. Нехай $p_0 \ge 2$ і виконуються умови $\alpha_1)$ - $\alpha_3)$ і $P)$. Тоді при кожному $f \in X^*$ і $y_0 \in H$ задача Коші (5), (6) має, принаймні, один розв'язок $y \in W$.

Доведення. Доведення проведемо, слідуючи [1]. Для кожного $t \in S$ покладемо

$$X(t) = L_{p_1}\left([0,t];V_1\right) \cap L_{p_2}\left([0,t];V_2\right) \cap L_{p_0}\left([0,t];H\right),$$

$$X_\sigma(t) = L_{p_0}([0,t];H) \cap L_p([0,t];V_\sigma), \quad p = \max\{p_1, p_2\};$$

$$X_\sigma^*(t) = L_{q_0}([0,t];H) + L_q([0,t];V_\sigma^*), \quad q = \min\{q_1, q_2\};$$

Лема 1. Якщо $p_0 \ge 2$ та для деякого $\lambda \ge 0$ $A + \lambda I : X \to X^*$ є коерцитивним оператором типу Вольтерра, то справджується наступна нерівність

$$\int_S e^{-2\lambda t}(A(y)(t) + \lambda y(t), y(t))dt \ge \tilde{\gamma}(\|y\|_X)\|y\|_X \quad \forall y \in X, \tag{7}$$

де $\tilde{\gamma} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ - обмежена знизу на обмежених в $\mathbb{R}_+$ множинах неперервна функція така, що $\tilde{\gamma}(r) \to +\infty$ при $r \to \infty$.

Доведення. Перевіримо (7). Із коерцитивності і обмеженості A випливає, що для $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ - обмеженої знизу на обмежених в $\mathbb{R}_+$ множинах функції такої, що $\gamma(r) \to +\infty$ при $r \to \infty$

$\langle (A + \lambda I)y, y \rangle \ge \gamma(\|y\|_X)\|y\|_X \quad \forall y \in X.$

Звідси, $\inf\limits_{s \ge 0} \gamma(s) = a > -\infty$. Для довільного $b > a$ розглянемо непорожню обмежену в $\mathbb{R}_+$ множину $A_b = \{c \ge 0 \mid \gamma(c) \le b\}$. Нехай $c_b = \sup A_b$ для довільного $b > a$. Зауважимо, що $\forall b_1 > b_2 > a$ $+\infty > c_{b_1} \ge c_{b_2}$ і $c_b \to +\infty$ при $b \to +\infty$. Покладемо $\hat{\gamma}(t) = \begin{cases} a, & t \in [0, c_{a+1}], \\ a + k - 1 + \dfrac{t - c_{a+k}}{c_{a+k+1} - c_{a+k}}, & t \in (c_{a+k}, c_{a+k+1}], k \ge 1. \end{cases}$

Тоді, $\hat{\gamma} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ - обмежена знизу на обмежених в $\mathbb{R}_+$ множинах неспадна неперервна функція така, що $\hat{\gamma}(r) \to +\infty$ при $r \to \infty$ та $\gamma(t) \ge \hat{\gamma}(t)$ $\forall t \ge 0$. Оскільки A - оператор типу Вольтерра, то

$$\forall t \in S \qquad \int_0^t (A(y)(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau))d\tau = \int_0^T (A(y_t)(\tau) + \lambda y_t(\tau), y_t(\tau))d\tau \ge \hat{\gamma}(\|y_t\|_X)\|y_t\|_X = \hat{\gamma}(\|y\|_{X_t})\|y\|_{X_t},$$

де $\|y\|_{X_t} = \|y_t\|_X$, а $y_t(s) = \begin{cases} y(s), & 0 \le s \le t, \\ \bar{0}, & t \le s \le T. \end{cases}$ Нехай $g(\tau) = (A(y)(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau)),\ \tau \in S,\ h(t) = \hat{\gamma}(\|y\|_{X_t})\|y\|_{X_t},\ t \in S.$

Для всіх $t \in S$ $h(t) \ge \hat{\gamma}(0)\|y\|_X$ та $\int_0^t g(\tau)d\tau \ge h(t) \quad \forall t \in S.$

Далі, $\int_0^T e^{-2\lambda\tau}(A(y)(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau))d\tau = e^{-2\lambda T}\int_0^T g(\tau)d\tau + \int_0^T [e^{-2\lambda\tau} - e^{-2\lambda T}]g(\tau)d\tau \ge e^{-2\lambda T}h(T) + 2\lambda\int_0^T e^{-2\lambda s}\int_0^s g(\tau)d\tau ds \ge$

$$\ge e^{-2\lambda T}h(T) + 2\lambda T \inf_{s \in S} e^{-2\lambda s}\int_0^s (A(y)(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau))d\tau \ge -c_1\|y\|_X + e^{-2\lambda T}\hat{\gamma}(\|y\|_X)\|y\|_X,$$

де $c_1 = 2\lambda T \mid \hat{\gamma}(0) \mid \ge 0$ не залежить від $y \in X,\ \tilde{\gamma}(s) = e^{-2\lambda T}\hat{\gamma}(s) - c_1,\ s \ge 0.$ Отже, властивість (7) встановлена.

Розглянемо таку задачу

$$y_n' + A_n(y_n) = f_n, \tag{8}$$

$$y_n(0) = y_{n0}, \tag{9}$$

де $X_n = L_{p_0}\left(S;H_n\right)$, $X_n^* = L_{q_0}\left(S;H_n\right)$, $y_{n0} \to y_0$ сильно в H , а оператор $A_n : X_n \to X_n^*$, і $f_n \in X_n^*$ визначаються співвідношеннями

$$\langle f_n, w_n \rangle_{X_n} = \langle f, w_n \rangle_X, \quad \langle A_n(y_n), w_n \rangle_{X_n} = \langle A(y_n), w_n \rangle_X \quad \forall\, y_n, w_n \in X_n.$$

Лема 2. При кожному $n \ge 1$ задача (8), (9) має розв'язок $y_n \in W$, послідовність $\{y_n\}$ обмежена в X і в $C(S;H)$, а $\{y_n'\}$ обмежена в X_σ^* .

Доведення. Позначимо S_1 множину тих $t_1 \in S$, для яких задача (8), (9) має розв'язок з $L_{p_0}([0,t_1];H_n)$ (можливо, $S_1 = \{0\}$). При цьому S_1 може мати вигляд $[0,t_0)$ або $[0,t_0]$. Для кожного $t_1 \in [0,t_0)$ система (8) має розв'язок $y_n \in L_{p_0}([0,t_1];H_n)$, $y_n' \in L_{q_0}([0,t_1];H_n)$, тобто

$$y_n'(t) + (A_n y_n)(t) = f_n(t) \quad \text{для м.в. } t \in [0,t_1] \tag{10}$$

$$y_n(0) = y_{n0}. \tag{11}$$

Помноживши (10) на $y_n(t)e^{-2\lambda t}$ і проінтегрувавши, внаслідок леми **1.** та Вольтеровості A, для всіх $n \ge 1$ та $t \in [0,t_1)$, маємо

$$\frac{1}{2}e^{-2\lambda T}\|y_n(t)\|_H^2 + \gamma(\|y_n\|_{X(t)})\|y_n\|_{X(t)} \le \|f\|_{X^*}\|y_n\|_{X(t)} + \frac{1}{2}\|y_{on}\|_H^2, \tag{12}$$

оскільки $\int_0^t e^{-2\lambda\tau}(y_n'(\tau), y_n(\tau))d\tau = \int_0^t ((e^{-\lambda\tau}y_n(\tau))', y_n(\tau)e^{-\lambda\tau})d\tau + \lambda\int_0^t e^{-2\lambda\tau}(y_n(\tau), y_n(\tau))d\tau$ та

$$\int_0^t ((e^{-\lambda\tau}y_n(\tau))', y_n(\tau)e^{-\lambda\tau})d\tau = \frac{1}{2}(\|e^{-\lambda t}y_n(t)\|_H^2 - \|y_{n0}\|_H^2) = \int_0^t e^{-2\lambda\tau}\langle f(\tau), y_n(\tau)\rangle d\tau - \int_0^t e^{-2\lambda\tau}\langle Ay_n(\tau) + \lambda y_n(\tau), y_n(\tau)\rangle d\tau.$$

Зокрема із (12) випливає:

$$\gamma(\|y_n\|_{X(t_1)})\|y_n\|_{X(t_1)} \le \|f\|_{X^*} + \frac{1}{2}\|y_{n0}\|_H^2 \quad \forall n \ge 1 \tag{13}$$

та

$$\|y_n(t)\|_H^2 \le c_2(\|y_n\|_{X(t_1)} + 1), \tag{14}$$

де $c_2 \equiv const,$ яка не залежить від $n \ge 1$ та t. Звідси виводимо, що

$$\|y_n\|_{X(t_1)} \le k_1, \tag{15}$$

де стала k_1 не залежить від n та t_1. Тому, $y_n \in L_{p_0}([0,t_0];H_n)$, і можемо вважати, що $S_1 = [0,t_0]$. Доведемо, що розв'язок y_n продовжується на весь S . Покладемо $y_n(t_0) = l$ і

$$\xi(t) = \begin{cases} y_n(t), & 0 \le t \le t_0, \\ l, & t_0 < t \le T. \end{cases}$$

Оператор $A: X \to X^*$ обмежений, тому обмеженим, а тим більше, локально обмеженим, буде і відображення $A_n : X_n \to X_n^*$. Справді, якщо $\|y_n\|_{X_n} \le k_0$, то

$$\|A_n(y_n)\|_{X_n^*} = \sup_{\|w_n\|_{X_n}=1}\left|\langle A_n(y_n), w_n\rangle_{X_n}\right| \le \sup_{\|w_n\|_X=1}\left|\langle A(y_n), w_n\rangle_X\right| = \|A(y_n)\|_{X^*} \le l_0.$$

А тому локально обмеженим буде оператор $A_n : C(S;H_n) \to L_{q_0}(S;H_n)$.

Таким чином, знайдуться числа $\varepsilon = \varepsilon(\xi) > 0$, $M = M(\xi) > 0$ такі, що

$$\|A_n(y) - f_n\|_{X_n^*} \le M \tag{16}$$

як тільки $\|y - \xi\|_{C(S;H_n)} \le \varepsilon.$

Нехай функція $y \in C(S;H_n)$ задається співвідношенням

$$y(t) = \begin{cases} y_n(t), & 0 \le t \le t_0, \\ \eta(t), & t_0 < t \le T, \|\eta(t) - l\|_{H_n} \le \varepsilon, \\ l + \varepsilon(\eta(t) - l)/\|\eta(t) - l\|_{H_n}, & t_0 < t \le T, \|\eta(t) - l\|_{H_n} > \varepsilon, \end{cases}$$

де $\eta \in C_l = \{w \in C([t_0,T],H_n) \mid w(t_0) = l\}$.

Визначимо оператор $G: C_l \to L_{q_0}(S;H_n)$ рівністю

$$(G\eta)(t) = (A_n(y) - f_n)(t), \quad t_0 \le t \le T.$$

Очевидно, відповідність $C_l \ni \eta \to y \in C(S;H_n)$ неперервна, а із умови α_2) випливає демінеперервність відображення $A_n: C(S;H_n) \to X_n^*$. А тому демінеперервним буде і відображення $G: C_l \to X_n^*$. Крім того, завдяки (16), $\|G(\eta)\|_{X_n^*} = \|A_n(y) - f\|_{X_n^*} \le M \quad \forall \eta \in C_l$.

Таким чином, ми потрапляємо в умови узагальненої теореми Каратеодорі, доведення якої приведено, наприклад, у роботі [1].

Лема 3. Нехай $G : C_l \to X_n^*$ - деміneперервний оператор і справедлива оцінка $\|G(\eta)\|_{X_n^*} \le M \quad \forall \eta \in C_l$. Тоді рівняння $\eta(t) = l - \int_{t_0}^{t}(G\eta)(\tau)d\tau \quad \forall t \in [t_0, T]$ розв'язне в C_l.

Звідси випливає, що для достатньо малого $\delta > 0$ справедлива оцінка $\|\eta(t) - l\|_{X_n} \le \varepsilon$, $t_0 \le t \le t_0 + \delta$. Функцію $y_n(t)$, визначену на $[0, t_0]$, продовжимо на інтервал $[0, t_0 + \delta]$: $y_n(t) = \eta(t)$, $t_0 < t \le t_0 + \delta$. Тоді

$$(G\eta)(t) = \big(A_n(y_n) - f_n\big)(t), \quad t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

і
$$y_n(t) = l - \int_{t_0}^{t}(G\eta)(\tau)d\tau = y_n(t_0) - \int_{t_0}^{t}\big(A_n(y_n) - f_n\big)(\tau)d\tau = y_{n0} - \int_0^t \big(A_n(y_n) - f_n\big)(\tau)d\tau,$$

оскільки $y_n(t_0) = y_{n0} - \int_0^{t_0}\big(A_n(y_n) - f_n\big)(\tau)d\tau.$

А це означає, що розв'язок задачі (10), (11) існує на $[0, t_0 + \delta]$, належить $L_{p_0}([0, t_0 + \delta]; H_n)$ і, таким чином, продовжуючи цей процес, приходимо до $S_1 = S$, тобто y_n із $L_{p_0}(S; H_n)$.

Обмеженість послідовності $\{y_n\}$ в просторі X негайно випливає із оцінки (15), а оцінка $\|y_n\|_{C(S;H_n)} \le k_0$ випливає із (14), обмеженість $\{A(y_n)\}$ в X^* очевидна.

Доведемо обмеженість послідовності $\{y_n'\}$ в X_σ^*. Нехай $\pi_n : H \to H_n$ - оператор ортогонального проектування, що задовольняє умову P). Тоді з того, що $\langle y_n'(t), h_i \rangle_V + \langle (Ay_n)(t), h_i \rangle_V = \langle f(t), h_i \rangle_V$, $i = \overline{1, n}$, одержуємо

$$y_n' + \pi_n A(y_n) = \pi_n f.$$

З умови α_1) випливає, що послідовність $\{A(y_n)\}$ обмежена в X^* і відповідно в X_σ^*, а, це означає, шо $\{\pi_n A(y_n)\}$ обмежена в X_σ^* в силу властивостей оператора π_n. Також обмежена в X_σ^* і послідовність $\{\pi_n f\}$. Таким чином, робимо висновок, що $\{y_n'\}$ обмежена в X_σ^*.

Лема 2 доведена.

Отже, завдяки рефлексивності W_σ, X, H, теоремі Банаха-Алаоглу існує підпослідовність $\{y_m\} \subset \{y_n\}$, існують $y \in W_\sigma$, $z \in H$ та $d \in X^*$, для яких мають місце збіжності:

i_1) $y_m \to y$ слабко в W_σ;

i_2) $y_m(T) \to z(T)$ слабко в H;

i_3) $A(y_m) \to d$ слабко в X^*.

Тоді для довільних $\varphi \in D(S)$ і $h \in H_n$, використовуючи властивості інтеграла Бохнера, одержуємо при $n_k \ge n$

$$\left\langle \int_S \varphi(t)\Big(y_{n_k}'(t) + (A_{n_k} y_{n_k}(t)\Big)dt, h \right\rangle_V = \left\langle y_{n_k}' + A_{n_k}(y_{n_k}), \varphi h \right\rangle_X = \left\langle f, \varphi h \right\rangle_X = \left\langle \int_S \varphi(t) f(t)dt, h \right\rangle_V.$$

Перейшовши до границі в останній рівності, знаходимо $\left\langle y', \varphi x \right\rangle_X = \left\langle \int_S \varphi(t)\big(f(t) - d(t)\big)dt, x \right\rangle_{V_\sigma}$ $\forall x \in \bigcup_n H_n$, а оскільки $\bigcup_n H_n$ щільна в V_σ (і в V), то

$$y' + d = f \tag{17}$$

як рівність в X_σ^*. Звідси, зокрема, випливає, що $y \in W$.

Доведемо, що $y(0) = y_0$, $y(T) = z$. Для довільного $h \in \bigcup_n H_n$, згідно (17), маємо

$$\int_S \left\langle y'(t), (T-t)h \right\rangle_{V_\sigma} dt = \int_S \left\langle f(t) - d(t), (T-t)h \right\rangle_{V_\sigma} dt = \lim_{n_k \to \infty} \int_S \left\langle f(t) - (Ay_{n_k})(t), (T-t)h \right\rangle_{V_\sigma} dt =$$

$$= \lim_{n_k \to \infty} \int_S \left\langle f(t) - (Ay_{n_k})(t), (T-t)h \right\rangle_{V_\sigma} dt = \lim_{n_k \to \infty} \int_S \left\langle y_{n_k}'(t), (T-t)h \right\rangle_{V_\sigma} dt = \lim_{n_k \to \infty} \left\{ \int_S \Big(y_{n_k}(t), h\Big)dt - \Big(y_{n_k}(0), Th\Big) \right\} =$$

$$= \int_S \big(y(t), h\big)dt - \big(y_0, Th\big) = \int_S \left\langle y'(t), (T-t)h \right\rangle_{V_\sigma} dt - \big(y(0) - y_0, Th\big).$$

Але, оскільки $\bigcup_n H_n$ щільна V_σ, то звідси одержуємо ss Аналогічно для $h \in \bigcup_n H_n$ маємо

$$\big(y(T) - y_0, h\big) = \int_S \left\langle y'(t), h \right\rangle_{V_\sigma} dt = \lim_{n_k \to \infty} \int_S \left\langle y_{n_k}'(t), h \right\rangle_{V_\sigma} dt = \lim_{n_k \to \infty} \Big(y_{n_k}(T) - y_{n_k}(0), h\Big) = (z - y_0, h)$$

і, таким чином, $y(T) = z$.

Нам залишається довести, що $d = A(y)$. Скористаємось для цього умовою α_1). Перейшовши, при необхідності, до підпослідовності, із (10), (11) і (17), одержуємо

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\langle A(y_{n_k}),y_{n_k}\right\rangle_X \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\langle f-y'_{n_k},y_{n_k}\right\rangle_X \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\left\langle f,y_{n_k}\right\rangle_X+\frac{1}{2}\left(\left\|y_{n_k}0\right\|_H^2-\left\|y_{n_k}(T)\right\|_H^2\right)\right\}\le$$

$$\le \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\left\langle f,y_{n_k}\right\rangle_X+\frac{1}{2}\left(\left\|y_{n_k}0\right\|_H^2-\left\|y_{n_k}(T)\right\|_H^2\right)\right\}\le\left\langle f,y\right\rangle_X+\frac{1}{2}\left(\|y_0\|_H^2-\|y(T)\|_H^2\right)=$$

$$=\int_S\left\langle f(t),y(t)\right\rangle_V dt-\int_S\left\langle y'(t),y(t)\right\rangle_V dt=\int_S\left\langle \mathrm{d}(t),y(t)\right\rangle_V dt=\left\langle \mathrm{d},\mathrm{y}\right\rangle_X .$$

Проте кожний M_0-псевдомонотонний на W оператор має властивість (M) на W (пропозиція 2), звідки $\mathrm{d} = A(y)$. Таким чином, $y' + A(y) = f$, $y \in W$, $y(0) = y_0$. Теорема доведена.

Покладемо $X_1 = L_{p_1}(S;V_1)$, $X_2 = L_{p_2}(S;V_2)\bigcap L_{p_0}(S;H)$.

Наслідок 1. Нехай оператори $A: X_1 \to X_1^*$ та $B: X_2 \to X_2^*$ задовольняють умови $\alpha_1)-\alpha_3)$. Нехай також виконується умова P). Тоді для кожного $f \in X^*$ та $y_0 \in H$ задача (1), (2) має принаймні один розв'язок $y \in W_\sigma$.

Зауваження 4. Для доведення даного твердження досить розглянути оператор $C = A + B$. Тоді задача (1), (2) набуде вигляду (5)-(6).

Далі застосовуємо теорему 1 до цієї задачі з оператором $C: X \to X^*$, де $X = X_1 \bigcap X_2$, $X^* = X_1^* + X_2^*$.

Наслідок 2. Нехай або V_1, або V_2 компактно вкладений в H. Оператор $A: X \to X^*$ задовольняє умови $\alpha_2),\alpha_3)$, обмежений та $A + \lambda I: X \to X^*$ - M_0-псевдомонотонний на W_σ і виконується умова P). Тоді при кожному $f \in X^*$ і $y_0 \in H$ задача (5),(6) має принаймні один розв'язок $y \in W_\sigma$.

5.Висновок

За допомогою методу Фаедо-Гальоркіна можна довести розв'язність диференціально-операторних рівнянь з некоерцитивними нелінійними відображеннями псевдомонотонного типу. Таким чином, для широкого класу еволюційних задач, зокрема, для рівнянь гідродинамічного типу, можна встановити розв'язність та апріорні оцінки для розв'язків.

1. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. - М., 1978 2. *Дубинский Ю.А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения// Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. - М.:ВИНИТИ. - 1976. - №9. - С. 5-130. 3. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. - К., 1999. 4. *Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н.*Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. - К., 2004. 5. *Иваненко В.И., Мельник В.С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. – К., 1988. 6. *Капустян А.В.* Глобальные аттракторы неавтономного уравнения реакции-диффузии // Дифференциальные уравнения. - 2002. - Vol. 38, № 10. - С. 1378-1382. 7. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. - М., 1972. 8. *Мельник В.С.* Об операторных включениях в банаховых пространствах с плотно определенными операторами // Системні дослідження та інформаційні технології. - 2003. - № 3. - С. 120-126. 9. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. - М., 1990. 10. *Brezis H.* Perturbation non lineaire d'operateurs maximaux monotones // C.R. Acad. Sci. Paris. – 1969. – Vol. 269. - P. 566-569. 11. *Groger K.* Zum Galerkin. Verfanhren fur Evolutions qleichungen. Theory of Nonlinear operators . - Proceedings of a summer-school, held in October 1972 at Neuendorf (Hiddensee). - GDR. Berlin: Akademie - Verlag, 1974. - P. 85-104. 12. *Kapustyan A.V., Melnik V.S., Valero J.* Attractors of multivalued dynamical processes generated by phase-field equations // International Journal of Bifurcation and Chaos. - 2003. - Vol. 13, № 7. - P. 1969-1983. 13. *Kasyanov P.O., Melnik V.S., Yasinsky V.V.* Evolution inclusions and inequalities in Banach spaces with W_λ -pseudomonotone maps. – K., 2007. 14. *Kartsatos A.G., Scrypnik I.V.* Topological degree theories for densely defined mappings involving operator of type // Adv. Differential Equations. - 1999. - № 4. - P. 413-456. 15. *Melnik V. S.,Vakulenko A.N.* Topological methods in the theory of operator inclusions with densely defined mappings in Banach spaces // Nonlinear Boundary Valued Problems. - 1999. - Vol. 10 . - P. 132-145.

Надійшла до редколегії 01.10.2007

УДК 517.98

Ю. Єльченко, студ., А.Чайковський канд. фіз.-мат. наук
E-mail: ChaikovskiyAV@ukr.net

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ЗІ ЗСУВОМ АРГУМЕНТУ В ПРОСТОРІ l_2 У ВИПАДКУ ВИРОДЖЕНОГО ОПЕРАТОРНОГО КОЕФІЦІЄНТА

Наведено достатні умови розв'язності однорідного диференціального рівняння зі зсувом аргументу у просторі l_2 у випадку необмеженого оператора блочного вигляду з довільним розташуванням спектра.

The sufficient conditions for solvability of homogeneous differential equation with argument's displacement in the l_2 space in the case of unbounded operator coefficient with block structure with any specter are given.

1. Вступ.

В цій роботі розглядається лінійне однорідне диференціальне рівняння з одним запізненням аргументу на осі

$$x'(t) = Ax(t-1),\ t \in \mathbf{R}, \qquad (1)$$

відносно неперервно диференційовної функції зі значеннями в просторі l_2, яка зростає повільніше довільної експоненти.

У випадку, коли $A \in L(B)$ і $\sigma(A) \cap \{ite^{it} \mid t \in \mathbf{R}\} = \varnothing$ відомо, що це рівняння має лише тривіальний розв'язок. Якщо ця умова не виконується, задача відшукання розв'язку суттєво ускладнюється. В роботі Чайковського А.В. [1] такі розв'язки знайдені за умов певного розташування спектра.

В той же час при застосуванні цієї теорії до розв'язання нескінченних систем диференціальних рівнянь (див., наприклад, [2,3]), виникають необмежені матричні оператори, спектр яких не задовольняє знайдені умови. Мета цієї роботи – знаходження розв'язків рівняння (1) для деяких класів необмежених матричних операторів у просторі l_2.

2. Постановка задачі. Нехай $(B, \|\cdot\|)$ – комплексний банахів простір. Розглянемо диференціальне рівняння (1), де $A : B \to B$ – лінійний оператор, $x \in C^1(\mathbf{R}, B)$ – шукана функція.

Для нього відомо [1], що якщо $A \in L(B)$, то спектр оператора A складається з трьох замкнених частин $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, де σ_1 не перетинається з подвійною спіраллю $\{ite^{it} \mid t \in \mathbf{R}\}$, σ_2 лежить на цій спіралі, але не містить її точок самоперетину: $(-1)^{k+1}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, σ_3 складається лише з точок самоперетину, то розв'язок, що зростає повільніше довільної експоненти, тобто $x \in C_E(\mathbf{R}, B) := \left\{x \in C^1(\mathbf{R}, B) \mid \forall r > 0 : \sup_{t \in \mathbf{R}} e^{-r|t|} \|x(t)\| < \infty\right\}$, має вигляд:

$$x(t) = e^{C_2 t} x_2 + e^{C_{31} t} x_{31} + e^{C_{32} t} x_{32}. \tag{2}$$

Якщо P_1, P_2, P_3 – проектори, що відповідають часинам спектра $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, $B_k = P_k B, k = 1,2,3,$ – підпростори простору B, причому B є їх прямою сумою, $A_2 = AP_2$, $A_3 = AP_3$ – оператори, що фактично діють у просторах B_2, B_3, то оператор $C_2 = f^{-1}(A_2)$, де $f(z) = ze^z$, f^{-1} – обернене відображення, що переводить окіл частин уявної осі в околи частин спіралі. Якщо ці частини спіралі є точками самоперетину, то в їх околі можна описати два різних "обернених" відображення: f_1^{-1} і f_2^{-1} (див. [1]). Тоді $C_{31} = f_1^{-1}(A_3)$, $C_{32} = f_2^{-1}(A_3)$, $x_2, x_{31}, x_{32} \in B$ – довільні сталі вектори.

Спробуємо отримати розв'язок рівняння (1), якщо спектр не обов'язково розпадається на вищезгадані частини для випадку простору $B = l_2$ за умови, що оператор A є нескінченною матрицею, що має блочну структуру. В цьому разі рівняння розпадається на нескінченну кількість рівнянь, які відповідають різним блокам. Кожне таке рівняння розглядається в скінченновимірному евклідовому просторі. Оператор A при цьому може бути необмеженим.

3. Дослідження прямої суми блоків 2x2

Розглянемо рівняння вигляду (1) в двовимірному просторі. Спектр оператора $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ складається з двох власних чисел λ_1, λ_2 (можливо, рівних). Нехай A зводиться до діагональної нормальної жорданової форми: $A = T\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}T^{-1}$, де $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді легко знайти матрицю переходу $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 - d & b \\ c & \lambda_2 - a \end{pmatrix}$. Розв'яжемо рівняння $A\bar{t} = \lambda_1 \bar{t}$ (тобто знайдемо власний підпростір, що відповідає числу λ_1). Отримаємо, що $T^{-1}\bar{t}$ – власний вектор матриці $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, що відповідає власному числу λ_1, тобто $T^{-1}\bar{t} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbf{C}$ $\Rightarrow$ $\bar{t} = kT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbf{C}$. Отже, шуканим власним підпростором для λ_1 є $B_1 = \left\{\bar{t} = kT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbf{C}\right\}$.

Аналогічно знаходимо власний підпростір для λ_2: $B_2 = \left\{\bar{t} = kT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbf{C}\right\}$.

Якщо тепер $A = T\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}T^{-1}$, то $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E$ (E – одинична матриця), отже кожен вектор простору $\mathbf{C}^2$ є власним.

Якщо ж A зводиться до вигляду $A = T\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}T^{-1}$, то можна знайти матрицю переходу $T_2 = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Але в цьому випадку простір не розбивається на два інваріантні підпростори.

Позначимо такі множини:

$C_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid z \neq ite^{it},\ t \in \mathbf{R}\}$ – точки поза спіраллю;

$C_2 = \{z = ite^{it} \mid t \in \mathbf{R},\ t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}\}$ – точки на спіралі, крім точок самоперетину;

$C_3 = \left\{ z = ite^{it} \mid t = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z} \right\}$ - точки самоперетину спіралі.

Тепер, використовуючи формулу (2), ми можемо записати розв'язки рівняння (1) в залежності від вигляду матриці $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ і від розташування точок спектру (тобто власних чисел λ_1, λ_2 матриці A).

1. Якщо $\lambda_1, \lambda_2 \in C_1$, то розв'язок $x(t) \equiv 0$.

2. Якщо $\sigma(A) = \{\lambda\}$ (тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ – одне власне число кратності 2) і $\lambda \in C_2$:

а) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, тоді $x(t) = e^{Kt}c_1$, де $K = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$– знаходиться після підстановки розв'язку в рівняння, $c_1 \in \mathbf{C}^2$, $\sigma e^{\sigma} = \lambda,\ \sigma \in i\mathbf{R}$, тобто $\sigma = f^{-1}(\lambda),\ f(z) = ze^z$. Таким чином, $x(t) = e^{\sigma t}c_1,\ c_1 \in \mathbf{C}^2$.

б) $A = T_2 \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T_2^{-1}$, $\lambda = \dfrac{a+d}{2},\ \sigma e^{\sigma} = \lambda$.

Після підстановки розв'язку $x(t) = e^{Kt}c_1$ отримаємо $A = Ke^K$. Легко перевірити, що K не може мати діагональну нормальну жорданову форму. Тому $K = S \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} S^{-1}$, де S – деяка невироджена матриця, що зводить K до жорданової нормальної форми. Маємо:

$$Ke^K = S \begin{pmatrix} \sigma e^{\sigma} & (\sigma+1)e^{\sigma} \\ 0 & \sigma e^{\sigma} \end{pmatrix} S^{-1} = T_2 \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T_2^{-1},$$

Оскільки $\begin{pmatrix} \sigma e^{\sigma} & (\sigma+1)e^{\sigma} \\ 0 & \sigma e^{\sigma} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \sigma e^{\sigma} & 1 \\ 0 & \sigma e^{\sigma} \end{pmatrix} M^{-1}$, де $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(\sigma+1)e^{\sigma}} \end{pmatrix}$, то $SM \begin{pmatrix} \sigma e^{\sigma} & 1 \\ 0 & \sigma e^{\sigma} \end{pmatrix} M^{-1}S^{-1} = T_2 \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T_2^{-1}$, можна взяти $SM = T_2$, тобто $S = T_2M^{-1}$.

Тож $K = T_2M^{-1} \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} MT_2^{-1}$. Остаточно розв'язок запишеться у вигляді: $x(t) = T_2M^{-1} \begin{pmatrix} e^{\sigma t} & te^{\sigma t} \\ 0 & e^{\sigma t} \end{pmatrix} MT_2^{-1}c = e^{\sigma t}D(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},\ c_1, c_2 \in \mathbf{C},$

де позначено $D(t) := \begin{pmatrix} \dfrac{a-d}{2}t\dfrac{1}{(\sigma+1)e^{\sigma}} + 1 & -\left(\dfrac{a-d}{2}\right)^2 t\dfrac{1}{c(\sigma+1)e^{\sigma}} \\ \dfrac{ct}{(\sigma+1)e^{\sigma}} & \dfrac{t(d-a)}{2}\dfrac{1}{(\sigma+1)e^{\sigma}} + 1 \end{pmatrix}$.

3. Якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in C_2$, тоді $A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{-1}$ і розв'язок

$$x(t) = e^{K_1t}c_1 + e^{K_2t}c_2 = \left| c_1 \in B_1, c_2 \in B_2 \right| = T \begin{pmatrix} e^{\sigma_1 t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}k_1T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{\sigma_2 t} \end{pmatrix} T^{-1}k_2T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= k_1T \begin{pmatrix} e^{\sigma_1 t} \\ 0 \end{pmatrix} + k_2T \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\sigma_2 t} \end{pmatrix} = k_1e^{\sigma_1 t}T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2e^{\sigma_2 t}T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ k.k_2 \in \mathbf{C}.$$

4. Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in C_3$, то $x(t) = e^{K_1t}c_1 + e^{K_2t}c_2$. Можливі випадки зведення A:

а) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, в цьому випадку «обернені» відображення переводить точку λ самоперетину спіралі у дві точки уявної осі $\sigma_1 = f_1^{-1}(\lambda),\ \sigma_2 = f_2^{-1}(\lambda)$.

Підстановкою загального розвязку в (1) можна знайти загальний вигляд операторів K_1, K_2.

$$K_1e^{K_1} = \begin{pmatrix} \sigma_1e^{\sigma_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_2e^{\sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ K_2e^{K_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2e^{\sigma_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1e^{\sigma_1} \end{pmatrix}.$$

$$x(t)=e^{\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}t}\begin{pmatrix}k\\0\end{pmatrix}+e^{\begin{pmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}t}\begin{pmatrix}l\\0\end{pmatrix}+e^{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \sigma_1\end{pmatrix}t}\begin{pmatrix}0\\m\end{pmatrix}+e^{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}t}\begin{pmatrix}0\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ke^{\sigma_1 t}+le^{\sigma_2 t}\\ me^{\sigma_1 t}+ne^{\sigma_2 t}\end{pmatrix},\ k,l,m,n\in\mathbf{C}.$$

б) Якщо $A=T_2\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}T_2^{-1}$, $x(t)=e^{K_1 t}c_1+e^{K_2 t}c_2$. K_1,K_2 не можуть мати діагональної нормальної жорданової форми, тому $K_1=S\begin{pmatrix}\sigma_1 & 1\\ 0 & \sigma_1\end{pmatrix}S^{-1}$, $K_2=V\begin{pmatrix}\sigma_2 & 1\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}V^{-1}$, $\lambda=\sigma_1 e^{\sigma_1}=\sigma_2 e^{\sigma_2}$.

Після підстановки маємо $K_1 e^{K_1}=A$, і $K_1=T_2M_1^{-1}\begin{pmatrix}\sigma_1 & 1\\ 0 & \sigma_1\end{pmatrix}M_1T_2^{-1},\ K_2=T_2M_2^{-1}\begin{pmatrix}\sigma_2 & 1\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}M_2T_2^{-1}$, де матриця M вводилася в пункті 2) для σ, а M_1,M_2 –аналогічні матриці для σ_1,σ_2. Розв'язок :

$$x(t)=T_2M_1^{-1}\begin{pmatrix}e^{\sigma_1 t} & te^{\sigma_1 t}\\ 0 & e^{\sigma_1 t}\end{pmatrix}M_1T_2^{-1}c_1+T_2M_2^{-1}\begin{pmatrix}e^{\sigma_2 t} & te^{\sigma_2 t}\\ 0 & e^{\sigma_2 t}\end{pmatrix}M_2T_2^{-1}c_2=e^{\sigma_1 t}D_1(t)c_1+e^{\sigma_2 t}D_2(t)c_2,\ c_1,c_2\in\mathbf{C}^2.$$

5. Нехай $\lambda_1\neq\lambda_2,\ \lambda_1\in C_2,\ \lambda_2\in C_3$ і $A=T\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}T^{-1}$. Тоді $x(t)=ke^{\sigma t}T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\left(le^{\sigma_1 t}+me^{\sigma_2 t}\right)T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ k,l,m\in\mathbf{C}$.

6. Нехай $\lambda_1\neq\lambda_2,\ \lambda_1,\lambda_2\in C_3$. Тоді, якщо σ_1,σ_2 відповідають числу λ_1, σ_3,σ_4 – числу λ_2,то розв'язком буде :

$$x(t)=\left(ke^{\sigma_1 t}+le^{\sigma_2 t}\right)T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\left(me^{\sigma_3 t}+ne^{\sigma_4 t}\right)T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ k,l,m,n\in\mathbf{C}.$$

7. Якщо $\lambda_1\neq\lambda_2,\ \lambda_1\in C_1,\ \lambda_2\in C_2$, то $x(t)=ke^{\sigma t}T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ k\in\mathbf{C}$.

8. Якщо $\lambda_1\neq\lambda_2,\ \lambda_1\in C_1,\ \lambda_2\in C_3$, то $x(t)=\left(ke^{\sigma_1 t}+le^{\sigma_2 t}\right)T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ k,l\in\mathbf{C}$.

Пункти 1)-8) – повністю вичерпують усі можливі випадки вигляду розв'язку диференціального рівняння (1) у двовимірному евклідовому просторі в залежності від матриці A.

Нижче будемо оцінювати одержані розв'язки, щоб отримати умови, при яких рівняння (1) уже в просторі l_2 має розв'язок. Для цього потрібні допоміжні леми.

Лема 1. Нехай матриця A в комплексному евклідовому просторі $\mathbf{C}^2$ має вигляд $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\ a,b,c,d\in\mathbf{C}$. Тоді норма

$$\|A\|=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2+\sqrt{(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2)^2+8\operatorname{Re}(ad\overline{cb})-4|ad|^2-4|cb|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

.

Доведення. Потрібно скористатись формулою $\|A\|=\sqrt{\|AA^*\|}=\sqrt{r(AA^*)}$, де $r(AA^*)$ – спектральний радіус відповідного оператора, який можна підрахувати, знайшовши власні числа матриці.

Лема 2. Нехай $\sigma_1,\sigma_2\in i\mathbf{R}$ (тобто лежать на уявній осі), $a,b\in\mathbf{C}$. Тоді

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\left|ae^{\sigma_1 t}+be^{\sigma_2 t}\right|=|a|+|b|. \tag{4}$$

Доведення можна отримати, дослідивши функцію $\left|ae^{\sigma_1 t}+be^{\sigma_2 t}\right|$ на екстремум по t методами диференціального числення.

Використовуючи формулу (3), можна отримати норми матриць $D(t),D_1(t),D_2(t)$.

Тепер оцінимо зверху норми розв'язків, одержаних в пунктах 1)–8).

1) $\|x(t)\|=0=:\psi_1(t)\equiv\psi_1$;

2) а) $\|x(t)\|\le\sup\limits_{t\in\mathbf{R}}\left|e^{\sigma t}\right|\cdot\|c_1\|=\|c_1\|=\psi_2(t)\equiv\psi_2$;

2) б) $\forall t\in\mathbf{R}$: $\|x(t)\|=\left\|e^{\sigma t}D(t)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\right\|\le\sup\limits_{t\in\mathbf{R}}\left|e^{\sigma t}\right|\cdot\|D(t)\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\right\|=:\psi_3(t)$;

3) $\|x(t)\| = \left\| k_1 e^{\sigma_1 t} T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 e^{\sigma_2 t} T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} k_1 e^{\sigma_1 t}(\lambda_1 - d) + k_2 e^{\sigma_2 t} b \\ k_1 e^{\sigma_1 t} c + k_2 e^{\sigma_2 t}(\lambda_2 - a) \end{pmatrix} \right\| =$

$$= \sqrt{\left\| k_1 e^{\sigma_1 t}(\lambda_1 - d) + k_2 e^{\sigma_2 t} b \right\|^2 + \left\| k_1 e^{\sigma_1 t} c + k_2 e^{\sigma_2 t}(\lambda_2 - a) \right\|^2} \le$$

$$\le \sqrt{(|k_1(\lambda_1 - d)| + |k_2 b|)^2 + (|k_1 c| + |k_2(\lambda_2 - a)|)^2} =: \psi_4(t) \equiv \psi_4 ;$$

4) а) Аналогічно знаходимо :

$$\|x(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} k e^{\sigma_1 t} + l e^{\sigma_2 t} \\ m e^{\sigma_1 t} + n e^{\sigma_2 t} \end{pmatrix} \right\| \le \sqrt{(|k| + |l|)^2 + (|m| + |n|)^2} =: \psi_5(t) \equiv \psi_5 ;$$

4) б) $\forall t \in \mathbf{R}$: $\|x(t)\| = \left\| e^{\sigma_1 t} D_1 c_1 + e^{\sigma_2 t} D_2 c_2 \right\| \le \|D_1\| \cdot \|c_1\| + \|D_2\| \cdot \|c_2\| =: \psi_6(t)$;

5) $\|x(t)\| = \left\| k e^{\sigma t} T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(l e^{\sigma_1 t} + m e^{\sigma_2 t} \right) T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} k e^{\sigma t}(\lambda_1 - d) + (l e^{\sigma_1 t} + m e^{\sigma_2 t}) b \\ k e^{\sigma t} c + (l e^{\sigma_1 t} + m e^{\sigma_2 t})(\lambda_2 - a) \end{pmatrix} \right\| =$

$$(|k(\lambda_1 - d)| + |lb| + |mb|)^2 + (|kc| + |l(\lambda_2 - a)| + |m(\lambda_2 - a)|)^2)^{\frac{1}{2}} =: \psi_7(t) \equiv \psi_7 ;$$

6) $\|x(t)\| = \left\| \left(k e^{\sigma_1 t} + l e^{\sigma_2 t} \right) T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(m e^{\sigma_3 t} + n e^{\sigma_4 t} \right) T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \le$

$$\le (|k(\lambda_1 - d)| + |l(\lambda_1 - d)| + |mb| + |nb|)^2 + (|kc| + |lc| + |m(\lambda_2 - a)| + |n(\lambda_2 - a)|)^2)^{\frac{1}{2}} =: \psi_8(t) \equiv \psi_8 ;$$

7) $\|x(t)\| = \left\| k e^{\sigma t} T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \le \sqrt{|kb|^2 + |k(\lambda_2 - a)|^2} =: \psi_9(t) \equiv \psi_9$;

8) $\|x(t)\| = \left\| \left(k e^{\sigma_1 t} + l e^{\sigma_2 t} \right) T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \le \sqrt{(|kb| + |lb|)^2 + (|k(\lambda_2 - a)| + |l(\lambda \ \ - a)|)^2} =: \psi_{10}(t) \equiv \psi_{10}$.

Зауваження. Лема 2 показує, що використані оцінки лінійних комбінацій двох експонент є точними.

Перейдемо тепер до рівняння (1) в просторі l_2 .Оператор A матиме вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5)$$

Двовимірні блоки $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ матриці (5) відповідають розглядуваним вище матрицям 2х2. Двовимірний розв'язок $x_N(t)$ для N-того блоку визначаються формулами з пунктів 1)–8) і $\forall t \in \mathbf{R} : \|x_N(t)\| \le \psi_{i(N)}(t)$, $\|A_N x_N(t)\| \le \|A_N\| \psi_{i(N)}(t),\ i = i(N) \in \{1,...,10\}$, і обирається в залежності від вигляду N-того блоку. Введемо перепозначення: $\tilde{x}_N(t) = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & (x_N(t), \bar{e}_1) & (x_N(t), \bar{e}_2) & 0 & ... \end{pmatrix}^t$, де $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ –вектори базису в двовимірному просторі. Тоді можемо записати формальний ряд, який може збігатися до розвязку рівняння (1) :

$$x(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \tilde{x}_N(t) \quad (6)$$

Використовуючи подані вище позначення , сформулюємо таку теорему:

Теорема 1. Нехай оператор A має вигляд (5). Тоді:

1) Кожен розв'язок рівняння (1), що зростає повільніше довільної експоненти, має вигляд (6).
2) Якщо

$$\forall t \in \mathbf{R} : \sum_{N=1}^{\infty} \|A_N\|^2 \psi_{i(N)}^2(t) < \infty \ , \ \sum_{N=1}^{\infty} \psi_{i(N)}^2(t) < \infty ,$$

причому ряди рівномірно збіжні на кожному відрізку, а другий ряд має суму, що зростає повільніше довільної експоненти, тоді ряд (6) є розв'язком рівняння (1) в класі $C_E(\mathbf{R}, B)$ функцій, що зростають повільніше довільної експоненти.

3) Якщо в матриці A немає блоків вигляду 2)б) та 4)б) і

$$\sum_{N=1}^{\infty}\left\|A_N\right\|^2 \psi_{i(N)}^2 < \infty \;, \quad \sum_{N=1}^{\infty}\psi_{i(N)}^2 < \infty \,,$$

тоді ряд (6) збігається в l_2 до обмеженого розв'язку рівняння (1).

Доведення. Пункт 1 випливає з наведених вище міркувань, якщо діяти на рівняння (1) проекторами на відповідні двовимірні підпростори. Пункт 2 з наведених вище міркувань, рівності Парсеваля : $\left\|x(t)\right\|^2 = \sum_{N=1}^{\infty}\left\|\tilde{x}_N(t)\right\|^2$ і неперервності функцій x та Ax , що випливають з рівномірної збіжності рядів.

4.Дослідження прямої суми блоків n x n.

Далі будемо розглядати рівняння (1), де матриця A – нескінченна і має блочну структуру з блоків різної (скінченної) розмірності.

Всі міркування з попереднього розділу можна перенести на цей випадок. Розглянемо N -тий n -вимірний блок A_N , його власні числа $\left\{\lambda_1,...,\lambda_n\right\}$ можна визначити з характеристичного рівняння $\det(A_N - \lambda E) = 0$.

Зведемо A_N до нормальної жорданової форми. Нехай T – матриця переходу. Простір $\mathbf{C}^n$ розбивається в пряму суму інваріантних підпросторів, що відповідають клітинам Жордана. Розв'язок у цьому просторі буде сумою розв'язків, що відповідають різним клітинам. Міркуючи аналогічно попередньому пункту, можна встановити вигляд розв'язку для кожного випадку.

1) Якщо власне число, що відповідає клітині Жордана, лежить у множині C_1 , то розв'язок для цієї клітини нульовий.

2) Якщо клітина Жордана одновимірна, то у випадку власного числа $\lambda \in C_2$ маємо розв'язок $ke^{\sigma t}T\mathbf{e},\ k\in\mathbf{C},\ \sigma = f^{-1}\left(\lambda\right),\ \mathbf{e} = \left(0,,,.0,1,0,...,0\right),$ де положення одиниці залежить від розташування клітини в матриці, а у випадку $\lambda \in C_3$ маємо розв'язок $\left(k_1e^{\sigma_1 t} + k_2e^{\sigma_2 t}\right)T\mathbf{e},\ k\in\mathbf{C},\ \sigma_1 = f_1^{-1}\left(\lambda\right), \sigma_2 = f_2^{-1}\left(\lambda\right),\ \mathbf{e} = \left(0,,,.0,1,0,...,0\right)$.

3) Якщо клітина Жордана U більш ніж одновимірна і $\lambda \in C_2$, то знаходимо матрицю M з умови $Ue^U = MZM^{-1}$, де Z – нормальна жорданова форма для матриці Ue^U . Позначимо через $G\left(t\right)$ матрицю розміру $n\times n$, у якої на тому місці, на якому досліджувана клітина Жордана розташована в A_N стоїть матриця $M^{-1}e^{U_0 t}M$, де U_0 – клітина Жордана тої ж розмірності, що й U , яка відповідає числу $\sigma = f^{-1}\left(\lambda\right)$, а всі інші клітини заповнені нулями. Тоді маємо $x\left(t\right) = TG\left(t\right)T^{-1}c,\ c\in\mathbf{C}^n$. У випадку $\lambda\in C_3$ всі міркування залишаються правильними, крім того, що маємо два доданки, що відповідають числам $\sigma_1 = f_1^{-1}\left(\lambda\right),\ \sigma_2 = f_2^{-1}\left(\lambda\right)$.

n -вимірний розв'язок $x_N\left(t\right)$ для N -того блоку визначається наведеними формулами і $\forall t\in\mathbf{R}: \left\|x_N(t)\right\| \le \psi_{i(N)}(t)$, $\left\|A_N x_N(t)\right\| \le \left\|A_N\right\|\psi_{i(N)}(t),\ i = i\left(N\right)$, і обирається в залежності від вигляду N -того блоку. Введемо перепозначення:

$$\tilde{x}_N(t) = \begin{pmatrix}0 & ... & 0 & (x_N(t),\bar{e}_1) & ... & (x_N(t),\bar{e}_n) & 0 & ...\end{pmatrix}^t,\ \text{де}\ \bar{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},...,\bar{e}_n = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$ – вектори базису в n -вимірному просторі. Тоді можемо записати формальний ряд, який може збігатися до розвязку рівняння (1) :

$$x\left(t\right) = \sum_{N=1}^{\infty}\tilde{x}_N(t) \tag{7}$$

Використовуючи подані вище позначення , сформулюємо таку теорему:

Теорема 2. Нехай оператор A має блочно-діагональний вигляд. Тоді:

1) Кожен розв'язок рівняння (1), що зростає повільніше довільної експоненти, має вигляд (7).

2) Якщо $\forall t\in\mathbf{R}$: $\sum_{N=1}^{\infty}\left\|A_N\right\|^2\psi_{i(N)}^2(t) < \infty$, $\sum_{N=1}^{\infty}\psi_{i(N)}^2(t) < \infty$,

причому ряди рівномірно збіжні на кожному відрізку, а другий ряд має суму, що зростає повільніше довільної експоненти, тоді ряд (6) є розв'язком рівняння (1) в класі $C_E\left(\mathbf{R},B\right)$ функцій, що зростають повільніше довільної експоненти.

3) Якщо в матриці A немає блоків, описаних у випадку 3) і

$$\sum_{N=1}^{\infty}\left\|A_N\right\|^2 \psi_{i(N)}^2 < \infty \;, \quad \sum_{N=1}^{\infty}\psi_{i(N)}^2 < \infty \,,$$

тоді ряд (7) збігається в l_2 до обмеженого розв'язку рівняння (1).

Доведення аналогічне доведенню теореми 1.

5. Висновки

В роботі розглянуті диференціальні рівняння зі зсувом аргументу в просторі l_2 для випадку вироджених необмежених операторних коефіцієнтів, спектр яких може досить загальним чином перетинати подвійну спіраль $\left\{ite^{it} \mid t \in \mathbf{R}\right\}$. В цьому випадку не виконується умова існування та єдиності розв'язків. Проте у випадку операторів блочної структури в просторі l_2 вдалося знайти умови, за яких існують розв'язки, що зростають повільніше довільної експоненти та явно виписати ці розв'язки для випадку двовимірних блоків.

1. *Чайковський А.В.* Дослідження одного лінійного диференціального рівняння за допомогою узагальнених функцій зі значеннями у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2001. – 53, №5, С. 688-693. 2. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. 3. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – М., 1960.

Надійшла до редколегії 22.09.2007

УДК 517.9

О. Кічмаренко, канд.фіз.-мат.наук, Н. Скрипник, канд.фіз.-мат.наук
E-mail: k-olga@paco.net E-mail: talie@ukr.net

НЕЧІТКІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЗАПІЗНЕННЯМ

Для нечітких диференціальних рівнянь з запізненням доведено теореми існування та єдиності розв'язку, неперервної залежності від початкових функцій. Розглянуто питання обґрунтування схеми часткового усереднення на скінченому проміжку для систем з постійним та асимптотично великим запізненням.

For the fuzzy differential equations with delay theorems of existence and uniqueness of the solution, continuous dependence on initial functions are proved. The question of a substantiation of the scheme of partial averaging on a final interval for systems with constant and asymptotically big delay is considered.

1.Вступ.

Стаття L.A. Zadeh [16] в 1965 р. започаткувала розвиток теорії нечітких множин. В 1983 р. M.L. Puri та D.A. Ralescu [12] ввели поняття H–похідної та інтегралу від нечітких відображень, в якому використовувався підхід M. Hukuhara [6]. В 1987 р. O. Kaleva [7] розглянув нечіткі диференціальні рівняння та довів теорему існування та єдиності для випадку, коли права частина задовольняє умові Ліпшиця. В подальшому нечіткі диференціальні рівняння розглядались в роботах [2,8 - 11,14,15].

2. Основні означення і поняття.

Нехай $conv(R^n)$ – метричний простір непустих компактних опуклих підмножин R^n. Метрика в цьому просторі визначається за допомогою відстані Хаусдорфа

$$h(F,G) = \max\{\sup_{f\in F}\inf_{g\in G} \| f-g \|, \sup_{g\in G}\inf_{f\in F} \| f-g \|\},$$

де під $\|\cdot\|$ розуміється норма в просторі R^n.

Введемо до розгляду простір E^n відображень $u: R^n \to [0,1]$, що задовольняють наступним умовам:

1) u - модальне відображення, тобто існує вектор $x_0 \in R^n$ такий, що $u(x_0) = 1$;

2) u - нечітко опукле відображення, тобто для довільних $x, y \in R^n$ та довільного $\lambda \in [0,1]$ виконується нерівність $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \min\{u(x), u(y)\}$;

3) u - відображення, напівнеперервне зверху;

4) замикання множини $\{x \in R^n : u(x) > 0\}$ є компактним.

Означення 1. α–зрізкою $[u]^\alpha$ відображення $u \in E^n$ при $0 < \alpha \le 1$ назвемо множину $\{x \in R^n : u(x) \ge \alpha\}$. Нульовою зрізкою відображення $u \in E^n$ назвемо замикання множини $\{x \in R^n : u(x) > 0\}$.

Теорема 1 [11]. Якщо $u \in E^n$, то

1^0 $[u]^\alpha \in conv(R^n)$ для всіх $0 \le \alpha \le 1$;

2^0 $[u]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1}$ для всіх $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le 1$;

3^0 якщо $\{\alpha_k\} \subset [0,1]$ – неспадна послідовність, що збігається до $\alpha > 0$, то $[u]^\alpha = \bigcap_{k\ge 1} [u]^{\alpha_k}$.

Навпаки, якщо $\{A^\alpha : 0 \le \alpha \le 1\}$ – сімейство підмножин R^n, що задовольняють умовам 1^0 - 3^0, то існує $u \in E^n$ таке, що $[u]^\alpha = A^\alpha$ для $0 < \alpha \le 1$ та $[u]^0 = \overline{\bigcup_{0<\alpha\le 1} A^\alpha} \subset A^0$.

Визначимо в просторі E^n метрику $D: E^n \times E^n \to [0,+\infty)$, покладаючи $D(u,v) = \sup_{0\le\alpha\le 1} h([u]^\alpha, [v]^\alpha)$.

Нехай I – проміжок в R.

Означення 2 [11]. Відображення $F: I \to E^n$ називається сильно вимірним на I, якщо для всіх $\alpha \in [0,1]$ многозначне відображення $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$ вимірне.

Означення 3 [11]. Відображення $F: I \to E^n$ називається інтегрально обмеженим на I, якщо існує інтегрована за Лебегом функція $k(t)$ така, що $\|x\| \le k(t)$ для всіх $x \in F_0(t)$.

Означення 4 [11]. Інтегралом від відображення $F: I \to E^n$ по множині I називається елемент $G \in E^n$ такий, що $[G]^\alpha = \int_I F_\alpha(t)dt$ для всіх $0 < \alpha \le 1$, де інтеграл від многозначного відображення $F_\alpha(t)$ є інтегралом Ауманна [5].

Теорема 2 [11]. Якщо відображення $F: I \to E^n$ сильно вимірне та інтегрально обмежене, то F інтегроване на I.

Теорема 3 [11]. Нехай $F, G: I \to E^n$ інтегровані на I та $\lambda \in R$. Тоді

1) $\int_I (F(t) + G(t))dt = \int_I F(t)dt + \int_I G(t)dt$;

2) $\int_I \lambda F(t)dt = \lambda \int_I F(t)dt$;

3) функція $D(F(t), G(t))$ інтегрована за Лебегом на I;

4) $D\left(\int_I F(t)dt, \int_I G(t)dt\right) \le \int_I D(F(t), G(t))dt$.

Означення 5 [11]. Відображення $F: I \to E^n$ називається диференційованим в точці $t_0 \in I$, якщо для всіх $\alpha \in [0,1]$ многозначне відображення $F_\alpha(t)$ диференційоване за Хукухарою [6] в точці t_0, його похідна дорівнює $D_H F_\alpha(t_0)$ та сімейство множин $\{D_H F_\alpha(t_0) : \alpha \in [0,1]\}$ визначає елемент $F'(t_0) \in E^n$.

Якщо відображення $F: I \to E^n$ диференційоване в точці $t_0 \in I$, то $F'(t_0)$ називається нечіткою похідною відображення $F(t)$ в точці t_0.

Теорема 4 [11]. Нехай відображення $F: I \to E^n$ диференційоване та припустимо, що його нечітка похідна $F': I \to E^n$ інтегрована на I. Тоді для довільного $t \in I$ маємо $F(t) = F(t_0) + \int_{t_0}^{t} F'(s)ds$.

Означення 5 [11]. Відображення $F: I \to E^n$ називається слабо неперервним в точці $t_0 \in I$, якщо для довільного фіксованого $\alpha \in [0,1]$ та довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon, \alpha) > 0$ таке, що $h(F_\alpha(t), F_\alpha(t_0)) < \varepsilon$ для всіх $t \in I$ таких, що $|t - t_0| < \delta(\varepsilon, \alpha)$.

Означення 6. Відображення $F: I \times E^n \times \ldots \times E^n \to E^n$ називається слабо неперервним в точці $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{m0}) \in I \times E^n \times \ldots \times E^n$, якщо для довільного фіксованого $\alpha \in [0,1]$ та довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon, \alpha) > 0$ таке, що $h([F(t, x_1, \ldots, x_m)]^\alpha, [F(t_0, x_{10}, \ldots, x_{m0})]^\alpha) < \varepsilon$ для всіх $t \in I$, $x_i \in E^n$ таких, що $|t - t_0| < \delta(\varepsilon, \alpha)$ та $h([x_i]^\alpha, [x_{i0}]^\alpha) < \delta(\varepsilon, \alpha)$, $i = \overline{1, m}$.

Означення 7. Кажуть, що відображення $F: I \times E^n \times \ldots \times E^n \to E^n$ задовольняє умові Ліпшиця за змінними $x_1, \ldots, x_m$, якщо існує стала $L > 0$ така, що для довільної пари $(t, x_1, \ldots, x_m), (t, y_1, \ldots, y_m) \in I \times E^n \times \ldots \times E^n$ та всіх $\alpha \in [0,1]$ виконується нерівність $h\left([F(t, x_1, \ldots, x_m)]^\alpha, [F(t, y_1, \ldots, y_m)]^\alpha\right) \le L \sum_{i=1}^{m} h\left([x_i]^\alpha, [y_i]^\alpha\right)$.

Зрозуміло, що якщо відображення $F: I \times E^n \times \ldots \times E^n \to E^n$ задовольняє умові Ліпшиця за змінними $x_1, \ldots, x_m$ зі сталою $L > 0$, то для довільної пари $(t, x_1, \ldots, x_m), (t, y_1, \ldots, y_m) \in I \times E^n \times \ldots \times E^n$ виконується нерівність

$$D(F(t, x_1, \ldots, x_m), F(t, y_1, \ldots, y_m)) \le L \sum_{i=1}^{m} D(x_i, y_i).$$

Позначимо через

$$I_0 = [t_0, T],\ B(x_0, b) = \{x \in E^n : D(x, x_0) \le b\},\ J_0 = I_0 \times B(x_0, b).$$

Розглянемо нечітке диференціальне рівняння

$$x' = f(t, x), x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

де $f: J_0 \to E^n$ – слабо неперервне відображення.

Означення 8 [11]. Відображення $x: [t_0, t_1] \to E^n, t_1 \le T$ називається розв'язком задачі (1), якщо воно є слабо неперервним та для всіх $t \in [t_0, t_1]$ задовольняє інтегральному рівнянню $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$.

Теорема 5 [9]. Припустимо, що відображення $f: J_0 \to E^n$ є слабо неперервним та задовольняє умові Ліпшиця по x. Тоді існує єдиний розв'язок $x = x(t)$ задачі (1), визначений на проміжку $[t_0, t_0 + \delta]$, де

$\delta = \min\left\{T - t_0, \frac{b}{M}\right\}$, $M = \sup\limits_{(t,x)\in J_0} D(f(t,x),\hat{0})$, $\hat{0} \in E^n$ таке, що $\hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in R^n \setminus 0 \end{cases}$.

3 Тереми існування, єдиності та неперервної залежності від початкових функцій розв'язку нечіткого диференціального рівняння із запізненням.

Розглянемо нечітке диференціальне рівняння із запізненням

$$x'(t) = F(t, x(t), x(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_m(t))), \qquad (2)$$
$$x(t) = \varphi(t), t \in E_{t_0},$$

де $E_{t_0} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} E_{t_0}^{(i)}$, $E_{t_0}^{(i)}$ – множини, що містять точку t_0 та ті значення $t - \tau_i(t)$, для яких $t - \tau_i(t) < t_0$ при $t \ge t_0$, $F : R \times E^n \times \ldots \times E^n \to E^n$, $\varphi : R \to E^n$.

Покажемо, що для рівняння (2) виконуються теореми існування, єдиності та неперервної залежності від початкових функцій, які є аналогічними до теорем для рівняння в просторі R^n [3, 4].

Теорема 6. Нехай F слабо неперервне відображення в околі точки $(t_0, \varphi(t_0), \varphi(t_0 - \tau_1(t_0)), \ldots, \varphi(t_0 - \tau_m(t_0)))$, що задовольняє умові Ліпшиця зі сталою λ по всім змінним, починаючи з другої; початкова функція $\varphi(t)$ слабо неперервна на E_{t_0}; всі функції $\tau_i(t)$ неперервні на $t_0 \le t \le t_0 + L$, $L > 0$ та невід'ємні. Тоді існує єдиний розв'язок $x(t)$ задачі (2) при $t_0 \le t \le t_0 + \sigma$, де σ достатньо мале.

Доведення. За означенням 8 розв'язку відображення $x(t)$ задовольняє інтегральному рівнянню

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s), x(s-\tau_1(s)), \ldots, x(s-\tau_m(s)))ds, t \in [t_0, t_0+\sigma], \qquad (3)$$
$$x(t) = \varphi(t), \ t \in E_{t_0}.$$

Введемо до розгляду оператор $A(x(t)) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s), x(s-\tau_1(s)), \ldots, x(s-\tau_m(s)))ds$, $t \in [t_0, t_0+\sigma]$,

$$A(x(t)) = x(t) = \varphi(t), \ t \in E_{t_0},$$

визначений в повному метричному просторі C_0 всіх слабо неперервних на $E_{t_0} \bigcup [t_0, t_0+\sigma]$ функцій таких, що на E_{t_0} всі ці функції співпадають з $\varphi(t)$, а на проміжку $[t_0, t_0+\sigma]$ відрізняються від $\varphi(t_0)$ не більше, ніж на величину $\eta > 0$ в метриці $\rho(x(t), y(t)) = \sup\limits_{[t_0, t_0+\sigma]} D(x(t), y(t))$.

Нехай стала $M > 0$ така, що $D(F(t, x(t), x(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_m(t))), \hat{0}) < M$ при $t \in [t_0, t_0+\sigma]$.

Функція $A(x(t))$ слабо неперервна на $E_{t_0} \bigcup [t_0, t_0+\sigma]$, так як на E_{t_0} функція $A(x(t))$ співпадає зі слабо неперервною функцією $\varphi(t)$, а на проміжку $[t_0, t_0+\sigma]$ для довільних двох точок t та t' маємо

$$D\big(A(x(t)), A(x(t'))\big) =$$
$$= D\Big(\varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s), x(s-\tau_1(s)), \ldots, x(s-\tau_m(s)))ds, \ \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t'} F(s, x(s), x(s-\tau_1(s)), \ldots, x(s-\tau_m(s)))ds\Big) < M \ |t - t'| .$$

На проміжку $[t_0, t_0+\sigma]$ функція $A(x(t))$ відрізняється від $\varphi(t_0)$ не більше, ніж на η в метриці ρ(□□), так як $D(A(x(t)), \varphi(t_0)) < M\sigma < \eta$ при $\sigma < \frac{\eta}{M}$. Таким чином, оператор A відображає простір C_0 в себе.

Крім того,

$$D(A(x(t)), A(y(t))) =$$
$$= D\Big(\varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s), x(s-\tau_1(s)), \ldots, x(s-\tau_m(s)))ds, \ \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s), y(s-\tau_1(s)), \ldots, y(s-\tau_m(s)))ds\Big) \le$$
$$\le \int_{t_0}^{t} D(F(s, x(s), x(s-\tau_1(s)), \ldots, x(s-\tau_m(s))), F(s, y(s), y(s-\tau_1(s)), \ldots, y(s-\tau_m(s))))ds \le$$
$$\le \lambda \int_{t_0}^{t} \left[D(x(s), y(s)) + \sum_{i=1}^{m} D(x(s-\tau_i(s)), y(s-\tau_i(s))) \right] ds \le \lambda\sigma(m+1)\rho(x(t), y(t))$$

при $t \in [t_0, t_0+\sigma]$ та $D(A(x(t)), A(y(t))) = 0$ при $t \in E_{t_0}$. Нехай $\sigma \le \frac{\beta}{(m+1)\lambda}$, де $0 < \beta < 1$, тоді оператор $A(x(t))$ є стискаючим.

Таким чином, для $\sigma \le \min\left\{\frac{\eta}{M}, \frac{\beta}{(m+1)\lambda}\right\}$ за теоремою Банаха [1] існує єдина нерухома точка оператора A, а значить і єдиний розв'язок рівняння (2), визначений на проміжку $t_0 \le t \le t_0 + \sigma$.

Теорема 7. Нехай виконані всі умови теореми 1 та початкові функції $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ такі, що $D(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \le \delta$, $\delta > 0$ для всіх $t \in E_{t_0}$. Тоді справедлива оцінка

$$D(x_1(t), x_2(t)) \le \delta e^{\lambda(m+1)(t-t_0)}, \quad t \ge t_0, \tag{4}$$

де $x_1(t)$ та $x_2(t)$ – розв'язки рівняння (2) з початковими функціями $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ відповідно, тобто розв'язки рівняння (2) неперервно залежать від початкових функцій.

Доведення. За означенням 8 розв'язку функції $x_1(t)$ та $x_2(t)$ задовольняють інтегральним рівнянням вигляду (3) з початковими функціями $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ відповідно. Тоді

$$D(x_1(t), x_2(t)) =$$

$$= D\Big(\varphi_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_1(s), x_1(s-\tau_1(s)), \ldots, x_1(s-\tau_m(s)))ds,\ \varphi_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_2(s), x_2(s-\tau_1(s)), \ldots, x_2(s-\tau_m(s)))ds\Big) \le$$

$$\le D(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) + D\Big(\int_{t_0}^{t} F(s, x_1(s), x_1(s-\tau_1(s)), \ldots, x_1(s-\tau_m(s)))ds,\ \int_{t_0}^{t} F(s, x_2(s), x_2(s-\tau_1(s)), \ldots, x_2(s-\tau_m(s)))ds\Big) \le$$

$$\le D(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) + \int_{t_0}^{t} D(F(s, x_1(s), x_1(s-\tau_1(s)), \ldots, x_1(s-\tau_m(s))), F(s, x_2(s), x_2(s-\tau_1(s)), \ldots, x_2(s-\tau_m(s))))ds \le$$

$$\le D(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[D(x_1(s), x_2(s)) + \sum_{i=1}^{m} D(x_1(s-\tau_i(s)), x_2(s-\tau_i(s))) \right] ds. \tag{5}$$

Позначимо $z(t) = \max\left\{\delta, \max\limits_{[t_0,t]} D(x_1(s), x_2(s))\right\}$. Тоді з (5) отримаємо

$$z(t) \le \delta + \lambda(m+1)\int_{t_0}^{t} z(s)ds. \tag{6}$$

З (6), використовуючи лему Гронуола - Белмана, отримуємо необхідну нерівність (4).

4. Усереднення нечітких диференціальних рівнянь з запізненням.

Розглянемо тепер питання обґрунтування схеми часткового усереднення для нечітких диференціальних рівнянь з запізненням вигляду

$$x'(t,\varepsilon) = \varepsilon F\big(t, x(t,\varepsilon), x(t-\tau,\varepsilon)\big), \tag{7}$$
$$x(s,\varepsilon) = \varphi(s,\varepsilon), \quad -\tau \le s \le 0,$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$, L – стала.

У відповідність рівнянню (7) поставимо наступне частково усереднене рівняння

$$y'(t,\varepsilon) = \varepsilon F^0\big(t, y(t,\varepsilon), y(t-\tau,\varepsilon)\big), \tag{8}$$
$$y(s,\varepsilon) = \varphi(s,\varepsilon), -\tau \le s \le 0,$$

де

$$\lim_{T\to\infty} D\left(\frac{1}{T}\int_0^T F^0(s,x,z)ds, \frac{1}{T}\int_0^T F(s,x,z)ds\right) = 0. \tag{9}$$

Теорема 8. Нехай в області $Q = \{t \ge 0; x, z \in Q' \subset E^n\}$ виконані наступні умови:

1) функції $F(t,x,z), F^0(t,x,z)$ та $\varphi(s,\varepsilon)$ задовольняють умовам теореми 6 та існує стала M така, що

$$D(F(t,x,z),\hat{0}) \le M, D(F^0(t,x,z),\hat{0}) \le M;$$

2) рівномірно відносно $x, z \in Q'$ існує границя (9);

3) розв'язок рівняння (8) існує при $0 < \varepsilon \le \sigma$ та належить Q' разом з деяким $\delta-$ околом для $t \in [0, L^*\varepsilon^{-1}]$, де L^* – додатна стала.

Тоді для довільних $\eta > 0$ та $0 < L \le L^*$ існує $0 < \varepsilon^0 \le \sigma$ таке, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ та $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедлива оцінка

$$D(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon)) \le \eta. \tag{10}$$

Доведення. Розглянемо допоміжне диференціальне рівняння

$$z'(t,\varepsilon) = \varepsilon F\big(t, z(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon)\big), \quad z(0,\varepsilon) = \varphi(0,\varepsilon). \tag{11}$$

За означенням 8 функції $x(t,\varepsilon)$ та $z(t,\varepsilon)$ при $t \ge 0$ задовольняють інтегральним рівнянням

$$x(t,\varepsilon) = \varphi(0,\varepsilon) + \int_0^t F(s, x(s,\varepsilon), x(s-\tau,\varepsilon))ds,$$

$$z(t,\varepsilon) = \varphi(0,\varepsilon) + \int_0^t F(s, z(s,\varepsilon), z(s,\varepsilon))ds.$$

Тоді

$$D\big(x(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon)\big) \le \varepsilon D\Big(\int_0^t F\big(s, x(s,\varepsilon), x(s-\tau,\varepsilon)\big)ds, \int_0^t F\big(s, z(s,\varepsilon), z(s,\varepsilon)\big)ds\Big). \tag{12}$$

При $t \in [0,\tau]$ приймаючи до уваги обмеженість функції $F(s,x,z)$, отримаємо

$$D\big(x(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon)\big) \le \varepsilon\Big[D\Big(\int_0^t F(s, x(s,\varepsilon), x(s-\tau,\varepsilon))ds, \hat{0}\Big) + D\Big(\int_0^t F(s, z(s,\varepsilon), z(s,\varepsilon))ds, \hat{0}\Big)\Big] \le 2\varepsilon M\tau. \tag{13}$$

При $t \in \left(\tau, L\varepsilon^{-1}\right]$ з (12) маємо

$$D\left(x\left(t,\varepsilon\right), z\left(t,\varepsilon\right)\right) \le$$

$$\le \varepsilon D\left(\int_0^t F\left(s, x\left(s,\varepsilon\right), x\left(s-\tau,\varepsilon\right)\right)ds, \int_0^t F\left(s, x\left(s,\varepsilon\right), x\left(s,\varepsilon\right)\right)ds\right) + \varepsilon D\left(\int_0^t F\left(s, x\left(s,\varepsilon\right), x\left(s,\varepsilon\right)\right)ds, \int_0^t F\left(s, z\left(s,\varepsilon\right), z\left(s,\varepsilon\right)\right)ds\right) \le$$

$$\le \varepsilon\lambda \int_0^t D\left(x\left(s-\tau,\varepsilon\right), x\left(s,\varepsilon\right)\right)ds + 2\varepsilon\lambda \int_0^t D\left(x\left(s,\varepsilon\right), z\left(s,\varepsilon\right)\right)ds. \quad (14)$$

Очевидно, що

$$\int_0^t D\left(x\left(s-\tau,\varepsilon\right), x\left(s,\varepsilon\right)\right)ds =$$

$$= \int_0^t D\left(x\left(s-\tau,\varepsilon\right), x\left(s-\tau,\varepsilon\right) + \varepsilon\int_{s-\tau}^s F(s_1, x(s_1,\varepsilon), x(s_1-\tau,\varepsilon))ds_1\right)ds \le \int_0^t \varepsilon M\tau ds \le M\tau L. \quad (15)$$

Тоді, використовуючи лему Гронуола - Белмана, з (14) отримуємо

$$D\left(x\left(t,\varepsilon\right), z\left(t,\varepsilon\right)\right) \le \varepsilon\lambda M\tau L e^{2\varepsilon\lambda t}. \quad (16)$$

Аналогічно для розв'язків рівняння (8) та рівняння

$$w'\left(t,\varepsilon\right) = \varepsilon F^0\left(t, w\left(t,\varepsilon\right), w\left(t,\varepsilon\right)\right), \quad w\left(0,\varepsilon\right) = \varphi\left(0,\varepsilon\right) \quad (17)$$

отримуємо

$$D\left(y\left(t,\varepsilon\right), w\left(t,\varepsilon\right)\right) \le \varepsilon\lambda M\tau L e^{2\varepsilon\lambda t}. \quad (18)$$

Рівняння (17) є частково усередненим для рівняння (11).

Для довільних η та $L \in \left(0, L^*\right]$ можна підібрати [2] $\varepsilon^1 \in \left[0,\sigma\right]$ таке, що для $\varepsilon \in \left(0,\varepsilon^1\right]$ та $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ справедлива наступна оцінка

$$D\left(w\left(t,\varepsilon\right), z\left(t,\varepsilon\right)\right) \le \frac{\eta}{2}. \quad (19)$$

З (13), (16), (18), (19) для $\varepsilon^0 = \min\left\{\varepsilon^1, \frac{\eta}{4\lambda M\tau L e^{2\lambda L}}, \frac{\eta}{4M\tau}\right\}$ отримуємо оцінку (10). Теорема доведена.

Розглянемо ще одну загальну схему усереднення для нечітких диференціальних рівнянь з запізненням вигляду

$$x'\left(t,\varepsilon\right) = \varepsilon F\left(t, x\left(t,\varepsilon\right), x\left(t-\tau_1,\varepsilon\right), x\left(t-\frac{\tau_2}{\varepsilon},\varepsilon\right)\right), \quad (20)$$

$$x\left(s,\varepsilon\right) = \varphi\left(s,\varepsilon\right), -\frac{\tau_2}{\varepsilon} \le s \le 0.$$

Рівнянню (20) поставимо у відповідність наступне частково усереднене рівняння

$$y'\left(t,\varepsilon\right) = \varepsilon F^0\left(t, y\left(t,\varepsilon\right), y\left(t-\tau_1,\varepsilon\right), y\left(t-\frac{\tau_2}{\varepsilon},\varepsilon\right)\right), \quad (21)$$

$$y\left(s,\varepsilon\right) = \varphi\left(s,\varepsilon\right), \ -\frac{\tau_2}{\varepsilon} \le s \le 0,$$

де

$$\lim_{T\to\infty} D\left(\frac{1}{T}\int_0^T F\left(t,x,y,z\right)dt, \frac{1}{T}\int_0^T F^0\left(t,x,y,z\right)dt\right) = 0\,. \quad (22)$$

Теорема 9. Нехай в області $Q = \left\{t \ge 0; x,y,z \in Q' \subset E^n\right\}$ виконуються наступні умови:

1) функції $F\left(t,x,y,z\right), F^0\left(t,x,y,z\right)$ є слабо неперервними, рівномірно обмеженими сталою M та задовольняють умові Ліпшиця зі сталою λ за всіма змінними, починаючи з другої;

2) початкова функція $\varphi\left(s,\varepsilon\right)$ є слабо неперервною і такою, що

$$D\left(\varphi\left(s',\varepsilon\right), \varphi\left(s'',\varepsilon\right)\right) \le \varepsilon\lambda\left(s'-s''\right), \ \varphi\left(s,\varepsilon\right) \in D, \ -\frac{\tau_2}{\varepsilon} \le s \le 0;$$

3) рівномірно відносно $x,y,z \in Q'$ існує границя (22);

4) розв'язок рівняння (21) існує при $0 < \varepsilon \le \sigma_1$ та належить області Q' разом з деяким $\delta-$ околом для $t \in [0, L^*\varepsilon^{-1}]$, де $L^* > 0$ - стала.

Тоді для довільних $\eta > 0$ та $0 < L \le L^*$ існує $0 < \varepsilon^0 \le \sigma_1$ таке, що для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$ та $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедлива оцінка

$$D\left(x\left(t,\varepsilon\right), y\left(t,\varepsilon\right)\right) \le \eta. \quad (23)$$

Доведення. Розглянемо розв'язки систем (20), (21) на інтервалі $\left[0,\frac{\tau_2}{\varepsilon}\right]$:

$$x'_1(t,\varepsilon)=\varepsilon F\left(t,x_1(t,\varepsilon),x_1(t-\tau_1,\varepsilon),\varphi\left(t-\frac{\tau_2}{\varepsilon},\varepsilon\right)\right),\quad x_1(0,\varepsilon)=\varphi(0,\varepsilon);$$

$$y'_1(t,\varepsilon)=\varepsilon F^0\left(t,y_1(t,\varepsilon),y_1(t-\tau_1,\varepsilon),\varphi\left(t-\frac{\tau_2}{\varepsilon},\varepsilon\right)\right),\quad y_1(0,\varepsilon)=\varphi(0,\varepsilon).$$

За теоремою 8 для довільного $\eta_1>0$ існує $\varepsilon_1\in(0,\sigma]$ таке, що для $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ та $t\in\left(0,\frac{\tau_2}{\varepsilon}\right]$ справедлива оцінка

$$D\left(x_1(t,\varepsilon),y_1(t,\varepsilon)\right)\le\eta_1. \tag{24}$$

Розглянемо тепер розв'язки $y_2(s,\varepsilon)$ та $z_2(s,\varepsilon)$ системи (15) на проміжку $\left[\frac{\tau_2}{\varepsilon},\frac{2\tau_2}{\varepsilon}\right]$ з початковими функціями

$$y_2(s,\varepsilon)=y_1(s,\varepsilon),\ s\in\left[0,\frac{\tau_2}{\varepsilon}\right],\quad z_2(s,\varepsilon)=x_1(s,\varepsilon),\ s\in\left[0,\frac{\tau_2}{\varepsilon}\right].$$

За теоремою 7 для довільного $\eta_2>0$ існує $\delta>0$ таке, що для $D\left(y_1(s,\varepsilon),x_1(s,\varepsilon)\right)\le\delta$ маємо

$$D\left(y_2(s,\varepsilon),z_2(s,\varepsilon)\right)\le\frac{\eta_2}{2},\quad s\in\left[\frac{\tau_2}{\varepsilon},\frac{2\tau_2}{\varepsilon}\right]. \tag{25}$$

Тепер розглянемо розв'язки $x_2(s,\varepsilon)$ та $z_2(s,\varepsilon)$ систем (20), (21) на проміжку $\left[\frac{\tau_2}{\varepsilon},\frac{2\tau_2}{\varepsilon}\right]$ з початковими функціями

$$x_2(s,\varepsilon)=x_1(s,\varepsilon),\ s\in\left[0,\frac{\tau_2}{\varepsilon}\right],\quad z_2(s,\varepsilon)=x_1(s,\varepsilon),\ s\in\left[0,\frac{\tau_2}{\varepsilon}\right].$$

За теоремою 8 для довільного $\eta_2>0$ існує $\bar{\varepsilon}_2$ таке, що для $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}_2]$ та $t\in\left[\frac{\tau_2}{\varepsilon},\frac{2\tau_2}{\varepsilon}\right]$ справедлива оцінка

$$D\left(x_2(t,\varepsilon),z_2(t,\varepsilon)\right)\le\frac{\eta_2}{2}. \tag{26}$$

Виберемо $\hat{\varepsilon}_2\in(0,\sigma]$ так, щоб $\eta_1\le\delta$ для $\varepsilon\in(0,\hat{\varepsilon}_2]$. Тоді для $\varepsilon_2=\min\{\bar{\varepsilon}_2,\hat{\varepsilon}_2\}$ з (25), (26) отримуємо

$$D\left(y_2(s,\varepsilon),x_2(s,\varepsilon)\right)\le\eta_2,\quad s\in\left[\frac{\tau_2}{\varepsilon},\frac{2\tau_2}{\varepsilon}\right].$$

Нехай $k<\frac{L}{\tau_2}\le k+1$. Тоді після k кроків для $\varepsilon^0=\min\limits_{1\le i\le k}\varepsilon_i$ ми отримуємо твердження теореми.

Зауваження. Якщо відображення $F^0(t,x,y,z)$ не залежить від t, то з рівняння (22) випливає існування середнього, тобто

$$F^0(x,y,z)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F^0(t,x,y,z)\,dt.$$

В цьому випадку теорема 9 обґрунтовує схему повного усереднення.

5.Висновки.

Таким чином, в статті обґрунтовано існування, єдиність та неперервна залежність від початкових функцій розв'язку нечіткого диференціального рівняння із запізненням, а також обґрунтовано схеми усереднення для рівнянь такого виду, які містять малий параметр.

1. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. – М., 1988. 2. *Комлева Т.А., Плотников А.В., Плотникова Л.И.* Усреднение дифференциальных включений // Труды Одесского политехнического университета. – 2007. - №1 (27). – С.185 – 190. 3. *Мышкис А.Д.* Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Успехи матем. наук. - 1949. – IV, вып.5. – С. 99 – 141. 4. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., 1971. 5. *Aumann R.J.* Integrals of set - valued functions // J. Math. Anal. Appl. – 1965. – 12. – P. 1 – 12. 6. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Func. Ekvacioj. – 1967. – № 11. – P. 205 – 223. 7. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy sets and systems. – 1987. – Vol. 24, 3. – P. 301 – 317. 8. *Kaleva O.* The Cauchy problem for fuzzy differential equations // Fuzzy sets and systems. – 1990. – Vol. 35, 3. – P. 389 – 396. 9. *Laksmikantham V., Leela S., Vatsala A.S.* Interconnection between set and fuzzy differential equations // Nonlinear Analysis. – 2003. – Vol. 54.– P. 351 - 360. 10. *Negoita C.V., Ralescu D.A.* Applications of fuzzy sets to systems analysis. – New York, Toronto, 1975. 11. *Park J.Y., Han H.K.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations // Internat. J. Math. and Math. Sci. – 1999. – Vol. 22, 2. – P. 271 – 279. 12. *Puri M.L., Ralescu D.A.* Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. Appl. – 1983. – Vol. 91. – P. 552 – 558. 13. *Puri M.L., Ralescu D.A.* Fuzzy random variables // J. Math. Anal. Appl. – 1986. – Vol.114, 2. – P. 409 – 422. 14. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – Vol. 24, 3. – P. 319 – 330. 15. *Song S.J., Wu C.X.* Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – Vol. 111. – P. 55–67. 16. *Zadeh L.* Fuzzy sets // Inform. and Control. – 1965. – 8. – P. 338 - 353.

Надійшла до редколегії 20.06.2007

УДК 517.927.8

П.Самусенко, канд.фіз.-мат.наук
E-mail: psamusenko@ukr.net

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ І ТОЧКОЮ ПОВОРОТУ

Використовуючи метод примежевих функцій, у роботі побудовано розв'язок задачі Коші для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженням і точкою повороту.

Using the method of boundary functions, the solution of the initial-value problem of the singularly perturbed system of differential equations with degeneration and a turning point is constructed.

1.Вступ

Розглянемо задачу Коші

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon f(x,t,\varepsilon)\,,\ t\in[0;T]\,, \tag{1}$$

$$x(0,\varepsilon) = x_0\,, \tag{2}$$

де $A(t)$, $B(t)$ – квадратні матриці n-го порядку, $f(x,t,\varepsilon)$ – задана n-вимірна вектор-функція, $x = x(t,\varepsilon)$ – шукана вектор-функція, ε – малий параметр.

За умови простих елементарних дільників в'язки $A(t)-\lambda B(t)$ і неособливої матриці біля похідних задачу (1), (2) розв'язав В.П. Яковець [7]. У випадку кратних елементарних дільників зазначена задача розглядалась в [5]. При цьому припускалось, що матриця $B(t)$ на відрізку $[0;T]$ змінює свій ранг, що значно ускладнювало алгоритм побудови розв'язку задачі Коші.

2.Об'єкт та методи досліджень

У даній роботі наведено асимптотичні формули для розв'язку задачі (1), (2) у випадку, коли корені відповідного характеристичного рівняння

$$\det(A(t)-\lambda B(t)) = 0 \tag{3}$$

на відрізку $[0;T]$ змінюють свою кратність. Отже, нехай:

1) $A(t)$, $B(t)\in C^{\infty}_{[0;T]}$;

2) вектор-функція $f(x,t,\varepsilon)$ має нескінченну кількість неперервних частинних похідних за всіма змінними на множині

$G = \{(x,t,\varepsilon): \|x\|\le a,\ 0\le t\le T,\ 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0\}$, $\|x_0\|\le a$;

3) в'язка матриць $A(0)-\lambda B(0)$ має $n-1$ "скінченних" елементарних дільників і один "нескінченний" елементарний дільник;

4) в'язка матриць $A(t)-\lambda B(t)$, $t\in(0;T]$, має n "скінченних" елементарних дільників;

5) $\operatorname{Re}\lambda_1(t) < 0$, $t\in(0;T]$, $\operatorname{Re}\lambda_i(t)\le 0$, $t\in[0;T]$, і $\lambda_i(0)\ne 0$, $i=\overline{2,k}$; $\operatorname{Re}\lambda_i(t)\le 0$, $\lambda_i(t)\ne 0$, $t\in(0;T]$, і $\lambda_i(0)=0$, $i=\overline{k+1,m}$; $\lambda_i(t)\equiv 0$, $t\in[0;T]$, $i=\overline{m+1,n}$, де $\lambda_i(t)$ – корені рівняння (3).

Згідно умов 3) – 5) існують неособливі матриці $P(t)$, $Q(t)$ такі, що

$P(t)A(t)Q(t) = \Omega(t)$, $P(t)B(t)Q(t) = H(t)$,

$\Omega(t) = diag\{1, W(t)\}$, $W(t) = diag\{W_1(t), W_2(t)\}$,

$W_1(0) = diag\{\lambda_2(0),\lambda_3(0),...,\lambda_k(0)\}$, $W_2(0)$ – нульова матриця $(n-k)$-го порядку;

$H(t) = diag\{h_{11}(t), E_{n-1}(t)\}$, $E_{n-1}(0) = E_{n-1}$,

E_{n-1} – одинична матриця $(n-1)$-го порядку, $h_{11}(0)=0$ [8]. Причому $P(t)$, $Q(t)\in C^{\infty}_{[0;T]}$.

Покладаючи $x(t,\varepsilon) = Q(t)y(t,\varepsilon)$, запишемо систему (1) наступним чином:

$$\varepsilon H(t)\frac{dy}{dt} = (\Omega(t) - \varepsilon H(t)Q^{-1}(t)Q'(t))y + \varepsilon P(t)f(Qy,t,\varepsilon)\,,$$

або

$$\varepsilon H(t)\frac{dy}{dt} = (\Omega(0) + \varepsilon C_1(t,\varepsilon))y + \varepsilon g(y,t,\varepsilon)\,, \tag{4}$$

Де $C_1(t,\varepsilon) = \dfrac{t}{\varepsilon}\dfrac{d\Omega(\theta t)}{dt} - H(t)Q^{-1}(t)Q'(t)$, $0<\theta<1$; $g(y,t,\varepsilon) = P(t)f(Qy,t,\varepsilon)$.

Зазначимо, що $\|C_1(t,\varepsilon)\| = O(1)$, $t\in[0;k\varepsilon]$ (число k визначимо нижче).

Початкова умова (2) при цьому набуде вигляду

$$y(0,\varepsilon) = Q^{-1}(0)x_0 \equiv y_0 \tag{5}$$

Розв'язок задачі (4), (5) на відрізку $[0;k\varepsilon]$ шукатимемо у вигляді

$$y(t,\varepsilon)=\bar{y}(t,\varepsilon)+\Pi y(\tau,\varepsilon), \qquad (6)$$

де $\bar{y}(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\bar{y}_s(t,\varepsilon)$ – регулярний ряд, а $\Pi y(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\Pi_s y(\tau,\varepsilon)$ – примежевий ряд, $\tau=\frac{t}{\varepsilon}$ [1, с. 48].

Нехай $\bar{g}(t,\varepsilon)=g(\bar{y}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ і $\Pi g(\tau,\varepsilon)=g(\bar{y}(\varepsilon\tau,\varepsilon)+\Pi y(\tau,\varepsilon),\varepsilon\tau,\varepsilon)-g(\bar{y}(\varepsilon\tau,\varepsilon),\varepsilon\tau,\varepsilon)$.

Розкладемо вектор-функції $\bar{g}(t,\varepsilon)$ та $\Pi g(\tau,\varepsilon)$ у формальні ряди за степенями ε:

$$\bar{g}(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\bar{g}_s(t),\ \Pi g(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\Pi_s g(\tau).$$

У такому ж вигляді запишемо $H(\varepsilon\tau)$ та $C_1(\varepsilon\tau,\varepsilon)$:

$$H(\varepsilon\tau)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\frac{\tau^s}{s!}\frac{d^sH(0)}{dt^s}\equiv\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^sH_s(\tau),$$

$$C_1(\varepsilon\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\frac{\tau^s}{s!}\left(\tau\frac{d^{s+1}\Omega(0)}{dt^{s+1}}-\frac{d^s(H(0)Q^{-1}(0)Q'(0))}{dt^s}\right)\equiv\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^sC_s(\tau).$$

Підставимо ряд (6) до системи (4) і зрівняємо окремо вирази, що залежать від t і τ:

$$\varepsilon H(t)\frac{d\bar{y}}{dt}=(\Omega(0)+\varepsilon C_1(t,\varepsilon))\bar{y}+\varepsilon\bar{g}(t,\varepsilon), \qquad (7)$$

$$H(\varepsilon\tau)\frac{d\Pi y}{d\tau}=(\Omega(0)+\varepsilon C_1(\varepsilon\tau,\varepsilon))\Pi y+\varepsilon\Pi g(\tau,\varepsilon). \qquad (8)$$

У тотожностях (7), (8) зрівняємо коефіцієнти біля однакових степенів ε. Зокрема, біля ε^0 матимемо:

$$\Omega(0)\bar{y}_0(t,\varepsilon)=0, \qquad (9)$$

$$H(0)\frac{d\Pi_0y(\tau,\varepsilon)}{d\tau}=\Omega(0)\Pi_0y(\tau,\varepsilon). \qquad (10)$$

Звідси $\bar{y}_0(t,\varepsilon)=\Phi\alpha_0(t,\varepsilon)$, де $\Phi=[e_{k+1},...,e_n]$, e_i, $i=\overline{k+1,n}$, – вектор, i-та компонента якого дорівнює одиниці, решта компонент дорівнюють нулю, $\alpha_0(t,\varepsilon)$ – деяка $(n-k)$-вимірна вектор-функція, що буде визначена нижче;

$$\Pi_{01}y(\tau,\varepsilon)=0,$$

$$\Pi_{02}y(\tau,\varepsilon)=\exp(W(0)\tau)c_0(\varepsilon),$$

$\Pi_{01}y(\tau,\varepsilon)$ – перша компонента вектор-функції $\Pi_0y(\tau,\varepsilon)$, $\Pi_{02}y(\tau,\varepsilon)$ – вектор-функція, що містить решту компонент $\Pi_0y(\tau,\varepsilon)$, $c_0(\varepsilon)$ – $(n-1)$-вимірний вектор довільних сталих.

Вектор $c_0(\varepsilon)$ підберемо так, щоб

$$\bar{y}_0(0,\varepsilon)+\Pi_0y(0,\varepsilon)=y_0. \qquad (11)$$

Для цього вимагатимемо виконання наступної умови:

6) $y_{01}=0$, де y_{01} – перша компонента вектора y_0.

Тоді для виконання рівності (11) достатньо покласти

$$\{c_0(\varepsilon)\}_i=\{y_0\}_i-\{\Phi\alpha_0(0,\varepsilon)\}_i,\ i=\overline{2,n}.$$

За рахунок вибору $\alpha_0(0,\varepsilon)=\alpha_0$ можна вважати, що $\{c_0(\varepsilon)\}_i=0$, $i=\overline{k+1,n}$.

При ε^1 матимемо:

$$\Omega(0)\bar{y}_1(t,\varepsilon)=H(t)\frac{d\bar{y}_0(t,\varepsilon)}{dt}-C_1(t,\varepsilon)\bar{y}_0(t,\varepsilon)-\bar{g}_0(t), \qquad (12)$$

$$H(0)\frac{d\Pi_1y(\tau,\varepsilon)}{d\tau}=\Omega(0)\Pi_1y(\tau,\varepsilon)-H_1(\tau)\frac{d\Pi_0y(\tau,\varepsilon)}{d\tau}+C_0(\tau)\Pi_0y(\tau,\varepsilon)+\Pi_0g(\tau). \qquad (13)$$

Система (12) сумісна тоді і тільки тоді, коли

$$\Phi^*H(t)\Phi\frac{d\alpha_0(t,\varepsilon)}{dt}=\Phi^*(C_1(t,\varepsilon)\Phi\alpha_0(t,\varepsilon)+\bar{g}_0(t)), \qquad (14)$$

де Φ^* – матриця, спряжена до Φ.

Оскільки $\det\Phi^*H(0)\Phi=1$, то можна вважати, що $\det\Phi^*H(t)\Phi\neq0$, $t\in[0;k\varepsilon]$. Таким чином, система (14) набуде вигляду

$$\frac{d\alpha_0(t,\varepsilon)}{dt}=g(\alpha_0,t,\varepsilon). \qquad (15)$$

Нехай $\alpha_0=\alpha_0(t,\varepsilon)$ – розв'язок системи (15), що задовольняє умову $\alpha_0(0,\varepsilon)=\alpha^0$. Тоді $\bar{y}_1(t,\varepsilon)=\Phi\alpha_1(t,\varepsilon)+\tilde{y}_1(t,\varepsilon)$, де $\tilde{y}_1(t,\varepsilon)$ – деякий частинний розв'язок (12).

Сталу k підберемо так, щоб $\|Q(t)(\bar{y}_0(t,\varepsilon)+\Pi_0y(t/\varepsilon,\varepsilon))\|\le a_0<a$, для всіх $t\in[0;k\varepsilon]$

Система (13) розщепиться на дві системи $\Pi_{11}y(\tau,\varepsilon)=-l_1(\tau,\varepsilon)$, і $\frac{d\Pi_{12}y(\tau,\varepsilon)}{d\tau}=W(0)\Pi_{12}y(\tau,\varepsilon)+l_2(\tau,\varepsilon)$,

де $l_1(\tau,\varepsilon)$ – перша компонента вектор-функції $l(\tau,\varepsilon)$, $l_2(\tau,\varepsilon)$ – вектор-функція, що містить решту компонент $l(\tau,\varepsilon)$, $l(\tau,\varepsilon)=-H_1(\tau)\frac{d\Pi_0 y(\tau,\varepsilon)}{d\tau}+C_0(\tau)\Pi_0 y(\tau,\varepsilon)+\Pi_0 g(\tau)$.

Звідси $\Pi_{12}y(\tau,\varepsilon)=\exp(W(0)\tau)c_1(\varepsilon)+\int\limits_0^\tau \exp(W(0)(\tau-s))l_2(s,\varepsilon)ds$.

7) Нехай $g_1(y_0,0,0)=0$ де $g_1(y_0,0,0)$ – перша компонента вектора $g(y_0,0,0)$.

Тоді сталу $c_1(\varepsilon)$ можна підібрати так, щоб $\bar{y}_1(0,\varepsilon)+\Pi_1 y(0,\varepsilon)=0$ [4].

Використовуючи метод математичної індукції, таким чином можна визначити і решту членів рядів $\bar{y}(t,\varepsilon)$ та $\Pi y(\tau,\varepsilon)$. При цьому, умова, аналогічна до умови 7) на j -му кроці матиме вигляд $\frac{\partial^{j-1}g_1(y_0,0,0)}{\partial\varepsilon^{j-1}}=0$, $j\ge 2$, [4].

Нехай φ_2, $\varphi_3,\ldots,$ φ_n – власні вектори матриці $\Omega(0)$ відносно $H(0)$; $\tilde{\varphi}$ – власний вектор матриці $H(0)$, що відповідає нульовому власному значенню; ψ_2, $\psi_3,\ldots,$ ψ_n та $\tilde{\psi}$ – елементи нуль-простору матриць $(\Omega(0)-\lambda_i(0)H(0))^*$ та $H^*(0)$ відповідно. Вектори ψ_2, $\psi_3,\ldots,$ ψ_n та $\tilde{\psi}$ визначимо так, щоб

$(H(0)\varphi_i,\psi_j)=\delta_{ij}$, $i,j=\overline{2,n}$, $(\Omega(0)\tilde{\varphi},\tilde{\psi})=1$, δ_{ij} – символ Кронекера [3, с. 35].

Система $\varepsilon H(0)\frac{dy}{dt}=(\Omega(0)+\varepsilon C_1(t,\varepsilon))y$ має $n-1$ формальних лінійно незалежних розв'язків вигляду

$y_i(t,\varepsilon)=u_i(t,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda_i(t,\varepsilon)dt\right)$, $i=\overline{2,n}$,

де $u_i(t,\varepsilon)$ – n -вимірні вектори, а $\lambda_i(t,\varepsilon)$ – скалярні функції, причому

$$u_i(t,\varepsilon)=\varphi_i+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k u_k^{(i)}(t),\ \lambda_i(t,\varepsilon)=\lambda_i(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(t). \qquad (16)$$

Зробимо в системі (4) заміну

$$y(t,\varepsilon)=z(t,\varepsilon)+y_m(t,\varepsilon), \qquad (17)$$

де $y_m(t,\varepsilon)=\sum\limits_{s=0}^{m}\varepsilon^s(\bar{y}_s(t,\varepsilon)+\Pi_s y(\tau,\varepsilon))$, а $z(t,\varepsilon)$ – невідома вектор-функція. Дістанемо

$$\varepsilon H(t)\frac{dz}{dt}=(\Omega(0)+\varepsilon C_1(t,\varepsilon))z+h(z,t,\varepsilon), \qquad (18)$$

$$h(z,t,\varepsilon)=\varepsilon g(z+y_m(t,\varepsilon),t,\varepsilon)+(\Omega(0)+\varepsilon C_1(t,\varepsilon))y_m(t,\varepsilon)-\varepsilon H(t)\frac{dy_m(t,\varepsilon)}{dt}.$$

Зазначимо, що $\|h(0,t,\varepsilon)\|=O(\varepsilon^{m+1})$, $t\in[0;k\varepsilon]$. Побудуємо матриці $Q_1(t,\varepsilon)=[U_m(t,\varepsilon),\tilde{\varphi}]$, $P_1=[\Psi,\tilde{\psi}]^*$,
де $U_m(t,\varepsilon)$ – прямокутна $(n\times(n-1))$ -матриця, що містить перші m членів виразів (16), $\Psi=[\psi_2,\ldots,\psi_n]$.
Покладемо

$$z(t,\varepsilon)=Q_1(t,\varepsilon)u(t,\varepsilon) \qquad (19)$$

і домножимо обидві частини системи (18) зліва на P_1: $\varepsilon P_1H(t)Q_1(t,\varepsilon)\frac{du}{dt}=P_1L(t,\varepsilon)Q_1(t,\varepsilon)u+P_1h(Q_1(t,\varepsilon)u,t,\varepsilon)$,

$L(t,\varepsilon)=\Omega(0)+\varepsilon C_1(t,\varepsilon)-\varepsilon H(t)\frac{d}{dt}$, або

$$\varepsilon\begin{pmatrix}\Psi^*H(t)U_m(t,\varepsilon) & \Psi^*H(t)\tilde{\varphi}\\ \tilde{\psi}^*H(t)U_m(t,\varepsilon) & \tilde{\psi}^*H(t)\tilde{\varphi}\end{pmatrix}\frac{du}{dt}=\begin{pmatrix}\Psi^*L(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon) & \Psi^*L(t,\varepsilon)\tilde{\varphi}\\ \tilde{\psi}^*L(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon) & \tilde{\psi}^*L(t,\varepsilon)\tilde{\varphi}\end{pmatrix}u+P_1h(Q_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon). \qquad (20)$$

Оскільки $\Psi^*H(0)U_m(0,0)=\|(H(0)\varphi_i,\psi_j)\|_2^n=E_{n-1}$, і $\tilde{\psi}^*L(0,0)\tilde{\varphi}=(\Omega(0)\tilde{\varphi},\tilde{\psi})=1$, то елементи матриці $(\Psi^*H(t)U_m(t,\varepsilon))^{-1}$ та функція $(\tilde{\psi}^*L(t,\varepsilon)\tilde{\varphi})^{-1}$ рівномірно обмежені на відрізку $[0;t_0]$, $t_0\le T$.

Зазначимо, що

$\Psi^*L(t,\varepsilon)\tilde{\varphi}=O(\varepsilon)$,

$L(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon)=H(0)U_m(t,\varepsilon)\Lambda_m(t,\varepsilon)+\varepsilon(H(t)-H(0))U'_m(t,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}D(t,\varepsilon)$,

де $\Lambda_m(t,\varepsilon)=diag\{\lambda_2^{(m)}(t,\varepsilon),\ldots,\lambda_n^{(m)}(t,\varepsilon)\}$,

$D(t,\varepsilon)$ – $(n\times(n-1))$ -матриця, компоненти якої обмежені на $[0;t_0]$ [6, с. 50-53].

Покажемо, що існує єдиний розв'язок системи (20) такий, що

$$u(0,\varepsilon)=0. \qquad (21)$$

Задача (20), (21) рівносильна задачі про знаходження неперервного розв'язку рівняння

$$u(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t U(t,\varepsilon)U^{-1}(s,\varepsilon)r(u,s,\varepsilon)ds\,, \qquad (22)$$

де $U(t,\varepsilon)$ – фундаментальна матриця системи

$$\varepsilon\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \tilde\psi^* H(t)\tilde\varphi \end{pmatrix}\frac{du}{dt}=\begin{pmatrix} \Lambda_m(t,\varepsilon) & 0 \\ 0 & \tilde\psi^*\Omega(t)\tilde\varphi \end{pmatrix}u\,,$$

$$r(u,s,\varepsilon)=(P_1H(s)Q_1(s,\varepsilon))^{-1}\left(\left(\left(\begin{matrix} \varepsilon\Psi^*(H(s)-H(0))U_m'(s,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}\Psi^*D(s,\varepsilon) & \Psi^*L(s,\varepsilon)\tilde\varphi \\ \tilde\psi^*L(s,\varepsilon)U_m(s,\varepsilon) & -\varepsilon\tilde\psi^*H(s)Q^{-1}(s)Q'(s)\tilde\varphi \end{matrix}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\varepsilon\begin{pmatrix} \Psi^*(H(s)-H(0))U_m(s,\varepsilon) & \Psi^*H(s)\tilde\varphi \\ \Psi^*H(s)U_m(s,\varepsilon) & 0 \end{pmatrix}U'(s,\varepsilon)U^{-1}(s,\varepsilon)\right)u+P_1h(Q_1(s,\varepsilon)u,s,\varepsilon)\right).$$

Нехай мають місце умови:

8) $\tilde\psi^*H(t)\tilde\varphi=h_{11}(t)\equiv th(t)$, $\operatorname{Re}h(0)<0$;

9) $|\tilde\psi^*(r_m(\bar y_m(t,\varepsilon),t,\varepsilon)+r_m(\Pi_m y(t,\varepsilon),t,\varepsilon))|=O(\varepsilon^{m+1}t)$, $t\in[0;k\varepsilon]$, $r_m(\bar y_m(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ та $r_m(\Pi_m y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ – додаткові члени формул Тейлора за степенями ε для функцій $g(\bar y_m(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ та $g(\bar y_m(\varepsilon\tau,\varepsilon)+\Pi_m y(\tau,\varepsilon),\varepsilon\tau,\varepsilon)-g(\bar y_m(\varepsilon\tau,\varepsilon),\varepsilon\tau,\varepsilon)$.

Тоді, використовуючи метод послідовних наближень, можна показати, що система (22) на відрізку $[0;k\varepsilon]$ має єдиний розв'язок $u=u(t,\varepsilon)$ такий, що правильна умова (21) і $\|u(t,\varepsilon)\|=O(\varepsilon^{m-1})$ [4].

Покладемо $y(k\varepsilon,\varepsilon)=y_\varepsilon$, (23) де y_ε побудований за формулами (17), (19), (22) при $t=k\varepsilon$.

Розв'язок системи (4) на відрізку $[k\varepsilon;t_0]$ шукатимемо у вигляді $y(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\bar y_s(t)$. Для визначення $\bar y_s(t)$, $s\ge 0$, підставимо ряд $y(t,\varepsilon)$ до системи (4) і зрівняємо коефіцієнти біля однакових степенів параметра ε:

$$\Omega(t)\bar y_0(t)=0\,, \qquad (24)$$

$$\Omega(t)\bar y_s(t)=H(t)Q^{-1}(t)Q'(t)\bar y_{s-1}(t)+H(t)\frac{d\bar y_{s-1}(t)}{dt}-\bar g_{s-1}(t)\,,\ s\ge 1\,. \qquad (25)$$

Нехай $\Omega(t)=\begin{pmatrix} \Omega_1(t) & \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) & \Omega_4(t) \end{pmatrix}$, де $\Omega_1(t)$ – квадратна матриця m-го порядку.

Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що $\det\Omega_1(t)\ne 0$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$, $t_0\le T$. Тоді

$$\bar y_0(t)=\begin{pmatrix} \Omega_1^{-1}(t)\Omega_2(t) \\ -E_{n-m} \end{pmatrix}\beta_0(t)\equiv M(t)\beta_0(t)\,,$$

де $\beta_0(t)$ – деяка $(n-m)$-вимірна вектор-функція, що буде визначена нижче [2, с. 61].

Розглянемо систему (25), коли $s=1$:

$$\Omega(t)\bar y_1(t)=H(t)Q^{-1}(t)Q'(t)\bar y_0(t)+H(t)\frac{d\bar y_0(t)}{dt}-\bar g_0(t)\,. \qquad (26)$$

Система (26) сумісна тоді і тільки тоді, коли

$$K^*(t)H(t)M(t)\frac{d\beta_0(t)}{dt}=K^*(t)(\bar g_0(t)-H(t)M'(t)\beta_0(t)-H(t)Q^{-1}(t)Q'(t)M(t)\beta_0(t)),\ \text{де}\ K(t)=\begin{pmatrix} (\Omega_3(t)\Omega_1^{-1}(t))^* \\ -E_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що $\det K^*(t)H(t)M(t)\ne 0$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$. Справді, нехай $k_i(t)$, $i=\overline{1,n-m}$, – рядки матриці $K^*(t)$, $m_i(t)$, $i=\overline{1,n-m}$, – стовпці матриці $M(t)$. Тоді, якщо припустити, що для деякого $t=\bar t$ $\det K^*(\bar t)H(\bar t)M(\bar t)=0$, то $\sum_{i=1}^{n-m}\gamma_i(k_j(\bar t),H(\bar t)m_i(\bar t))=0$, $j=\overline{1,n-m}$, $\gamma_i\in R$, або $(k_j(\bar t),H(\bar t)\sum_{i=1}^{n-m}\gamma_i m_i(\bar t))=0$, $j=\overline{1,n-m}$.

Оскільки $m(\bar t)=\sum_{i=1}^{n-m}\gamma_i m_i(\bar t)$ – власний вектор матриці $\Omega(\bar t)$ відносно $H(\bar t)$, що відповідає нульовому власному значенню і $(k_j(\bar t),H(\bar t)m(\bar t))=0$, $j=\overline{1,n-m}$, то алгебраїчна система $\Omega(\bar t)z=H(\bar t)m(\bar t)$ розв'язна відносно z, що суперечить умові 4). Таким чином, $\det K^*(t)H(t)M(t)\ne 0$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$, і

$$\frac{d\beta_0(t)}{dt}=(K^*(t)H(t)M(t))^{-1}K^*(t)(\bar g_0(t)-H(t)M'(t)\beta_0(t)-H(t)Q^{-1}(t)Q'(t)M(t)\beta_0(t))\,. \qquad (27)$$

10) Нехай система (27) має розв'язок $\beta_0 = \beta_0(t)$, $t \in [k\varepsilon; t_0]$, такий, що $\| Q(t)M(t)\beta_0(t) \| \le \frac{a_0}{2}$ для всіх $t \in [k\varepsilon; t_0]$. Тоді $\overline{y}_1(t) = M(t)\beta_1(t) + \widetilde{y}_1(t)$, де $\widetilde{y}_1(t)$ – частинний розв'язок системи (26).

Аналогічно можна довести сумісність систем (25) для $s \ge 2$.

11) Нехай $\| \widetilde{y}_s(t) \| = O(1)$, $t \in [k\varepsilon; t_0]$, $s \ge 1$.

Зазначимо, що вектор-функції $\beta_s(t)$, $s \ge 1$, взагалі кажучи, визначатимуться з лінійних систем з особливою точкою $t = 0$.

Зауваження. Покажемо, що за певних умов, накладених на матриці $\Omega(t)$ і $H(t)$ існує стала $c > 0$ така, що

$$\det K^*(t)H(t)M(t) \ge c, \quad t \in [k\varepsilon; t_0]. \tag{28}$$

Нехай $H(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) & H_2(t) \\ H_3(t) & H_4(t) \end{pmatrix}$, де $H_1(t)$ – квадратна матриця m-го порядку.

12) $\| \Omega_1^{-1}(t)\Omega_2(t) \| = O(t)$ і $\| \Omega_3(t)\Omega_1^{-1}(t) \| = O(1)$, $t \in [k\varepsilon; t_0]$, або $\| \Omega_1^{-1}(t)\Omega_2(t) \| = O(1)$ і $\| \Omega_3(t)\Omega_1^{-1}(t) \| = O(t)$, $t \in [k\varepsilon; t_0]$.

Тоді, враховуючи структуру матриці $K^*(t)H(t)M(t)$, існуватиме стала $c > 0$ така, що матиме місце умова (28).

Зробивши в системі (4) заміну (17), де $y_m(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s \overline{y}_s(t)$,дістанемо

$$\varepsilon H(t)\frac{dz}{dt} = (\Omega(t) - \varepsilon H(t)Q^{-1}(t)Q'(t))z + q(z,t,\varepsilon), \tag{29}$$

$$q(z,t,\varepsilon) = \varepsilon g(z + y_m(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + (\Omega(t) - \varepsilon H(t)Q^{-1}(t)Q'(t))y_m(t,\varepsilon) - \varepsilon H(t)\frac{dy_m(t,\varepsilon)}{dt}.$$

За побудовою $\| q(0,t,\varepsilon) \| = O(\varepsilon^{m+1})$, $t \in [k\varepsilon; t_0]$. Припустимо виконання умов:

13) система $\varepsilon H(t)\frac{dz}{dt} = (\Omega(t) - \varepsilon H(t)Q^{-1}(t)Q'(t))z$ має фундаментальну матрицю $Z(t,s,\varepsilon)$ ($Z(t,s,\varepsilon) = E$) таку, що $\| Z(t,s,\varepsilon) \| = O(\varepsilon^{-\gamma})$, $\gamma \ge 0$ і $\| Q(t)Z(t,k\varepsilon,\varepsilon)(y_\varepsilon - y_{[\gamma]+1}(k\varepsilon,\varepsilon)) \| \le \frac{a_0}{2}$ ($[\gamma]$ – ціла частина γ) для всіх $k\varepsilon \le s \le t \le t_0$;

14) існує неперервна функція $\eta(t,\varepsilon)$, $0 \le t \le t_0$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, така, що

$\| f(u,t,\varepsilon) - f(v,t,\varepsilon) \| \le \eta(t,\varepsilon) \| u - v \|$,

причому $\eta(t,\varepsilon)\varepsilon^{-\gamma-1} = O(1)$ для всіх $\| u \| \le a$, $\| v \| \le a$.

Тоді, використовуючи метод послідовних наближень, можна довести існування та єдиність розв'язку $z = z(t,\varepsilon)$ системи $z(t,\varepsilon) = Z(t,k\varepsilon,\varepsilon)(y_\varepsilon - y_m(k\varepsilon,\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{k\varepsilon}^{t} Z(t,s,\varepsilon)H^{-1}(s)q(z,s,\varepsilon)ds$.

При цьому, $\| z(t,\varepsilon) \| = O(1)$, $t \in [k\varepsilon; t_0]$.

Теорема. Нехай виконуються умови 1) – 12), 14), 15) і системи для визначення вектор-функцій $\beta_s(t)$, $s \ge 1$, мають такі розв'язки, що $\| M(t)\beta_s(t) \| = O(1)$, $t \in [k\varepsilon; t_0]$, $s \ge 1$. Тоді для $m \ge \gamma + 1$, $t \in [0; t_0]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$, $\varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, задача (1), (2) має єдиний розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$.

Наслідок. Нехай виконуються умови 1) – 15). Тоді для $m \ge \gamma + 1$, $t \in [0; t_0]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$, $\varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, задача (1), (2) має єдиний розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$.

3. Результати та їх обговорення

Результати роботи обговорювались на Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння та суміжні питання" (21 – 26 травня 2007 р., м. Москва).

4. Висновки

У роботі побудовано розв'язок задачі Коші для сингулярно збуреної слабо нелінійної системи диференціальних рівнянь з виродженою матрицею біля похідних і точкою повороту. При цьому, розглянуто випадок простих елементарних дільників граничної в'язки матриць.

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с. 2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с. 3. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с. 4. *Самусенко П.Ф.* Про побудову асимптотичних розв'язків нелінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженням // Наукові вісті НТУУ "КПІ", 2006. – № 1 (45). – С. 144 – 150. 5. *Самусенко П.Ф.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням // Наукові вісті НТУУ "КПІ", 2006. – № 3 (47). – С. 139 – 147. 6. *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – К.: Вища шк., 1991. – 207 с. 7. *Яковець В.П.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням: Автореф. дис. ... док. фіз.-мат. наук. – К., 1992. – 32 с. 8. *Sibuya R.* Simplification of a System of Linear Ordinary Differential Equations about a Singular Point // Funkcialaj Ekvacioj, 1962. – № 4. – P. 29 – 56.

Надійшла до редколегії 24.04.2007

УДК 517.912:512.816

О. Омелян, асист.
Email: k26@pntu.edu.ua

ІНВАРІАНТНІСТЬ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ХЕМОТАКСИСУ ВІДНОСНО АЛГЕБРИ ГАЛІЛЕЯ

Проведено групову класифікацію систем рівнянь хемотаксису, інваріантних відносно перетворень Галілея.

The group classification systems of chemotaxis equations, which are invariance under Galilei transformations, is performed.

1. Вступ.

В сучасних біофізичних дослідженнях процеси симетричного розповсюдження бактеріальних популяційних хвиль, коли кільця хемотаксису зберігають різко окреслену форму і рухаються зі сталою швидкістю, яка залежить від рухливості бактерій та їх хемотаксисних властивостей, добре описуються математичними моделями, основаними на рівняннях Келлера-Сегеля [7]

$$\begin{aligned} &S_t = D_S S_{xx} + k_1 g(S) b, \\ &b_t = -\nu \partial_x [b\chi(S) S_x] + D_b b_{xx} + k_2 g(S) b, \end{aligned} \qquad (1)$$

де $S_t = \frac{\partial S}{\partial t}$, $S_x = \frac{\partial S}{\partial x}$, $b_t = \frac{\partial b}{\partial t}$, $S_{xx} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, $b_{xx} = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, причому $S(t,x)$ - концентрація субстрату-аттрактанту, який споживається бактеріями, $b(t,x)$ - щільність бактерій, $g(S)$ - питома швидкість росту бактерій, $\chi(S)$ - функція хемотаксисної відповіді, D_S та D_b - коефіцієнти дифузії субстрату та бактерій відповідно; ν, k_1 k_2 - сталі; t, x - часова та просторова змінні відповідно. Моделлю Келлера-Сегеля та її деякими модифікаціями описується також формування та поширення хемотаксисних кілець Адлера [6] та різні процеси структуроутворення в бактеріальних колоніях при їх взаємодії [2]. Перепишемо систему (1) у звичних для математичних досліджень позначеннях, узагальнивши її наступним чином

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ f(u^1)u^2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} g^1(u^1,u^2) \\ g^2(u^1,u^2) \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

де $g^1(u^1,u^2)$, $g^2(u^1,u^2)$, $f(u^1)$ - довільні гладкі функції своїх аргументів, причому $f \neq 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, $u^a = u^a(x_0, x_1)$, $a = \overline{1,2}$, x_0 - часова, x_1 - просторова змінні, нижній індекс означає диференціювання по відповідній змінній. Зауважимо, що система (2) є частинним випадком системи нелінійних рівнянь реакції дифузії

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[F(u^1,u^2) \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + G(u^1,u^2), \qquad (3)$$

де $F(u^1,u^2) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $G(u^1,u^2) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$, $f^{ab} = f^{ab}(u^1,u^2)$, $g^a = g^a(u^1,u^2)$, $a,b = \overline{1,2}$.

В даній роботі поставимо перед собою задачу: дослідити симетрійні властивості системи (2) в залежності від значення функцій $f(u^1)$, $g^1(u^1,u^2)$, $g^2(u^1,u^2)$ та сталих λ_1, λ_2.

2. Ядро симетрії.

Для дослідження симетрійних властивостей системи (2) застосуємо алгоритм Лі [3], [5], [8]. Подіявши продовженням інфінітезимального оператора

$$X = \xi^\mu \partial_\mu + \eta^a \partial_{u^a}, \qquad (4)$$

де $\xi^\mu = \xi^\mu(x_0, x_1, u^1, u^2)$, $\eta^a = \eta^a(x_0, x_1, u^1, u^2)$, $\mu = \overline{0,1}, a = \overline{1,2}$, на систему (2), після переходу на многовид, та розщеплення отриманої системи по похідних функцій u^a, одержимо визначальну систему для визначення координат інфінітезимального оператора (4) та функцій f, g^1, g^2. Визначальна система складається з трьох підсистем:

$$S_1(\xi,\eta) = 0, \quad S_2(\xi,\eta,f) = 0, \quad S_3(\xi,\eta,f,g^1,g^2) = 0.$$

Система $S_1 = 0$ є системою диференціальних рівнянь лише відносно функцій ξ^μ і η^a

$$\begin{aligned} &\xi^1_0 = \xi^\mu_{u^a} = \eta^1_{u^2} = \eta^a_{u^b u^c} = 0, \quad a,b,c = 1;2, \\ &\xi^0_0 = 2\xi^1_1,\ 2\lambda_1 \eta^1_{1u^1} = -\xi^1_0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Система $S_2(\xi,\eta,f) = 0$ пов'язує між собою координати інфінітезимального оператора ξ^μ, η^a та функцію $f(u^1)$ і має вигляд

$$\eta^1\dot{f}+(\eta^1_{u^1}-\eta^2_{u^2}+\tfrac{1}{u^2}\eta^2)f+\tfrac{1}{u^2}(\lambda_2-\lambda_1)\eta^2_{u^1}=0,$$
$$u^2\eta^1_1\dot{f}+(u^2\eta^1_{1u^1}+\tfrac{1}{2}\eta^2_1)f+\lambda_2\eta^2_{1u^1}=0, \tag{6}$$
$$\eta^1_1 f+2\lambda_2\eta^2_{1u^2}=-\xi^1_0.$$

Система $S_3(\xi,\eta,f,g^1,g^2)=0$ складається з двох диференціальних рівнянь

$$\eta^1 g^1_{u^1}+\eta^2 g^1_{u^2}=(\eta^1_{u^1}-\xi^0_0)g^1+\eta^1_{u^2}g^2+\eta^1_0-\lambda_1\eta^1_{11},$$
$$\eta^1 g^2_{u^1}+\eta^2 g^2_{u^2}=(\eta^2_{u^2}-\xi^0_0)g^2+\eta^2_{u^1}g^1+\eta^2_0-\lambda_2\eta^2_{11}-u^2 f\eta^1_{11}, \tag{7}$$

які пов'язують між собою функції g^1,g^2 та функції ξ^μ,η^a,f.

Зауваження. Покладаючи $f,g^1,g^2,\lambda_1,\lambda_2$ довільними у системах (5), (6),(7), одержимо

$$\xi^0=d_0,\quad \xi^1=d_1,\quad \eta^1=\eta^2=0, \tag{8}$$

де d_0, d_1 - довільні сталі. В цьому випадку оператор (4) має вигляд

$$X=d_0\partial_0+d_1\partial_1. \tag{9}$$

Оператор (9) породжує алгебру

$$A_0=<\partial_0,\ \partial_1>, \tag{10}$$

яку назвемо **ядром симетрії системи** (2).

3. Необхідні умови розширення ядра симетрії.

Дослідимо, при яких значеннях функцій f,g^1,g^2 симетрія системи (2) ширша порівняно з алгеброю A_0. Необхідними умовами розширення симетрії є наступне твердження.

Теорема 1. Якщо система (2) допускає розширення ядра симетрії A_0, то функція $f(u^1)$ набуває одного із наступних виглядів:

1. $f=\varphi(u^1)$, 2. $f=\lambda$, 3. $f=\frac{\lambda}{u^1}$, 4. $f=\frac{2\lambda_1}{u^1}$, 5. $f=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{u^1}$,

де $\varphi(u^1)$ - довільна гладка функція, λ - довільна стала.

Доведення. Для доведення теореми розв'яжемо систему визначальних рівнянь, що складається із систем $S_1=0$ та $S_2=0$ [4].

Неважко бачити, що загальним розв'язком системи $S_1(\xi,\eta)=0$ є функції

$$\xi^0=2A(x_0),\ \ \xi^1=\dot{A}(x_0)x_1+B(x_0),$$
$$\eta^1=-\frac{1}{2\lambda_1}[\frac{1}{2}\ddot{A}(x_0)x_1^2+\dot{B}(x_0)x_1+C(x_0)]u^1+\beta^1(x_0,x_1),$$
$$\eta^2=\alpha^{21}(x_0,x_1)u^1+\alpha^{22}(x_0,x_1)u^2+\beta^2(x_0,x_1),$$

де $A,B,C,\alpha^{2a},\beta^a$ - довільні гладкі функції своїх аргументів.

З умов сумісності рівнянь системи (6) одержуються умови $\alpha^{21}_1=\alpha^{22}_1=\beta^2_1=0$. Тоді система $S_2=0$ набуде вигляду

$$(\alpha^{11}u^1+\beta^1)\dot{f}=-\alpha^{11}f,$$
$$(\alpha^{11}_1u^1+\beta^1_1)f=2\lambda_1\alpha^{11}_1, \tag{11}$$
$$(\alpha^{21}u^1+\beta^2)f=(\lambda_1-\lambda_2)\alpha^{21}.$$

Розв'язання системи (11) приводить до появи 5-ти нееквівалентних випадків вигляду функції f, наведених у формулюванні теореми.

Розглянемо кожен з цих випадків окремо і покажемо, що при вказаних значеннях функції $f(u^1)$ можливе розширення симетрії системи (3) порівняно з A_0.

1. $f=\varphi(u^1)$ - довільна гладка функція. З системи (11) випливає

$$\xi^1_0=\alpha^{a1}=\beta^a=0. \tag{12}$$

Врахувавши (12), одержимо

$$\xi^0=2c_1x_0+d_0,\ \ \xi=c_1x_1+d_1,\ \ \eta^1=0,\ \ \eta^2=\alpha(x_0)u^2, \tag{13}$$

де $\alpha(x_0)$ - довільна гладка функція, c_1,d_0,d_1 - довільні сталі. Порівнявши формули (8) і (13), легко бачити можливість розширення симетрії (10).

Аналогічно доводиться можливість розширення симетрії (10) у випадках 2-5. Не повторюючи цих міркувань, наведемо остаточний вигляд координат інфінітезимального оператора для кожної з вказаних $f(u^1)$.

2. При $f=\lambda$ координати інфінітезимального оператора (4) мають вигляд

$$\xi^0=2c_1x_0+d_0,\ \xi=c_1x_1+d_1,\ \eta^1=\beta(x_0),\ \ \eta^2=\alpha(x_0)u^2, \tag{14}$$

де $\beta(x_0)$ - довільна гладка функція.

3. При $f=\frac{\lambda}{u^1}$ (λ - довільна стала) з системи (11) знаходимо

$$\xi^0=2c_1x_0+d_0,\ \xi=c_1x_1+d_1,\ \eta^1=C(x_0)u^1,\ \eta^2=\alpha(x_0)u^2, \tag{15}$$

де $C(x_0)$ - довільна гладка функція.

4. При $f=\frac{2\lambda_1}{u^1}$ маємо

$$\begin{gathered}\xi^0=2A(x_0),\ \ \xi^1=\dot{A}(x_0)x_1+B(x_0),\\ \eta^1=-\frac{1}{2\lambda_1}[\frac{1}{2}\ddot{A}(x_0)x_1^2+\dot{B}(x_0)x_1+C(x_0)]u^1,\ \ \eta^2=\alpha(x_0)u^2,\end{gathered} \tag{16}$$

де $A(x_0),\ B(x_0),\ C(x_0)$ - довільні гладкі функції.

5. При $f=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{u^1}$ одержимо

$$\begin{gathered}\xi^0=2c_1x_0+d_0,\ \ \xi=c_1x_1+d_1,\ \ \eta^1=a(x_0)u^1,\\ \eta^2=\sigma(x_0)u^1+\alpha(x_0)u^2,\end{gathered} \tag{17}$$

де $\sigma(x_0)$ - довільна гладка функція.

Теорему доведено.

4. Галілеївська інваріантність.

Теорема 1 є тільки необхідною умовою розширення ядра симетрії системи (2). Достатньою умовою такого розширення є система $S_3(\xi,\eta,f,g^1,g^2)=0$. Згідно даної системи вигляд координат інфінітезимального оператора для кожної з п'яти наведених функцій $f(u^1)$, буде залежати від вигляду функцій $g^a(u^1,u^2)$. Повна класифікація симетрійних властивостей системи (2) для кожної з п'яти, вказаних в теоремі 1 функцій $f(u^1)$, є окремою задачею.

В даній роботі детально дослідимо симетрійні властивості системи (2) у випадку $f(u^1)=\frac{2\lambda_1}{u^1}$. Класифікація симетрійних властивостей системи (2) для інших чотирьох виглядів функції $f(u^1)$ буде проведена в наступних роботах.

Отже, розглянемо систему (1) вигляду

$$\begin{pmatrix}u^1\\u^2\end{pmatrix}_0=\partial_1\left[\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 2\lambda_1\dfrac{u^2}{u^1} & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u^1\\u^2\end{pmatrix}_1\right]+\begin{pmatrix}g^1(u^1,u^2)\\g^2(u^1,u^2)\end{pmatrix}. \tag{18}$$

Як було показано в результаті доведення теореми 1, у випадку $f=\frac{2\lambda_1}{u^1}$ розв'язком систем $S_1(\xi,\eta)=0$ та $S_2(\xi,\eta,f)=0$ є наступні координати інфінітезимального оператора X

$$\begin{gathered}\xi^0=2A(x_0),\ \ \xi^1=\dot{A}(x_0)x_1+B(x_0),\\ \eta^1=\gamma(x_0,x_1)u^1,\ \ \eta^2=\alpha(x_0)u^2,\end{gathered} \tag{19}$$

де

$$\gamma(x_0,x_1)=-\frac{1}{2\lambda_1}[\frac{1}{2}\ddot{A}(x_0)x_1^2+\dot{B}(x_0)x_1+C(x_0)], \tag{20}$$

$A(x_0)$, $B(x_0)$, $C(x_0)$, $\alpha(x_0)$ - довільні гладкі функції. Щоб отримати принципово інше ніж у випадку 3 теореми 1 розширення симетрії, необхідне виконання умови $\gamma_1\neq 0$. Це можливо тільки при $\dot{B}\neq 0$. (Випадок, у якому $\dot{B}=0,\ddot{A}\neq 0$, неможливий, оскільки в цьому випадку оператори, породжені формулами (21) не утворюватимуть алгебру). Отже, надалі будемо вважати $\dot{B}\neq 0$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 2. Якщо система (18) допускає розширення ядра симетрії A_0 при умові, що $\gamma_1\neq 0$, то функції g^1,g^2 задаються наступними формулами:

$$\begin{gathered}g^1=u^1[\varphi^1(u^2)+\lambda_3\ln u^1],\\ g^2=\varphi^2(u^2);\end{gathered} \tag{21}$$

де λ_3 - довільна стала, $\varphi^a(u^2)$ - довільні гладкі функції.

Доведення. Враховуючи формули (19), (20), систему $S_3(\xi,\eta,f,g)=0$ можна переписати у вигляді

$$\gamma u^1 g^1_{u^1} + \alpha u^2 g^1_{u^2} = (\gamma - 2\dot{A})g^1 + (\gamma_0 - \lambda_1\gamma_{11})u^1,$$
$$\gamma u^1 g^2_{u^1} + \alpha u^2 g^2_{u^2} = (\alpha - 2\dot{A})g^2 + (\alpha_0 - 2\lambda_1\gamma_{11})u^2. \quad (22)$$

Дослідимо, якими можуть бути функції g^1, g^2, щоб задовольнялась система (22). Так як функції γ, α, A залежать лише від змінних x_0, x_1, а функції g^a - від змінних u^1, u^2, то найбільш широкий клас функцій g^1, g^2, що задовольняють системі (23) є загальним розв'язком системи

$$u^1 g^1_{u^1} + k u^2 g^1_{u^2} = (m+1)g^1 + k_1 u^1,$$
$$u^1 g^2_{u^1} + k u^2 g^2_{u^2} = (m+k)g^2 + k_2 u^2, \quad (23)$$

де k, m, k_1, k_2 - довільні сталі, які ми будемо називати *структурними константами,* а систему (23) – *структурною системою* для функцій g^a.

Зв'язок між системами (23) і (24) задається формулами

$$\frac{\alpha}{\gamma} = k, \quad -2\frac{\dot{A}}{\gamma} = m, \quad \frac{\gamma_0 - \lambda_1\gamma_{11}}{\gamma} = k_1, \quad \frac{\alpha_0 - 2\lambda_1\gamma_{11}}{\gamma} = k_2. \quad (24)$$

Використавши диференціальний наслідок по змінній x_1 рівнянь (24), одержимо

$k\gamma_1 = m\gamma_1 = k_2\gamma_1 = 0$.

Так як $\gamma_1 \neq 0$, то $k = m = k_2 = 0$. Тоді система (23) перепишеться наступним чином

$$u^1 g^1_{u^1} = g^1 + k_1 u^1,$$
$$g^2_{u^1} = 0. \quad (25)$$

Загальний розв'язок системи (25) задається формулами (21), де $\lambda_3 = k_1$.

Отже, розв'язавши систему $S_3(\xi, \eta, f, g) = 0$ стосовно g^1, g^2 при $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$, ми одержали зображення (21) функцій g^1, g^2, наведене в умові теореми.

Теорему доведено.

Умови теореми 2, як і теореми 1, є лише необхідними умовами розширення ядра симетрії системи (2). Щоб отримати достатні умови, необхідно зображення функцій g^a вигляду (21) підставити в систему $S_3 = 0$ і розв'язати одержану систему відносно функцій $A(x_0)$, $B(x_0)$, $C(x_0)$, $\alpha(x_0)$ в залежності від вигляду функцій $\varphi^a(u^2)$ та значень сталої λ_3. Результатом таких досліджень є наступне твердження.

Теорема 3. Максимальні алгебри інваріантності системи (18), (21) залежно від значень функцій g^1, g^2 наведені у таблиці 1.

***Таблиця 1*. Класифікація симетрійних властивостей системи (18), (21).**

№ з/п	Зображення функцій g^1, g^2	Оператори максимальної алгебри інваріантності
1	$g^1 = u^1\varphi^1(u^2)$, $g^2 = u^2\varphi^2(u^2)$;	∂_0, ∂_1, $G = x_0 - \frac{x_1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1}$, $I_1 = u^1\partial_{u^1}$
2	$g^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6)$;	∂_0, ∂_1, G, I_1, $Q_1 = e^{\lambda_4 x_0}(\lambda_5 I_1 + \lambda_4 I_2)$
3	$g^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = \lambda_6 u^2$;	∂_0, ∂_1, G, I_1, $Q = \lambda_5 x_0 I_1 + I_2$
4	$g^1 = u^1[\lambda_5(u^2)^m + \lambda_7]$, $g^2 = \lambda_4(u^2)^{m+1}$;	∂_0, ∂_1, G, I_1, $D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2\lambda_7 x_0 I_1 - \frac{2}{m}I_2$
5	$g^1 = u^1[\lambda_5(u^2)^2 + \lambda_7]$, $g^2 = \lambda_4(u^2)^3$;	∂_0, ∂_1, G, I_1, $D_2 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2\lambda_7 x_0 I_1 - I_2$, $\Pi_1 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (-\frac{1}{4\lambda_1}x_1^2 + \lambda_7 x_0^2 - \frac{1}{2}x_0)I_1 - x_0 I_2$
6	$g^1 = \lambda_7 u^1$, $g^2 = \lambda_6 u^2$;	$\partial_0, \partial_1, G, I_1, I_2, D_3 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2x_0(\lambda_7 I_1 + \lambda_6 I_2)$, $\Pi_2 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (-\frac{1}{4\lambda_1}x_1^2 + \lambda_7 x_0^2 - \frac{1}{2}x_0)I_1 + (\lambda_6 x_0^2 - x_0)I_2$

Закінчення табл.1

№ з/п	Зображення функцій g^1, g^2	Оператори максимальної алгебри інваріантності
7	$g^1 = u^1(\varphi^1(u^2) + \lambda_3 \ln u^1)$, $g^2 = u^2\varphi^2(u^2)$;	∂_0 , ∂_1 , $G = e^{\lambda_3 x_0}(\partial_1 - \frac{\lambda_3}{2\lambda_1} x_1 I_1)$, $M = e^{\lambda_3 x_0} I_1$
8	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6)$, $\lambda_4 \neq \lambda_3$;	∂_0 , ∂_1 , G, M, $Q_2 = e^{\lambda_4 x_0}(\lambda_5 I_1 + (\lambda_4 - \lambda_3) I_2)$
9	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = u^2(\lambda_3 \ln u^2 + \lambda_6)$.	∂_0 , ∂_1 , G, M, $Q_3 = e^{\lambda_3 x_0}(\lambda_5 x_0 I_1 + I_2)$

В таблиці 1 $\lambda_3, ..., \lambda_7, m$ - довільні сталі, $m \neq 0; 2$, $\varphi^a = \varphi^a(u^2)$ - довільні гладкі функції, $I_2 = u^2 \partial_{u^2}$.

Доведення. З теореми 2 випливає, що система (18) допускає розширення основного ядра симетрії при $\dot{B} \neq 0$, якщо функції g^1, g^2 мають вигляд (21).

В такому разі система (18) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} u^1[\varphi^1(u^2) + \lambda_3 \ln u^1] \\ \varphi^2(u^2) \end{pmatrix}, \tag{26}$$

де λ_3 - довільна стала.

В результаті підстановки g^1, g^2 із (21) разом з $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$ та відповідними координатами (19), (20) оператора (4) у систему $S_3 = 0$ одержується система

$$\begin{aligned} &\alpha u^2 \dot{\varphi}^1 = -2\dot{A}\varphi^1 + \gamma_0 - \lambda_1\gamma_{11} - \lambda_3\gamma - 2\lambda_3 \dot{A} \ln u^1, \\ &\alpha u^2 \dot{\varphi}^2 = (\alpha - 2\dot{A})\varphi^2 + (\dot{\alpha} - 2\lambda_1\gamma_{11})u^2. \end{aligned} \tag{27}$$

Розщепивши (27) по u^1 та x_1 , одержимо

$$\begin{aligned} &\alpha u^2 \dot{\varphi}^1 = -2\dot{A}\varphi^1 + \tfrac{1}{2}\ddot{A} - \tfrac{1}{2\lambda_1}\dot{C} + \tfrac{\lambda_3}{2\lambda_1} C, \\ &\alpha u^2 \dot{\varphi}^2 = (\alpha - 2\dot{A})\varphi^2 + (\dot{\alpha} + \ddot{A})u^2. \end{aligned} \tag{28}$$

$$\dddot{A} = 0, \quad \lambda_3 \dot{A} = 0, \quad \ddot{B} - \lambda_3 \dot{B} = 0. \tag{29}$$

Очевидно, що розв'язок рівнянь (29) залежить від значення сталої λ_3 .

1. Якщо $\lambda_3 \neq 0$, то, як випливає з системи рівнянь (29), $\dot{A} = 0$. Система (28) набуде вигляду

$$\begin{aligned} &\alpha u^2 \dot{\varphi}^1 = -\tfrac{1}{2\lambda_1}(\dot{C} - \lambda_3 C), \\ &\alpha(u^2 \dot{\varphi}^2 - \varphi^2) = \dot{\alpha} u^2. \end{aligned} \tag{30}$$

причому

$$A = \tfrac{1}{2} d_0, \quad B = g e^{\lambda_3 x_0} + d_1 , \tag{31}$$

де d_0, d_1, c_1 - сталі.

Вважаючи функції φ^1, φ^2 у системі (30) довільними, знайдемо ядро симетрій системи (26) при $\lambda_3 \neq 0$. При довільних φ^1, φ^2 із (30) випливає, що

$$\alpha = 0, \quad C = d_2 e^{\lambda_3 x_0}. \tag{32}$$

Підставивши (31), (32) у (19), (20), одержимо координати оператора (4)

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = g e^{\lambda_3 x_0} + d_1, \quad \eta^1 = -\tfrac{1}{2\lambda_1} e^{\lambda_3 x_0}(\lambda_3 g + d_2) u^1, \quad \eta^2 = 0. \tag{33}$$

В цьому випадку оператор (4) з координатами (33) породжує ядро симетрії системи (26)

$$A_1 = < \partial_0, \ \partial_1, \ G = e^{\lambda_3 x_0}(\partial_1 - \tfrac{1}{2\lambda_1} x_1) u^1 \partial_{u^1}, \ M = e^{\lambda_3 x_0} u^1 \partial_{u^1} > \tag{34}$$

при довільних функціях $\varphi^a = \varphi^a(u^2)$ та $\lambda_3 \neq 0$. Одержаний результат відповідає пункту 7 таблиці 1.

Дослідимо тепер, при яких значеннях функцій φ^a у випадку $\lambda_3 \neq 0$ система (26) допускає розширення ядра симетрії (34).

З рівнянь (30) випливає, що

$$u^2\dot{\varphi}^1 = -\frac{\dot{C}-\lambda_3 C}{2\lambda_1\alpha} = \lambda_5,$$
$$\dot{\varphi}^2 - \frac{\varphi^2}{u^2} = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = \lambda_4, \qquad (35)$$

де λ_4, λ_5 - сталі.

З рівнянь (35) одержимо

$$\varphi^1 = \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7, \quad \varphi^2 = u^2[\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6]. \qquad (36)$$

$$\alpha = d_3 e^{\lambda_4 x_0}, \quad \dot{C} - \lambda_3 C = -2\lambda_1\lambda_5 d_3 e^{\lambda_4 x_0}. \qquad (37)$$

Розв'язок другого рівняння (37) залежить від співвідношень між сталими λ_4, λ_5. Можливі два суттєво різні випадки.

1.1. $\lambda_4 \neq \lambda_3$. В цьому випадку функції g^a матимуть вигляд

$$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7), \quad g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6).$$

Із другого рівняння (37) випливає, що

$$C = d_2 e^{\lambda_3 x_0} + \frac{2\lambda_1\lambda_5}{\lambda_3 - \lambda_4} d_3 e^{\lambda_4 x_0},$$

де d_2, d_3 - довільні сталі. Внаслідок цього одержуємо наступний вигляд координат оператора (4)

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = g e^{\lambda_3 x_0} + d_1,$$
$$\eta^1 = -\frac{1}{2\lambda_1}\left[e^{\lambda_3 x_0}(\lambda_3 g x_1 + d_2) + \frac{2\lambda_1\lambda_5}{\lambda_3 - \lambda_4} d_3 e^{\lambda_4 x_0}\right]u^1, \quad \eta^2 = d_3 e^{\lambda_4 x_0} u^2. \qquad (38)$$

Оператор (4) з координатами (38) породжує алгебру інваріантності системи (26), наведену в пункті 8 таблиці 1.

1.2. $\lambda_4 = \lambda_3$. В цьому випадку функції g^a задаються наступним чином

$$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7), \quad g^2 = u^2(\lambda_3 \ln u^2 + \lambda_6). \qquad (39)$$

При $\lambda_4 = \lambda_3$ із другого рівняння (37) одержуємо $C = (d_2 - 2\lambda_1\lambda_5 d_3 x_0)e^{\lambda_3 x_0}$. Координати оператора (4) набувають вигляду

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = g e^{\lambda_3 x_0} + d_1,$$
$$\eta^1 = -\frac{1}{2\lambda_1} e^{\lambda_3 x_0}(\lambda_3 g x_1 - 2\lambda_1\lambda_5 d_3 x_0 + d_2)u^1, \quad \eta^2 = d_3 e^{\lambda_3 x_0} u^2. \qquad (40)$$

Алгебра інваріантності системи (26), (39), породжена оператором (4) з координатами (40) співпадає з алгеброю пункту 9 таблиці 1.

2. Якщо $\lambda_3 = 0$, то рівняння (28), (29) розв'язуємо аналогічно до того, як це зроблено у випадку, коли $\lambda_3 \neq 0$ і отримуємо пункти 1-6 таблиці 1.

Теорему доведено.

Зауваження.

За допомогою методу С. Лі (див., наприклад, [1], [3]) можна показати, що основна група перетворень еквівалентності системи (18) має вигляд

$$x_0 = te^{2\theta_2} + \theta_0, \quad x_1 = xe^{\theta_2} + \theta_1,$$
$$u^1 = w^1 e^{\theta_3}, \qquad u^2 = w^2 e^{\theta_4}.$$

Крім основної групи еквівалентності система (18) при конкретних g допускає деякі додаткові перетворення еквівалентності, наприклад

$$x_0 = at, \quad x_1 = bx, \quad u^1 = w^1 e^{kt}, \quad u^2 = w^2 e^{mt},$$

де a, b, k, m - деякі сталі. Застосувавши ці перетворення дану систему з функціями g^1, g^2 з таблиці 1 можна звести до наступного вигляду

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}_t = \partial_x\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1\dfrac{w^2}{w^1} & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}_x\right] + \begin{pmatrix} G^1(w^1, w^2) \\ G^2(w^1, w^2) \end{pmatrix}. \qquad (41)$$

Поставимо задачу: підібрати параметри даних перетворень так, щоб вигляд функцій G^1, G^2 був простіший ніж вигляд функцій g^1, g^2, наведених в таблиці 1.

Результати такого спрощення подамо у вигляді наступної таблиці.

***Таблиця 2*. Спрощення системи (18) з нелінійностями, наведеними в таблиці 1, за допомогою перетворень еквівалентності**

№ з/п	Зображення функцій g^1, g^2 системи (18)	Перетворення	Зображення функцій G^1, G^2 системи (41)
2	$g^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6)$, $\lambda_4 \neq 0$;	$x_0 = \frac{1}{\lvert\lambda_4\rvert} t$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lvert\lambda_4\rvert}} x$, $u^1 = e^{\frac{\lambda_7\lambda_4 - \lambda_5\lambda_6}{\lambda_4^2} t} w^1$, $u^2 = e^{-\frac{\lambda_6}{\lambda_4}} w^2$,	$G^1 = r w^1 \ln w^2$, $G^2 = r_1 w^2 \ln w^2$;
3	$g^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = \lambda_6 u^2$, $\lambda_5 \neq 0$;	$x_0 = \frac{1}{\lvert\lambda_5\rvert} t$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lvert\lambda_5\rvert}} x$, $u^1 = e^{\frac{\lambda_7}{\lvert\lambda_5\rvert} t} w^1$, $u^2 = w^2$,	$G^1 = r_1 w^1 \ln w^2$, $G^2 = r w^2$;
4.1	$g^1 = \lambda_7 u^1$, $g^2 = \lambda_4 (u^2)^{m+1}$, $m \neq 0, \lambda_4 \neq 0$;	$x_0 = \frac{1}{\lvert\lambda_4\rvert} t$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lvert\lambda_4\rvert}} x$, $u^1 = e^{\frac{\lambda_7}{\lvert\lambda_4\rvert} t} w^1$, $u^2 = w^2$,	$G^1 = 0$, $G^2 = r_1 (w^2)^{n+1}$;
4.2	$g^1 = u^1[\lambda_5 (u^2)^m + \lambda_7]$, $g^2 = \lambda_4 (u^2)^{m+1}$, $m \neq 0, \lambda_5 \neq 0$;	$x_0 = \frac{1}{\lvert\lambda_5\rvert} t$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lvert\lambda_5\rvert}} x$, $u^1 = e^{\frac{\lambda_7}{\lvert\lambda_5\rvert} t} w^1$, $u^2 = w^2$,	$G^1 = r_1 w^1 (w^2)^n$, $G^2 = r (w^2)^{n+1}$;
5.1	$g^1 = \lambda_7 u^1$, $g^2 = \lambda_4 (u^2)^3$, $\lambda_4 \neq 0$;	$x_0 = \frac{1}{\lvert\lambda_4\rvert} t$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lvert\lambda_4\rvert}} x$, $u^1 = e^{\frac{\lambda_7}{\lvert\lambda_4\rvert} t} w^1$, $u^2 = w^2$,	$G^1 = 0$, $G^2 = r_1 (w^2)^3$;
5.2	$g^1 = u^1[\lambda_5 (u^2)^2 + \lambda_7]$, $g^2 = \lambda_4 (u^2)^3$, $\lambda_5 \neq 0$;	$x_0 = \frac{1}{\lvert\lambda_5\rvert} t$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lvert\lambda_5\rvert}} x$, $u^1 = e^{\frac{\lambda_7}{\lvert\lambda_5\rvert} t} w^1$, $u^2 = w^2$,	$G^1 = r_1 w^1 (w^2)^2$, $G^2 = r (w^2)^3$;
6	$g^1 = \lambda_7 u^1$, $g^2 = \lambda_6 u^2$;	$x_0 = t$, $x_1 = x$, $u^1 = e^{\lambda_7 t} w^1$, $u^2 = e^{\lambda_6 t} w^2$,	$G^1 = 0$, $G^2 = 0$;
7	$g^1 = u^1(\varphi^1(u^2) + \lambda_3 \ln u^1)$, $g^2 = u^2 \varphi^2(u^2)$, $\lambda_3 \neq 0$;	$x_0 = \frac{1}{\lvert\lambda_3\rvert} t$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lvert\lambda_3\rvert}} x$, $u^1 = w^1$, $u^2 = w^2$	$G^1 = w^1(\varphi^1(w^2) + r_1 \ln w^1)$, $G^2 = w^2 \varphi^2(w^2)$;
8	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6)$, $\lambda_4 \neq \lambda_3$, $\lambda_3 \neq 0, \lambda_4 \neq 0$;	$x_0 = \frac{1}{\lvert\lambda_3\rvert} t$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lvert\lambda_3\rvert}} x$, $u^1 = e^{\frac{\lambda_5\lambda_6 - \lambda_7\lambda_4}{\lambda_3\lambda_4}} w^1$, $u^2 = e^{-\frac{\lambda_6}{\lambda_4}} w^2$,	$G^1 = w^1(r_1 \ln w^1 + r \ln w^2)$, $G^2 = r_2 w^2 \ln w^2$;
9	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = u^2(\lambda_3 \ln u^2 + \lambda_6)$, $\lambda_3 \neq 0$.	$x_0 = \frac{1}{\lvert\lambda_3\rvert} t$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lvert\lambda_3\rvert}} x$, $u^1 = e^{\frac{\lambda_5\lambda_6 - \lambda_3\lambda_7}{\lambda_3^2}} w^1$, $u^2 = e^{-\frac{\lambda_6}{\lambda_3}} w^2$,	$G^1 = w^1(r_1 \ln w^1 + r \ln w^2)$, $G^2 = r_1 w^2 \ln w^2$.

.

В таблиці 2 містяться константи, які набувають наступних значень $r \in R$, $r_1 \in \{-1;1\}$, $r_2 \in R$, $\{-1;1\}$, $\varphi^a = \varphi^a(u^2)$, $\varphi^a = \varphi^a(w^2)$ - довільні гладкі функції.

5.Висновки.

Нерелятивістський рух будь-яких макрооб'єктів задовольняє принципу відносності Галілея. Тому, очевидно, знайдені в даній роботі моделі руху, які, будучи інваріантними відносно алгебр Галілея, задовольняють принципу відносності Галілея, а отже, претендують на достовірність описання руху об'єктів моделі Келлера-Сегеля. Крім того, оскільки в даній роботі встановлено максимальні алгебри інваріантості систем, то це може значно полегшити роботу по встановленню траекторій руху об'єктів, рух яких досліджується вище названою моделлю.

1.*Ахатов Н.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.К.* Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. – М., 1989. – Т. 34. – С. 3-83. 2. *Иваницкий Г.Р., Медвинский А.Б., Цыганов М.А.* От беспорядка к упорядоченности - на примере движения микроорганизмов. // Успехи физических наук – 1991. – Т. 161, №4. – С.13-71. 3. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М., 1978. 4. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М., 1958. 5. *Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — К., 1989. 6 *Adler J.*, Chemotaxis in bacteria. // Sciense. – 1996. – Vol. 153. – P.708-716. 7. *Keller E.F., Segel L.A.,* Model for chemotaxis. // J.Theor.Biol. – 1971. – Vol. 30. – P.225-234. 8. *Olver P.* Applications of Lie Groups to Differential Equations. – New York, 1986.

Надійшла до редколегії 05.06.2007

УДК 517.91

Н. Будницька, асп., О. Пришляк, д-р.фіз.-мат.наук
budnitska_nt@ukr.net, prishlyak@yahoo.com

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗАМКНЕНИХ 1-ФОРМ НА ЗАМКНЕНИХ ОРІЄНТОВАНИХ ПОВЕРХНЯХ

Розглядаються замкнені 1-форми з ізольованими нулями на замкнених орієнтованих поверхнях роду $p \geq 2$. Доводиться критерій топологічної еквівалентності замкнених 1-форм.

The closed 1-forms with isolated zeros on orientable closed surfaces of genus $p \geq 2$ are considered. The criteria on topological equivalence of closed 1-formes is proved.

1. Вступ.

Топологічна теорія замкнених 1-форм була започаткована С.П. Новіковим, над нею також працювали А.Т. Фоменко, В.І. Арнольд тощо. У роботі [2] зроблена топологічна класифікація замкнених 1-форм з ізольованими критичними точками та замкненими рекурентними траєкторіями.

Метою цієї роботи є знаходження необхідних і достатніх умов топологічної еквівалентності замкнених 1-форм з ізольованими нулями. Для доведення розглядається круг Пуанкаре H^2 як накривна площина поверхні, а також використовується гомотопічний клас обертання, введений С.Х. Арансоном і В.З. Грінесом у роботі [1].

2. Основні визначення.

Розглянемо M – замкнену орієнтовану поверхню роду $p \geq 1$. Нагадаємо деякі означення, що були введені в роботі [2].

Визначення 1. Позначимо $N(\omega) = \{x \in M : f_i(x) = 0\}$ - множину нулів 1-форми ω. Крива $\gamma \subset M$, що не містить нулів, називається інтегральною кривою форми ω, якщо локально вона є рівнем функції f, такої що $\omega = df$. Ми будемо розглядати тільки максимальні криві (які не є власними підмножинами інших кривих) і будемо називати їх просто кривими чи траєкторіями.

Для кожного досить малого околу $U(x)$ точки $x \in M \setminus N(\omega)$ крива, що проходить через x, розбиває $U(x)$ на дві частини: додатну $\{y : f(y) - f(x) > 0\}$ і від'ємну $\{x : f(y) - f(x) < 0\}$.

Визначення 2. Диференціальні 1-форми ω_1 і ω_2 на M називаються траєкторно еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм $h : M \to M$, що відображає нулі в нулі, а криві на криві. При цьому h називається траєкторною еквівалентністю. Якщо, крім того, h зберігає розбиття кожного малого околу точки $x \in M \setminus N(\omega)$ на додатну і від'ємну частини, то він називається топологічною еквівалентністю, а відповідні форми топологічно еквівалентними.

Об'єднання додатних частин околів будемо називати додатною підобластю, а від'ємних – від'ємною.

Визначення 3. Нуль 1-форми називається ізольованим, якщо існує його окіл, що не містить інших нулів.

Визначення 4. Інтегральна крива $\gamma : R \to M$ називається рекурентною, якщо $\gamma \subset \{x \in M : \exists \{t_n\} \to \pm\infty, \gamma(t_n) \to x, n \to \infty\}$.

Нехай ω - замкнена 1-форма з ізольованими точками на замкненій орієнтованій поверхні M, усі рекурентні інтегральні криві якої замкнені. Об'єднання нулів та інтегральних кривих, що їх з'єднують, будемо розглядати як граф $G(\omega)$, що вкладений у поверхню M. При цьому якщо з нуля виходить незамкнена рекурентна траєкторія, то для побудови графа $G(\omega)$, ми обріжемо цю траєкторію на деякій відстані від нуля і отримаємо ребро з однією вершиною валентності 1. Ізольовані нулі можуть бути сідлами парної валентності або центрами [2].

Оскільки поверхня орієнтована, то можемо розглядати інтегральні криві замкнених 1-форм ω_1 і ω_2 як потоки f_t і $\widetilde{f}_t$ $(t \in R)$, задані на M, і навпаки.

Якщо рід поверхні $p = 1$, то розглянемо M як фактор евклідової площини R^2 з координатами x, y по цілочисельній решітці Z^2. Позначимо через π природну проекцію R^2 на M. Нехай L - додатна півтраєкторія потоку f_t на M і $l : x = x(t)$, $y = y(t)$ $t \in [0, +\infty)$ - її прообраз на R^2.

Відомо[1], що якщо $x^2(t) + y^2(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$, то існує скінченна чи нескінченна границя $\nu(L) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)}$, яка не залежить від вибору прообраза l в $\pi^{-1}(L)$. Число $\nu(L)$ називається числом обертання додатної півтраєктрії L потоку f_t на M. Аналогічно визначається число обертання від'ємної півтраєкторії. Зазначимо, що число обертання не залежить від вибору півтраєкторії потоку f_t на M, прообраз якої на R^2 покидає компактну частину площини. Тому для такого потоку f_t на M, можна говорити про одне число обертання для будь-якої півтраєкторії, якщо її прообраз на R^2 покидає компактну частину площини. Таке число ν називається числом обертання Пуанкаре потоку f_t на торі M.

Визначення 5. Потік $\widetilde{f}_t$ на M з числом обертання Пуанкаре $\widetilde{\nu}$ топологічно еквівалентний за допомогою гомеоморфізма $\varphi: M \to M$ потоку f_t на M з числом обертання Пуанкаре ν, якщо $\widetilde{\nu} = \dfrac{c + d\nu}{a + b\nu}$, де $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - цілочисельна унімодулярна матриця, яка задає автоморфізм групи гомологій $H_1(M, Z)$, індукований φ. Числа обертання ν і $\widetilde{\nu}$, що задовольняють це співвідношення, називаються сумірними.

Кажуть, що f_t утворює транзитивний потік, якщо в нього ν ірраціональне, а сам f_t співпадає з усім тором. З [1] відомо, що для того щоб два транзитивних потоки на торі без станів рівноваги були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб числа обертання цих потоків були сумірними. Під топологічною еквівалентністю двох потоків f_t і $\widetilde{f}_t$ $(t \in R)$, заданих на M, розуміється існування гомеоморфізма $M \to M$, що переводить траєкторії потоку f_t в траєкторії потоку $\widetilde{f}_t$.

Для поверхні M роду $p \geq 2$ з роботи [1] розглянемо H^2 - круг Пуанкаре, S^1_∞ - абсолют, $\partial H^2 = S^1_\infty$, причому H^2 з S^1_∞ не перетинаються. Нехай C - коло, яке перетинає S^1_∞ в двох точках під кутами 90^0, тоді $C \cap H^2$ є геодезичною дугою. Ізометрія в H^2 визначається як композиція інверсій, де відстань між точками визначається за формулою $ds^2 = \dfrac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - (x^2 + y^2))^2}$, де x і y - це координати точки в R^2. Позначимо множину всіх ізометрій через Γ. Відомими є факти, що Γ ізоморфна $\pi_1(M)$, H^2 є накривним простором для M.

Слідуючи роботі [1], введемо такі означення та позначення: нехай L - траєкторія на M, L^+ - її додатна півтраєкторія (з від'ємною траєкторією аналогічно). Тоді l і l^+ - їх підняття в H^2. Оскільки M - орієнтована, то зобразимо M в H^2 як $4p$-кутник, вершини якого лежать на геодезичних дугах, а сторони є частинами геодезичних дуг, де $p \geq 2$ - рід поверхні M. Тоді $\pi(H^2) = M$, де π - склеювання відповідних сторін.

Відображаючи даний $4p$-кутник k разів відносно лише протилежної сторони до сторони, яку перетинає траєкторія, ми отримаємо криві l^+_k і $l^+_k \to \delta \in S^1_\infty$, $k \to +\infty$. Позначимо через $\delta(l^+)$ - граничну точку півтраєкторії l^+, що належать абсолюту.

Визначення 6. Гомотопічним класом обертання півтраєкторії L^+ потоку f_t на M назвемо множину: $\mu(L^+) = \bigcup\limits_{g \in \Gamma} g(\delta(l^+))$.

Визначення 7. Два гомотопічних класи обертання $\mu(L^+)$ і $\mu(\widetilde{L}^+)$ півтраєкторій L^+ і $\widetilde{L}^+$ потоків f_t і $\widetilde{f}_t$ на M називаються сумірними в силу автоморфізму $\overline{g}_*$ групи Γ, якщо $\mu(\widetilde{L}^+) = \overline{g}^*(\mu(L^+))$, де $\overline{g}^*$ - гомеоморфізм абсолюта S^1_∞, який єдиним чином індукований автоморфізмом $\overline{g}_*$.

Нагадаємо з [1], що потік f_t на M належить класу T, якщо виконуються такі умови:

1) потік f_t є транзитивним, тобто має на M всюди щільну півтраєкторію;

2) у потоку f_t існує лише скінченне число станів рівноваги і сепаратрис;

3) потік f_t немає сепаратрис, що йдуть з одного стану рівноваги в інший або в той же.

З роботи [1] відомо, що для того, щоб два потоки класу T, що задані на зв'язному замкненому орієнтованому двовимірному многовиді M роду $p \geq 2$, які не мають станів рівноваги з двома сепаратрисами, були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб існували дві стійкі за Пуасоном півтраєкторії цих потоків, що мають сумірні в силу автоморфізму $\overline{g}_*$ групи Γ гомотопічні класи обертання.

3. Топологічна еквівалентність замкнених 1-форм на орієнтованих поверхнях.

Граф $G(\omega)$, вершинами якого є нулі, а ребрами траєкторії, що їх з'єднують, розбиває поверхню на області двох типів:

1) області, що заповнені замкненими траєкторіями (регулярними рівнями);

2) області, що заповнені незамкненими рекурентними траєкторіями.

Теорема. *Нехай M - замкнена орієнтована поверхня роду $g \geq 1$. Нехай на M задано дві замкнені 1-форми ω_1 і ω_2. Для того, щоб ω_1 і ω_2 були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб:*

1) для $G(\omega_1) \neq \varnothing$ і $G(\omega_2) \neq \varnothing$ виконувалися умови:

- *існував гомеоморфізм $f: M \to M$, обмеження якого на $G(\omega_1)$ задає ізоморфізм графів $G(\omega_1)$ і $G(\omega_2)$;*
- *області, що обмежені ребрами графа $G(\omega_1)$, переходили в області, що обмежені образами цих ребер у графі $G(\omega_2)$*
- *додатні підобласті переходили у додатні, від'ємні - у від'ємні;*

2) для кожної з областей з $M \setminus G(\omega_i)$, що містить хоча б одну незамкнену рекурентну траєкторію, виконувалися умови:

• *для областей роду $p = 1$ числа обертання півтраєкторій замкнених 1-форм ω_1 і ω_2 мають бути сумірними;*

• *для областей роду $p \geq 2$ існує по одній незамкненій рекурентній півтраєкторії замкнених 1-форм ω_1 і ω_2, що мають сумірні гомотопічні класи обертання.*

Доведення. *Необхідність* прямо випливає з побудови та означень.

Достатність. За умовою теореми існує ізоморфізм f між вкладеними в M графами $G(\omega_1)$ і $G(\omega_2)$. Треба задати продовження даного ізоморфізму f до гомеоморфізму $h : M \to M$.

Аналогічно, як і в теоремі 2 роботи [3], встановлюємо траєкторну еквівалентність між областями типу 1).

Умова відображення в областях 1-го типу додатних підобластей в додатні, від'ємних - у від'ємні задана в теоремі.

З умови 1) f задає відповідність між областями через їх межі. Зокрема, f задає відповідність і між областями, межі яких містять хоча б ребро з вершиною валентності 1. Тобто, якщо існує область V, така, що $\partial\overline{V}$ має хоча б одне ребро з вершиною валентності 1, то $\exists!\ \widetilde{V} : f(V) = \widetilde{V}$ і $\partial\overline{\widetilde{V}}$ має таку ж кількість ребер з вершинами валентності 1, які є образами відповідних ребер з $\partial\overline{V}$. Як і при доведенні необхідності розглянемо окремо області V і $\widetilde{V}$, позаклеюємо петлі в $\partial\overline{V}$ і $\partial\overline{\widetilde{V}}$ дисками, які постягуємо в точки, задамо орієнтації на кривих і будемо розглядати ці криві як потоки f_t і $\widetilde{f}_t$ $(t \in R)$, задані на V і $\widetilde{V}$.

Якщо рід областей V і $\widetilde{V}$ $p = 1$, то зауважимо, що перебудовані області будуть містити незамкнені рекурентні траєкторії, які мають одне й те ж число обертання, тобто траєкторії в R^2 будуть паралельними між собою. Бо якщо траєкторії не паралельні, а відомо, що кожна така траєкторія щільно заповнює R^2, то між траєкторіями виникали б самоперетини, що неможливо. Тому f_t і $\widetilde{f}_t$ будуть транзитивними потоками у яких, за умовою теореми, числа обертання сумірні, тоді між ними існує гомеоморфізм $V \to \widetilde{V}$, який відображає траєкторії f_t в траєкторії $\widetilde{f}_t$.

Якщо рід областей V і $\widetilde{V}$ $p \geq 2$, то потоки f_t і $\widetilde{f}_t$ $(t \in R)$ будуть належати до класу T і, за умовою теореми, існують дві незамкнені рекурентні півтраєкторій цих потоків, що мають сумірні гомотопічні класи обертання. Тоді існує гомеоморфізм $V \to \widetilde{V}$, який відображає траєкторії f_t в траєкторії $\widetilde{f}_t$. Розглянувши аналогічно всі області, що містять незамкнені рекурентні траєкторії, знайдемо між ними гомеоморфізми.

За необхідності, змінюючи гомеоморфізми областей в околах їх меж (графів) так, щоб гомеоморфізми при обмеженні на межі збігалися з гомеоморфізмами графів, отримаємо в сукупності шуканий гомеоморфізм поверхні. Теорему доведено.

4.Висновок.

У даній роботі сформульована і доведена теорема про топологічну еквівалентність двох замкнених 1-форм на замкненій орієнтованій поверхні.

1. Арансон С.Х., Грінес В.З. Топологическая классификация потоков на замкнутых поверхностях: УМН, 1986 Т.41, вып.1(247), С. 149-169. 2. Білун С.В., Пришляк О.О. Замкнені 1-форми Морса на замкнених поверхнях // Вісник КНУ. – 2002. . - №8. 3. Будницька Н.В., Пришляк О.О.. Замкнені 1-форми з ізольованими критичними точками на замкнених орієнтованих поверхнях // Вісник КНУ. - 2007. - №18. 4. Кессон Е., Блейлер С. Теорія автоморфізмів по Нільсону і Тьорстону. М.: ФАЗИС, 1998.

Надійшла до редколегії 20.09.2007

УДК 519.21

О. Банна, асп., Ю. Мішура, д-р фіз..-мат. наук
bannaya@univ.kiev.ua , myus@univ.kiev.ua

НАИПРОСТІШІ МАРТИНГАЛИ НАЙКРАЩОГО НАБЛИЖЕННЯ ДО ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

Знайдено найкраще рівномірне наближення дробового броунівського руху в просторі $L_\infty([0,T]; L_2(\Omega))$ мартингалами виду $\int_0^t a(s)dW_s$, де W – вінерівський процес, $a(s)$ – стала або степенева функції.

The best uniform approximation of fractional Brownian motion in the space $L_\infty([0,T]; L_2(\Omega))$ by martingales of the form $\int_0^t a(s)dW_s$, where W is Wiener process, $a(s)$ is a constant or a power function, is established.

1. Вступ.

Дробовим броунівським рухом (ДБР) з індексом Хюрста $H \in (0,1)$ називається гауссівський процес $\{B_t^H,\ t \geq 0\}$ з середнім $\mathrm{E}B_t^H = 0$, коваріацією $\mathrm{E}B_t^H B_s^H = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$, такий, що $B_0^H = 0$. Ми будемо розглядати лише випадок, коли індекс Хюрста $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. Відомо, що ДБР з індексом $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ не є семімартингалом, зокрема, він не є ні мартингалом, ні процесом обмеженої варіації. Виникає природне питання: чи можна наблизитися до ДБР в деякій метриці за допомогою мартингалів, семімартингалів або процесів обмеженої варіації. Що стосується процесів обмеженої варіації та семімартингалів, відповідь позитивна, і ці задачі розв'язано в роботах [1, с. 11–20; 3, с. 281–300] та [5, с. 255–260]. В даній роботі розглянуто наближення дробового броунівського руху мартингалами, точніше, стохастичними інтегралами по вінерівському процесу. Задачу поставлено наступним чином: нехай задано відрізок $[0,T]$. Відомо з [3], що ДБР $\{B_t^H,\ t \in [0,T]\}$ допускає зображення $B_t^H = \int_0^t z(t,s)dW_s$, де $\{W_t,\ t \in [0,T]\}$ – вінерівський процес, $z(t,s) = \left(H - \frac{1}{2}\right)c_H s^{1/2-H} \int_s^t u^{H-1/2}(u-s)^{H-3/2}du$, де $c_H = \left(\frac{2H\cdot\Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(H+\frac{1}{2})\cdot\Gamma(2-2H)}\right)^{1/2}$, $\Gamma(x)$, $x > 0$ – гамма-функція. Нехай в подальшому $\alpha = H - \frac{1}{2}$.

Нехай тепер $a : [0,T] \to \mathbf{R}$ – вимірна функція з класу $L_2[0,T]$, тобто така, для якої існує стохастичний інтеграл $\int_0^t a(s)dW_s$, $t \in [0,T]$, по цьому ж вінерівському процесу $\{W_t,\ t \in [0,T]\}$. Треба знайти $\inf\limits_{a \in L_2[0,T]} \sup\limits_{0 \le t \le T} \mathrm{E}(B_t^H - \int_0^t a(s)dW_s)^2$. В даній роботі розв'язано спрощені варіанти цієї загальної задачі, коли замість всього класу $L_2[0,T]$ інфімум береться: (а) по всіх сталих; (б) по всіх степеневих функціях вигляду $a(s) = k \cdot s^{H-\frac{1}{2}}$, $k \in \mathbf{R}$; (в) по всіх функціях вигляду $k \cdot s^{\gamma}$, $k \in \mathbf{R}$, $\gamma > 0$. В кожному випадку знайдено ту функцію, на якій інфімум досягається, та значення самого інфімума. Зауважимо, що всі ці значення ненульові.

2. Основні результати.

Ми будемо дотримуватись позначень, що введені в статті [4, с. 571–587]. Зафіксуємо $T > 0$ і розглянемо $\mathrm{E}(B_t^H - M_t)^2$, $0 \le t \le T$, де B_t^H – дробовий броунівський рух з індексом Хюрста $\frac{1}{2} < H < 1$, M_t – квадратично інтегрований мартингал виду $M_t = \int_0^t a(s)dW_s$, причому виконується умова $\int_0^T a^2(s)ds < \infty$, тобто $a \in L_2[0,T]$. Будемо шукати $\min\limits_{a \in L_2[0,T]} \max\limits_{0 \le t \le T} \mathrm{E}(B_t^H - M_t)^2$ у деяких часткових випадках.

Теорема 1. Нехай $a(s)$ – стала, тобто $a(s) = a$, $s \in [0,\ T]$. Тоді $\min\limits_{a} \max\limits_{0 \le t \le T} \mathrm{E}(B_t^H - M_t)^2 = T^{2H}(1 - c_1^2)$, де $c_1 = c_1(H) = \alpha\ c_H \cdot \frac{1}{\alpha+1} \cdot B(1-\alpha,\ \alpha)$. Причому $a_{\min} = c_1(H) \cdot T^{\alpha}$. Тут $B(x,y) = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}ds$, $x > 0$, $y > 0$ – бета-функція.

Зауваження 1. Як буде видно з доведення теореми, $c_1(H) < 1$.

Доведення.

Оскільки $a(s)$ – стала, то $M_t = \int_0^t a(s)dW_s = \int_0^t adW_s = a(W_t - W_0) = aW_t$.

З цього випливає, що

$$\mathrm{E}(B_t^H - M_t)^2 = \mathrm{E}(B_t^H - aW_t)^2 = (\mathrm{E}B_t^H)^2 - 2a\mathrm{E}B_t^H \cdot W_t + a^2\mathrm{E}W_t^2 = t^{2H} - 2a\mathrm{E}B_t^H W_t + a^2 t.$$

Знайдемо $\mathrm{E}B_t^H W_t$:

$$\mathrm{E}B_t^H W_t = \mathrm{E}\int_0^t z(t,\ s)dW_s \cdot W_t = \int_0^t z(t,\ s)ds = \alpha\ c_H \int_0^t s^{-\alpha} \cdot \left(\int_s^t u^{\alpha}(u-s)^{\alpha-1}du\right) ds. \qquad (1)$$

Змінимо в (1) порядок інтегрування. Отримаємо: $\mathrm{E}B_t^H W_t = \alpha\ c_H \int_0^t u^{\alpha}\left(\int_0^u s^{-\alpha}(u-s)^{\alpha-1}ds\right) du$.

Лінійною заміною змінних $s = ux$ зведемо останній інтеграл до вигляду:

$$\mathrm{E}B_t^H W_t = \alpha\ c_H \int_0^t u^{\alpha}\left(\int_0^1 x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}dx\right) du = \alpha\ c_H \cdot \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot B(1-\alpha,\ \alpha).$$

Отже, $\mathrm{E}(B_t^H - aW_t)^2 = t^{2H} - 2a\mathrm{E}B_t^H W_t + a^2 t = t^{2H} - 2a\ c_1 t^{\alpha+1} + a^2 t =: f(t)$.

Продиференціюємо функцію f по t і прирівняємо до нуля отриману похідну: $2H \cdot t^{2\alpha} - 2ac_1 t^{\alpha} \cdot (\alpha+1) + a^2 = 0$.

Після заміни змінних $t^{\alpha} =: x$ отримаємо квадратне рівняння:

$2Hx^2 - 2ac_1(\alpha+1)x + a^2 = 0$. (2)

Знайдемо дискримінант квадратного рівняння (2):

$D = 4(\alpha+1)^2 c_1^2 a^2 - 4\cdot 2H\cdot a^2 = 4a^2\cdot\left((\alpha+1)^2 c_1^2 - 2H\right)$. (3)

Доведемо, що $D<0$ при $\frac{1}{2}<H<1$. Справді,

$$(\alpha+1)^2\left(\alpha c_H\cdot\frac{B(1-\alpha,\alpha)}{\alpha+1}\right)^2 - 2H = \left(\alpha\cdot\left(\frac{2H\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(1-2\alpha)}\right)^{1/2}\cdot\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)\right)^2 - 2H = 2H\cdot\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)\left(\Gamma(1-\alpha)\right)^3}{\Gamma(1-2\alpha)} - 1\right). \quad (4)$$

Оскільки $\frac{1}{2}<H<1$, $1-\alpha=\frac{3}{2}-H>0$, $1-2\alpha=2-2H>0$, і всі Γ-функції в (4) – додатні. Отже, достатньо довести, що

$\Gamma(\alpha+1)\cdot\left(\Gamma(1-\alpha)\right)^3 < \Gamma(1-2\alpha)$ при $0\le\alpha<\frac{1}{2}$. (5)

Якщо $\alpha=0$, маємо рівність: $\ln\Gamma(\alpha+1)+3\ln\left(\Gamma(1-\alpha)\right)=\ln\Gamma(1-2\alpha)$.

Якщо $\varphi(x_0)=\psi(x_0)$ і $\varphi'(x)<\psi'(x)$, $x\in(x_0,\ x_1)$, то $\varphi(x)<\psi(x)$, $x\in(x_0,x_1)$.

У нас $\varphi(x)=\ln\Gamma(x+1)+3\ln\Gamma(1-x)$, $\psi(x)=\ln\Gamma(1-2x)$, при $x_0=0$, $\varphi(x_0)=\psi(x_0)$.

Знайдемо похідні: $\varphi'(x)=\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}-3\frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}$, $\psi'(x)=-2\frac{\Gamma'(1-2x)}{\Gamma(1-2x)}$.

Скористаємось формулою Гауса [2, с. 772]: $\dfrac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\int\limits_0^1\frac{1-t^{a-1}}{1-t}\,dt - C$, де C – стала Ейлера, $C\approx 0,57721566490$.

Маємо: $\varphi'(x)=\int\limits_0^1\frac{1-t^x}{1-t}\,dt - C - 3\int\limits_0^1\frac{1-t^{-x}}{1-t}\,dt + 3C = 2C + \int\limits_0^1\frac{3t^{-x}-t^x-2}{1-t}\,dt$, $\psi'(x)=-2\int\limits_0^1\frac{1-t^{-2x}}{1-t}\,dt + 2C.$

Таким чином, достатньо довести, що при $t\in(0,1)$ та $x>0$

$3t^{-x}-t^x<2t^{-2x}$. (6)

Позначимо $t^{-x}=:y$. Тоді нерівність (6) еквівалентна нерівності: $3y^2-1<2y^3$, $(y-1)^2(2y+1)>0$, яка, очевидно, має місце при всіх $y=t^{-x}$, $x>0$ та $t\in(0,1)$.

Таким чином ми довели (5), а отже і те, що дискримінант рівняння (3) є від'ємним. Крім того, ми довели, що $c_1<\frac{(2H)^{1/2}}{\alpha+1}<1$. Таким чином, рівняння (2) не має дійсних коренів, коефіцієнт при x^2 в (2) додатний, отже $\frac{df}{dt}>0$, тобто $f(t)$ зростає по t. Тоді $\max\limits_{[0,T]} f(t)=f(T)$.

Оскільки

$f(T)=\mathrm{E}(B_T^H-aW_T)^2 = a^2T-2c_1T^{\alpha+1}a+T^{2H}$, (7)

шукаємо точку мінімуму квадратного тричлена (7) від a: $a_{\min}=\frac{2c_1\cdot T^{\alpha+1}}{2T}=c_1\cdot T^{\alpha}$.

Отже, $\min\limits_{\alpha}\max\limits_{t}\mathrm{E}(B_t^H-aW_t)^2=\left(c_1T^{\alpha}\right)^2T-2c_1^2T^{\alpha+1}T^{\alpha}+T^{2H}=c_1^2T^{2\alpha+1}-2c_1^2T^{2\alpha+1}+T^{2H}=T^{2H}-c_1^2T^{2H}$

Розглянемо тепер степеневу функцію зі сталим показником α.

Теорема 2. Нехай $a(s)$ – степенева функція виду $a(s)=k\cdot s^{\alpha}$, $k\in\mathbf{R}$, тоді $\min\limits_{k}\max\limits_{0\le t\le T}\mathrm{E}(B_t^H-M_t)^2=T^{2H}\left(1-\frac{c_H^2}{2H}\right)$, де $c_H=\left(\frac{2H\cdot\Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(H+\frac{1}{2})\cdot\Gamma(2-2H)}\right)^{1/2}$. Причому $k_{\min}=c_H$.

Доведення.

Оскільки $a(s)$ – степенева функція виду $a(s)=k\cdot s^{\alpha}$, то $M_t=\int\limits_0^t a(s)dW_s=k\int\limits_0^t s^{\alpha}dW_s$.

З цього випливає, що

$$\mathrm{E}(B_t^H-k\int\limits_0^t s^{\alpha}dW_s)^2=(\mathrm{E}B_t^H)^2-2k\mathrm{E}\left(B_t^H\int\limits_0^t s^{\alpha}dW_s\right)+k^2\mathrm{E}\left(\int\limits_0^t s^{\alpha}dW_s\right)^2=:g(t). \quad (8)$$

Знайдемо $\mathrm{E}\left(B_t^H\int\limits_0^t s^{\alpha}dW_s\right)$ та $\mathrm{E}\left(\int\limits_0^t s^{\alpha}dW_s\right)^2$:

$$\mathrm{E}\left(B_t^H\int\limits_0^t s^{\alpha}dW_s\right)=\mathrm{E}\left(\int\limits_0^t z(t,\ s)dW_s\int\limits_0^t s^{\alpha}dW_s\right)=\int\limits_0^t z(t,s)\ s^{\alpha}ds=\alpha c_H\int\limits_0^t\left(\int\limits_s^t u^{\alpha}(u-s)^{\alpha-1}du\right)ds=$$
$$=\alpha c_H\int\limits_0^t u^{\alpha}\left(\int\limits_0^u(u-s)^{\alpha-1}ds\right)du=c_H\int\limits_0^t u^{2\alpha}du=\frac{c_H}{2\alpha+1}t^{2\alpha+1}, \quad (9)$$

Далі, $\mathrm{E}\left(\int_0^t s^{\alpha} dW_s\right)^2 = \int_0^t s^{2\alpha} ds = \frac{t^{2H}}{2H}$.

Отже, (8) має вигляд: $g(t) = t^{2H} - 2k \cdot \frac{c_H t^{2H}}{2H} + k^2 \cdot \frac{t^{2H}}{2H} = t^{2H}\left(1 - k \cdot \frac{c_H}{H} + k^2 \cdot \frac{1}{2H}\right)$.

Взагалі, $\mathrm{E}(\ \cdot\ )^2$ не від'ємне, отже і $g(t)$ не від'ємна і не спадає по $t \in [0,\ T]$. Якщо квадратний тричлен $1 - k \cdot \frac{c_H}{H} + k^2 \cdot \frac{1}{2H} > 0$ для всіх k, то

$$\max_{[0,T]} g(t) = T^{2H}\left(1 - k \cdot \frac{c_H}{H} + k^2 \cdot \frac{1}{2H}\right) \tag{10}$$

Знайдемо точку мінімуму вказаного квадратного тричлена $1 - k \cdot \frac{c_H}{H} + k^2 \cdot \frac{1}{2H}$: $k_{\min} = c_H$, і при цьому

$$1 - k_{\min} \cdot \frac{c_H}{H} + k_{\min}{}^2 \cdot \frac{1}{2H} = 1 - \frac{c_H^2}{2H} = 1 - \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - H)}{\Gamma(H - \frac{1}{2})\Gamma(2 - 2H)}..$$

Перевіримо за допомогою формули Гаусса нерівність $\Gamma(\frac{3}{2} - H) < \Gamma(H + \frac{1}{2})\Gamma(2 - 2H)$, $\frac{1}{2} < H < 1$. Ця нерівність еквівалентна такій: $\Gamma(x) < \Gamma(2 - x)\Gamma(2x - 1)$, $\frac{1}{2} < x < 1$. При $x = 1$ маємо рівність, а для похідних потрібна нерівність $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} > -\frac{\Gamma'(2-x)}{\Gamma(2-x)} + 2\frac{\Gamma'(2x-1)}{\Gamma(2x-1)}$, або, з використанням формули Гаусса $\int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t} dt > -\int_0^1 \frac{1-t^{1-x}}{1-t} dt + 2\int_0^1 \frac{1-t^{2x-2}}{1-t} dt$, або ще $\int_0^1 \frac{t^{1-x} + t^{x-1} - 2t^{2x-2}}{1-t} dt < 0$, $\frac{1}{2} < x < 1$. При заміні $t^{x-1} = z$ чисельник перетворюється на $(1 - z)(1 + z + 2z^2) < 0$, оскільки $0 < t < 1$, $-\frac{1}{2} < x - 1 < 0$, і значить, $z > 1$.

Отже,

$$\min_k \max_{0 \le t \le T} \mathrm{E}(B_t^H - k\int_0^t s^{H - \frac{1}{2}} dW_s)^2 = T^{2H}\left(1 - c_H \cdot \frac{c_H}{H} + c_H^2 \cdot \frac{1}{2H}\right) = T^{2H}\left(1 - \frac{c_H^2}{2H}\right).$$ □

Розглянемо більш загальний випадок.

Для цього використаємо такі відомі факти з математичного аналізу [2]:

Означення. Нехай $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – функція від однієї змінної, тоді $g(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$, $x_1 \ne x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ – це функція нахилу.

Теорема 3. [2] Якщо f – строго опукла донизу, то функція g строго зростає по одній змінній при фіксованій другій.

Наслідок 1. Якщо функція f – строго опукла донизу, а g – функція нахилу при фіксованих x_1 та x_2, $x_1 \ne x_2$, тоді $g(x_1 + \alpha,\ x_2 + \alpha)$ строго зростає по $\alpha > 0$.

Теорема 4. Нехай $a(s)$ – степенева функція виду $a(s) = k \cdot s^{\gamma}$, $k \in \mathbf{R}$, $\gamma > 0$, тоді $\min_{\gamma} \min_k \max_{0 \le t \le T} \mathrm{E}(B_t^H - M_t)^2 = T^{2H}(1 - c_1^2(H))$, причому мінімум досягається при $\gamma = 0$ та $k_{\min} = c_1(H) \cdot T^{\alpha}$.

Доведення. Оскільки $a(s)$ – степенева функція виду $a(s) = k \cdot s^{\gamma}$, то $M_t = \int_0^t a(s) dW_s = k\int_0^t s^{\gamma} dW_s$.

Тоді, використовуючи (9) та рівність $\mathrm{E}\left(\int_0^t s^{\gamma} dW_s\right)^2 = \int_0^t s^{2\gamma} ds = \frac{t^{2\gamma+1}}{2\gamma+1}$, $2\gamma + 1 > 0$, маємо:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(B_t^H - k\int_0^t s^{\gamma} dW_s)^2 &= (\mathrm{E}B_t^H)^2 - 2k\mathrm{E}\left(B_t^H \int_0^t s^{\gamma} dW_s\right) + k^2 \mathrm{E}\left(\int_0^t s^{\gamma} dW_s\right)^2 = \\ &= t^{2H} - 2k \cdot c_2(H,\gamma) \cdot t^{\alpha+\gamma} + k^2 \cdot \frac{t^{2\gamma+1}}{2\gamma+1} =: h(t), \end{aligned} \tag{11}$$

де $c_2(H,\gamma) = \frac{\alpha\, c_H B(1 - \alpha + \gamma, \alpha)}{\alpha + \gamma + 1}$.

Продиференціюємо функцію h по t:

$$\frac{dh}{dt} = 2H \cdot t^{2H-1} - 2k\,c_2(H,\gamma)\cdot(\alpha+1+\gamma)\,t^{\alpha+\gamma} + k^2 \cdot \frac{1}{2\gamma+1}\cdot(2\gamma+1)t^{2\gamma} =$$

$$= t^{2H-1}\left(2H - 2k\,c_2(H,\gamma)\cdot(\alpha+1+\gamma)\,t^{-\alpha+\gamma} + k^2\cdot t^{-2\alpha+2\gamma}\right).$$

Перевіримо, чи $\exists\, t\in[0,T]$ таке, що $\frac{dh}{dt}=0$, тобто $k^2\cdot t^{-2\alpha+2\gamma} - 2kc_2(H,\gamma)\cdot(\alpha+1+\gamma)t^{-\alpha+\gamma} + 2H = 0$.

Зробимо заміну $k\cdot t^{-\alpha+\gamma} =: x$, отримаємо:

$$x^2 - 2c_2(H,\gamma)\cdot(\alpha+1+\gamma)\cdot x + 2H = 0. \tag{12}$$

Знайдемо дискримінант D_1 квадратного тричлена (13):

$$D_1 = 4c_2^2(H,\gamma)(\alpha+1+\gamma)^2 - 8H. \tag{13}$$

$D_1 < 0$ при $\frac{1}{2} < H < 1$, $\gamma > 0$. Доведемо це.

$$4\cdot\left(\frac{\alpha c_H B(1-\alpha+\gamma,\ \alpha)}{\alpha+\gamma+1}\right)^2\cdot(\alpha+\gamma+1)^2 - 8H = 4\cdot\alpha^2\cdot\frac{2H\cdot\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(1-2\alpha)}\cdot\left(\frac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)\cdot\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1+\gamma)}\right)^2 - 8H =$$
$$= 8H\cdot\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)}\cdot\left(\frac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}\right)^2 - 1\right). \tag{14}$$

Якщо в (14) $\alpha=0$, отримаємо (4). Вище вже довели, що цей дискримінант $D<0$.

Покажемо, що $D_1 < 0$ при $\gamma > 0$.

Покажемо, що вираз $\frac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} =: z(\gamma)$ із (14) спадає по $\gamma > 0$. Оскільки $z(\gamma) > 0$ при $\gamma > 0$, то все одно, що довести, що $\ln z(\gamma)$ – спадає по $\gamma > 0$.

Розглянемо $\ln\left(\frac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}\right) = (-\alpha)\cdot\frac{\ln(\Gamma(1+\gamma)) - \ln(\Gamma(1-\alpha+\gamma))}{(1+\gamma)-(1-\alpha+\gamma)}$; позначимо $\frac{\ln(\Gamma(1+\gamma)) - \ln(\Gamma(1-\alpha+\gamma))}{(1+\gamma)-(1-\alpha+\gamma)} =: \omega(\gamma)$

Зауважимо, що $\ln\Gamma(x)$ –опукла донизу функція. З наслідку 1 випливає тоді, що функція нахилу $\omega(\gamma)$ зростає по γ, а $-\alpha = \frac{1}{2} - H < 0$ і не залежить від γ, тому $\ln z(\gamma)$ буде спадати по γ, отже сам вираз $z(\gamma)$ при $\gamma > 0$ буде менше, ніж $\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1-\alpha)$. Таким чином, при $\alpha > 0$ $\frac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} < \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)}$. Отже $D_1 < D < 0$, де вираз для D треба взяти з формули (4). Коефіцієнт при x^2 в (12) додатний, отже графік функції опуклий донизу, тоді $\frac{dh}{dt} > 0$, тобто функція h зростає по t. Тоді $\max\limits_{[0,T]} h(t) = h(T) = \mathrm{E}(B_T^H - k\int_0^T s^\gamma dW_s)^2$. Оскільки

$$h(T) = h(T,\gamma,k) = T^{2H} - 2k\cdot c_2(H,\gamma)\cdot T^{H+\frac{1}{2}+\gamma} + k^2\cdot\frac{T^{2\gamma+1}}{2\gamma+1}, \tag{15}$$

то мінімізуємо квадратний тричлен (15) по k: $k_{\min} = k_{\min}(\gamma) = \frac{2c_2(H,\gamma)\cdot T^{\alpha+1+\gamma}}{2\cdot\frac{T^{2\gamma+1}}{2\gamma+1}} = (2\gamma+1)\cdot c_2(H,\gamma)\cdot T^{\alpha-\gamma}$. Отже,

$$\min_{k\in\mathbf{R}}\max_{0\le t\le T}\mathrm{E}(B_t^H - k\int_0^t s^\gamma dW_s)^2 = T^{2H} - 2(2\gamma+1)\cdot c_2^2(H,\gamma)\cdot T^{\alpha-\gamma}\cdot T^{\alpha+1+\gamma} +$$
$$+(2\gamma+1)^2\cdot c_2^2(H,\gamma)\cdot T^{2\alpha-2\gamma}\cdot\frac{T^{2\gamma+1}}{2\gamma+1} = T^{2H} - 2(2\gamma+1)\cdot c_2^2(H,\gamma)\cdot T^{2H} + (2\gamma+1)\cdot c_2^2(H,\gamma)\cdot T^{2H} = \tag{16}$$
$$= T^{2H} - (2\gamma+1)\cdot c_2^2(H,\gamma)\cdot T^{2H}.$$

Мінімізуємо (16) по γ. Для цього треба знайти, в якій точці досягається $\max\limits_{\gamma\geq 0}(2\gamma+1)c_2^2(H,\gamma)$ або, що еквівалентно, точку, в якій досягається $\max\limits_{\gamma\geq 0}\frac{\sqrt{2\gamma+1}}{\alpha+\gamma+1}\frac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}$, в залежності від $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$. Розглянемо функцію $g(\gamma):=\frac{\sqrt{2\gamma+1}}{\alpha+\gamma+1}\frac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}$, $\gamma\geq 0$. Її похідна, з точністю до додатного множника, дорівнює $\Gamma(1+\gamma)\Gamma(1-\alpha+\gamma)(\alpha+\gamma+1)\sqrt{2\gamma+1}\left(\frac{\Gamma'(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}-\frac{\Gamma'(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}+\frac{1}{2\gamma+1}-\frac{1}{\alpha+\gamma+1}\right)$. Знайдемо знак функції $p(\gamma,\alpha):=\frac{\Gamma'(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}-\frac{\Gamma'(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}+\frac{1}{2\gamma+1}-\frac{1}{\alpha+\gamma+1}$, $\gamma\geq 0$. За формулою Гаусса $p(\gamma,\alpha)=\int\limits_0^1\frac{t^\gamma-t^{\gamma-\alpha}}{1-t}dt+\frac{1}{2\gamma+1}-\frac{1}{\alpha+\gamma+1}$, $\gamma\geq 0$.

Якщо $\alpha=0$, то $p(\gamma,0)<0$. Крім того, $\frac{\partial p(\gamma,\alpha)}{\partial\alpha}=\int\limits_0^1\frac{t^{\gamma-\alpha}\ln t}{1-t}dt+\frac{1}{(\alpha+\gamma+1)^2}$. На відрізку $[0,1]$ $\left|\frac{\ln t}{1-t}\right|\geq 1$ і $\ln t<0$. Тому $\frac{\partial p(\gamma,\alpha)}{\partial\alpha}<-\int\limits_0^1 t^{\gamma-\alpha}dt+\frac{1}{(\gamma+\alpha+1)^2}=-\frac{1}{\gamma-\alpha+1}+\frac{1}{(\gamma+\alpha+1)^2}=\frac{-\gamma^2-\alpha^2-2\gamma\alpha-3\alpha-\gamma}{(\gamma-\alpha+1)(\gamma+\alpha+1)^2}<0$.

Отже, $p(\gamma,\alpha)<0$ при всіх $\gamma\geq 0$. Це і означає, що похідна функції $g(\gamma)$ від'ємна при всіх $\gamma\geq 0$, а значить $\max\limits_{\gamma\geq 0}(2\gamma+1)c_2^2(H,\gamma)$ і, відповідно $\min\limits_{\gamma}$ в (16) досягається в точці $\gamma=0$. Таким чином,

$$\min_{\gamma\geq 0}\ \min_{k\in\mathbf{R}}\max_{0\leq t\leq T}\mathrm{E}(B_t^H-k\int\limits_0^t s^\gamma dW_s)^2=\max_{0\leq t\leq T}\mathrm{E}(B_t^H-k_{\min}W_t)^2=T^{2H}(1-c_2^2(H,0))=T^{2H}(1-c_1^2),$$

і з усіх степеневих функцій найкраще наближення надає стала функція. □

Зауваження 2. Покажемо, що в теоремі 4 $\min\limits_{\gamma,k}h(T,\gamma,k)=\min\limits_{\gamma}\min\limits_{k}h(T,\gamma,k)$, де мінімум береться по $\gamma\geq 0$, $k\in\mathbf{R}$. Справді, нехай $\min\limits_{\gamma,k}h(T,\gamma,k)=h(T,\gamma_0,k_0)$. Тоді, очевидно, $k_0=k_{\min}(\gamma_0)$, а тоді і $\gamma_0=0$. Крім того, $\lim\limits_{\gamma\to\infty}h(T,\gamma,k)=\begin{cases}T^{2H}, & якщо\ T\leq 1\\ \infty, & якщо\ T>1\end{cases}$, тобто мінімум справді досягається в деякій скінченній точці.

3. Висновки.

В статті розглянуто найпростіші мартингали найкращого наближення до дробового броунівського руху.

1. *Андрощук Т.* Наближення стохастичного інтегралу по дробовому броунівському руху інтегралами по абсолютно неперервним процесам // Теор. ймов. та мат. статистика. – 2005. – 73. 2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. 2. – М., 1969. 3. *Androshchuk T., Mishura Y.* Mixed Brownian–fractional Brownian model: absence of arbitrage and related topics // Stochastics: An Int.J.Prob.Stoch.Proc. – 2006. – 78. 4. *Norros I., Valkeila E., Virtamo J.* An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions // Bernoulli. – 1999. – 5(4). 5. *Thao T.H.* A note on fractional Brownian motion // Vietnam J. Math. – 2003. – 31, № 3.

Надійшла до редколегії 20.03.2007

УДК 519.21

З. Вижва, канд. фіз.-мат. наук, О. Зражевський, асп.
E-mail: vsa@univ.kiev.ua

ПРО СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ НА ПЛОЩИНІ.

Розглянута задача статистичного моделювання реалізацій однорідних та ізотропних випадкових полів на площині на основі їх спектрального розкладу. Обчислено спектральні коефіцієнти для практично важливих кореляційних функцій випадкових полів. Наведена теорема про середньоквадратичну оцінку апроксимації таких випадкових полів частковими сумами ряду. Побудовано модель та сформульовано алгоритм статистичного моделювання реалізацій однорідних та ізотропних випадкових полів на площині.

The problem of statistical simulation of homogeneous and isotropic random fields on the plane realizations has been considered, which was build on the base of it spectral decomposition. It has been calculate the spectral coefficients for the typical random fields examples . It has been give the theorem about the mean - square estimator of this random fields approximation by the partial sums.. It has been constructed the model and statistical simulation of homogeneous and isotropic random fields algorithm.

1. Вступ

Розглядається задача статистичного моделювання реалізацій однорідних та ізотропних випадкових полів на площині, розроблена на основі спектрального розкладу таких полів. Наведено обчислення спектральних коефіцієнтів для деяких практично важливих прикладів кореляційних функцій випадкових полів, які використовуються у моделюючому алгоритмі.

Нехай $\xi(x)$ ($x\in R^2$) - дійснозначне однорідне та ізотропне випадкове поле на площині. Як відомо [6], кореляційну функцію однорідного та ізотропного випадкового поля можна подати у вигляді інтегралу:

$$B(\rho)=\int\limits_0^\infty J_0(\rho u)d\Phi(u), \qquad (1)$$

де $\Phi(u)$ – обмежена незростаюча функція, що називається **спектральною функцією** випадкового поля, а $J_0(x)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Припустимо, що випадкове поле $\xi(x)$ - неперервне в середньому квадратичному. Позначимо через r та φ ($r\in R_+$, $\varphi\in[0, 2\pi]$) – полярні координати точки x на площині. При цьому, відстань між точками $x_1 = (r_1,\varphi_1)$ та $x_2 = (r_2,\varphi_2)$ буде рівною $\rho = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\ r_1 r_2 \cos\ (\varphi_1 - \varphi_2)}$. Тоді справедливе наступне твердження:

Теорема 1. Неперервне в середньому квадратичному однорідне та ізотропне випадкове поле на площині $\xi(r,\varphi)$ можна подати у вигляді **спектрального розкладу:**

$$\xi(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\nu^k} \left(\cos k\varphi \int_0^{\infty} J_k(ru) Z^1{}_k(du) + \sin k\varphi \int_0^{\infty} J_k(ru) Z^2{}_k(du) \right), \tag{2}$$

де $\nu^k = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 2, & k > 0, \end{cases}$ $\left\{ Z^i{}_k(.) \right\}_{k=0}^{+\infty}$ $(i = 1,\ 2)$ - послідовність дійснозначних ортогональних випадкових мір на підмножинах Бореля із інтервалу $[0,+\infty)$, таких, що виконується умова:

$\mathrm{M} Z^i{}_k(S_1) Z^j{}_n(S_2) = \delta_i^j \delta_k^n \Phi(S_1 \cap S_2), (i,j = 1,\ 2),$ для будь-яких множин Бореля S_1 та S_2 із інтервалу $[0,+\infty)$, причому: $\Phi(S) = \int_S d\Phi((u)$. Доведення теореми міститься в роботі [4] .

Кореляційна функція такого випадкового поля має вигляд:

$$B(\varphi_1 - \varphi_2) = \mathrm{M}\xi(r_1,\varphi_1)\xi(r_2,\varphi_2) = \int_0^{\infty} J_0(2ur \sin\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}) d\Phi(u)\ . \tag{3}$$

Спектральні коефіцієнти в цьому випадку можна виразити через спектральну функцію так:

$$b_k(r) = 2\int_{0\_}^{\infty} J_k^2(ru) d\Phi(u). \tag{4}$$

Якщо скористатись співвідношенням 6.681 [2] та врахувати вираз (3), отримаємо зображення спектральних коефіцієнтів через кореляційну функцію, що залежить від $\sin\varphi$

$$b_k(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{B}(2r\sin\varphi)\ \cos 2k\varphi d\varphi.\ k = 1,2,... \tag{5}$$

Можна також використати до виразу (4) співвідношення 6.681.5 [2] . Тоді матимемо зображення спектральних коефіцієнтів через кореляційну функцію, що залежить від $\cos\varphi$

$$b_k(r) = (-1)^k \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} B(2r\cos\varphi)\cos 2k\varphi d\varphi,\ \ k = 1,2,... \tag{6}$$

Після теоретичних викладок перейдемо до розгляду прикладів кореляційних функцій для такого типу випадкових полів.

Приклад 1. Нехай спектральна функція $\Phi(u)$ – **ступінчата** функція, яка має скінчене число **p** стрибків (стрибки - в точках $c_1, c_2, ..., c_p$, а величини стрибків – $u_1, u_2, \ldots, u_p$).
Тоді відповідна кореляційна функція зображається формулою:

$$B\ \ (\varphi_1 - \varphi_2) = \sum_{k=1}^{p} J_0\ \ (2\ \ c_k r\ \left| \sin\ \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right|)\ u_k. \tag{7}$$

Приклад 2. В геологічних науках знаходять застосування кореляційні функції випадкових полів, які називаються функціями **експоненціального** типу. Вони мають наступний вигляд:

$$B(t) = e^{-at},\ \ a > 0. \tag{8}$$

Приклад 3. Розглянемо кореляційні функції , які називаються **Гауссівськими** кривими. Вони зображаються наступною формулою:

$$B(t) = e^{-at^2},\ \ a > 0. \tag{9}$$

Приклад 4. Заслуговує уваги кореляційна функція **модифікованого Бесселевого** типу:

$$B(\rho) = a\rho K_1(a\rho),\ \ a > 0, \tag{10}$$

де $K_1(x)$ – функція Ганкеля.

Приклад 5. Наступна кореляційна функція виражається через добре відому **Бесселеву** функцію першого роду. Вона зображається формулою:

$$B(\rho) = \frac{2J_1(a\rho)}{a\rho},\ \ a > 0. \tag{11}$$

Приклад 6. Наведемо широко відому кореляційну функцію, яка зветься **моделлю Коші**. Узагальнена **модель Коші** має вигляд:

$$B(\rho) = \left(1 + \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{-\alpha},\ \ \alpha > 0,\ a > 0. \tag{12}$$

Ми будемо використовувати модель Коші при значенні параметра $\alpha = 1/2$. Вона виражається формулою:

$$B(\rho) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \rho^2}},\ \ a > 0. \tag{13}$$

Спектральні коефіцієнти для прикладів 1-6 обчислено в роботі [4]. Далі наведено дуже важливі для практичного застосування приклади кореляційних функцій однорідних та ізотропних випадкових полів на площині та виведено формули для відповідних спектральних коефіцієнтів

Приклад 7. Часто знаходять застосування кореляційні функції **поліноміального** типу. Найпростішим прикладом такого типу є так звана **сферична** модель:

$$B(\rho) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}\frac{\rho}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{a}\right)^3, & \rho \le a; \\ 0, & \rho > a. \end{cases} \tag{14}$$

При **a** ∈ **[** **π, +∞)** знайдемо спектральні коефіцієнти кореляційної функції за формулою (5). Тоді отримаємо вираз:

$$b_k(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(1-3\frac{r}{a}\sin\varphi+4\left(\frac{r}{a}\right)^3\sin^3\varphi\right)\cos 2k\varphi\, d\varphi.\ k=1,2,... \tag{15}$$

Для обчислення цього інтегралу скористаємося значенням табличного інтегралу із роботи [2, с. 388] :

$$\int_0^\pi \sin^{\nu-1}x\,\cos ax\,dx = \frac{\pi\cos\frac{a\pi}{2}}{2^{\nu-1}\,\nu\,\beta\left(\frac{\nu+a+1}{2},\frac{\nu-a+1}{2}\right)}$$

Після деяких спрощень із (15) отримаємо вираз для спектральних коефіцієнтів кореляційної функції, що розглядається:

$$b_k(r) = \frac{r\cos k\pi\,(2r^2-a^2(9-4k^2))}{8a^3\,\beta\left(\frac{5}{2}+k,\frac{5}{2}-k\right)},\ k=0,1,2,..., \tag{16}$$

де $\beta(x,y)$ - бета-функція.

Приклад 8. На практиці часто зустрічається модель випадкових полів, яка має назву **експоненціально затухаючої косинусоїди**. Така кореляційна функція має вигляд:

$$B(\rho) = c\,e^{-a\rho}\cos\omega\rho,\ c>0,\ a>0,\ \omega>0. \tag{17}$$

Знайдемо відповідні спектральні коефіцієнти кореляційної функції за формулою (6). Тоді отримаємо вираз:

$$b_k(r) = (-1)^k\frac{2}{\pi}\int_0^\pi c\exp(-a\;2\;r\cos\varphi)\cos(\omega 2\;r\cos\varphi)\cos 2k\varphi\,d\varphi,\ k=1,2,... \tag{18}$$

Позначивши через $\alpha = a\;2\;r$ та $\beta = \omega\;2\;r$, обчислимо наступний інтеграл:

$$I = \int_0^\pi c\exp(-\alpha\cos\varphi)\cos(\beta\cos\varphi)\cos 2k\varphi\,d\varphi,\ k=1,2,... \tag{19}$$

Скориставшись наступною формулою : $\cos(\beta\cos\varphi) = \frac{1}{2}\left[\exp(i\beta\cos\varphi)+\exp(-i\beta\cos\varphi)\right]$, розіб'ємо інтеграл (19) на два інтеграли I_1 та I_2:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\pi\left\{\exp\left[(-\alpha+i\beta)\cos\varphi\right]+\exp\left[(-\alpha-i\beta)\cos\varphi\right]\right\}\cos 2k\varphi\,d\varphi = (I_1+I_2)/2,\ k=1,2,... \tag{20}$$

Для обчислення першого інтегралу введемо наступне позначення : $\gamma_1 = -\alpha + \beta$. Тоді маємо:

$$I_1 = \int_0^\pi \exp(\gamma_1\cos\varphi)\cos 2k\varphi\,d\varphi = \left|\begin{matrix} t=\cos\varphi & d\varphi = \frac{dt}{-\sqrt{1-t^2}} \\ d = -\sin\varphi\,d\varphi & \end{matrix}\right| =$$

$$I_1 = \int_1^{-1}\exp(\gamma_1 t)\cos(2k\arccos t)\frac{dt}{-\sqrt{1-t^2}} = \int_{-1}^1\exp(\gamma_1 t)\cos(2k\arccos t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{21}$$

Оскільки в підінтегральному виразі містяться многочлени Чебишева першого роду:

$$T_{2k}(t) = 2\;k\arccos t,\ k=0,1,2,\ldots \tag{22}$$

то внаслідок використання табличного інтегралу [5, с. 453] :

$$\int_{-a}^a \exp(ipx)\,T_n\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = i^n\pi J_n(ap),\quad a>0,$$

остаточно для першого інтегралу I_1 маємо вираз:

$$I_1 = \int_{-1}^1\exp(\gamma\;t)\,T_{2k}(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = i^{2k}\,\pi\,J_{2k}(-i\;\gamma_1) = (-i)^k\,\pi\,J_{2k}(-i\;\gamma_1),\ a>0. \tag{23}$$

Аналогічно для другого інтегралу I_2 із формули (20) отримаємо:

$$I_2 = \int_{-1}^1\exp(\gamma_2\;t)\,T_{2k}(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = (-i)^k\,\pi\,J_{2k}(-i\;\gamma_2),\ де\ \gamma_2 = -\alpha - i\beta. \tag{24}$$

Підставляючи (23) та (24) у вираз (20), маємо для інтегралу I наступний вираз:

$$I = \frac{1}{2}(-i)^k\,\pi\left[J_{2k}(\beta+i\alpha)+J_{2k}(-\beta+i\alpha)\right]. \tag{25}$$

Отже, враховуючи (25), можна отримати формулу для обчислення спектральних коефіцієнтів випадкових полів із кореляційною функцією типу **експоненціально затухаючої косинусоїди** у вигляді :

$$b_k(r) = c\ \left[J_{2k}\left(2\omega r + i2kr\right) + J_{2k}\left(-2\omega r + i2kr\right)\right]. \tag{26}$$

Результати обчислень спектральних коефіцієнтів для практично важливих кореляційних функцій однорідних та ізотропних випадкових полів на площині наведено внаступній таблиці.

***Таблиця 1*. Кореляційні та спектральні функції і відповідні спектральні коефіцієнти однорідних ізотропних випадкових полів на площині.**

N N	$B(\rho)$	$\Phi\ (\lambda)$	$b_k(r)$
1 1	$\sum\limits_{m=1}^{s} p_m\ J_0\ (\ 2\ c_m\ \ \rho\ \left\lvert \sin\frac{\varphi}{2}\right\rvert),$ $\sum\limits_{m=1}^{s} p_m = 1,\ p_m > 0,\ c_m \ge 0.$	$\begin{cases} 0,\ \lambda \le c_1, \\ \sum\limits_{m=1}^{i} p_m,\ c_i < \lambda \le c_{i+1},\ i = \overline{1, s-1} \\ 1,\ \lambda > c_s \end{cases}$	$2\ \sum\limits_{m=1}^{s} p_m J_k^2\ (c_m\ \ r)$
2 2	$\exp\ \{\ -c\ \ \rho\},\ c > 0\ ,\ n \ge 1$	$\frac{c}{\pi}\ \frac{\lambda}{\left(\ \lambda^2 + c^2\ \right)^{\frac{3}{2}}}$	$2\ J_{2k}\ \ (2\ \ i\ \ c\ \ r)$
3 3	$\exp\ \left\{-c\ \ \rho^2\right\},\ c > 0$	$\Phi'(\lambda) = \frac{\lambda}{2\ c}\ \exp\ \left\{-\ \frac{\lambda^2}{2\ c}\right\}$	$\exp\ \left\{\ -2\ \ c\ \ r^2\right\}\ I_k\ \ \ (2\ \ \ c\ \ r^2)$ $I_k(x)$ – модифікована функція Бесселя
4 4	$2\ \frac{J_1(c\ \ \rho)}{c\ \ \rho},\ c \ge 0.$	$\begin{cases} \left(\frac{\lambda}{c}\right)^2, & 0 < \lambda < c, \\ 1, & \lambda \ge c. \end{cases}$	$2\left[\ J_k^2\ (c\,r) - J_{k+1}\ (c\,r)\ J_{k-1}(c\,r)\ \right]$
5 5	$c\ \ \rho\ \ K_1(c\ \ \ \rho),\ c > 0$	$\Phi'(\lambda)\ = 2\ \frac{c^2\lambda}{\left(\ \lambda^2 + c^2\ \right)^2}$	$2\ +\ 2\ (\ k-2\ )\ K_k\left(c\ \ \ r\right)\ I_k\left(c\ \ r\right)$ де ***K₁(x)*** – функція Ганкеля
6 6	$\frac{c}{\sqrt{\rho^2 + c^2}},\ c > 0,\ n > 1.$	$\Phi'(\lambda)\ = c\ \ e^{-c\,\lambda}$	$\frac{2}{\pi}\ \frac{c}{r}\ Q_{k-\frac{1}{2}}\ \left(\frac{c^2 + 2\ \ r^2}{2\ \ r^2}\right),$ де $\boldsymbol{Q_p(y)}$ – функція Лежандра
7 7	$\begin{cases} 1\ -\ \frac{3}{2}\ \frac{\rho}{a}\ +\ \frac{1}{2}\ \left(\frac{\rho}{a}\right)^3, & \rho \le a; \\ 0, & \rho > a. \end{cases}$		$\frac{r\ \ \cos k\ \ \pi\ \ (2\ \ r^2 -\ a^2\ \ (9\ -\ 4\ \ k^2)\ )}{8\ \ a^3\ \ \beta\ \left(\frac{5}{2}\ +\ k,\ \frac{5}{2}\ -\ k\right)}$ де β ***(x,y)*** - бета-функція
8 8	$c\ \ e^{-a\,\rho}\ \ \cos\ \ \omega\rho\ ,$ $c\ ,\ a\ ,\ \omega > 0,\ \rho \in \left[\ 0,\ 1\right]$		$c\ \left[\ J_{2k}\ \ \ (2\ \ \ \omega\ \ \ r + i\ \ \ 2a\ \ \ r) + \right.$ $\left. +\ J_{2k}\ \ \ (-2\ \ \ \omega r\ \ +\ \ i\ \ 2\ \ a\ \ r)\ \right]$

Отримані спектральні коефіцієнти можна використовувати для статистичного моделювання випадкових полів за алгоритмом, сформульованим у роботі [7] . Наведемо його.

За статистичну **модель** випадкового поля, що розглядається, приймається часткова сума ряду (2) виду:

$$\xi_N(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{N} \sqrt{\nu_k}\ \left[\cos k\varphi\ \int_0^{\infty} J_k(\lambda\ \ r)\ \ Z_k^1(d\lambda) + \sin k\varphi\ \int_0^{\infty} J_k(\lambda\ \ r)\ \ Z_k^2(d\lambda)\right], \tag{27}$$

де **N** – деяке натуральне число.

При цьому значення числа **N** визначається за допомогою нерівності, яка є оцінкою наближення випадкового поля $\xi(r,\varphi)$ частковими сумами $\xi_N(r,\varphi)$ в середньому квадратичному. Таке число має відповідати наперед заданому як завгодно малому числу ε **-** точності наближення. Згадана нерівність отримана в роботі [7] (доведення наведено далі).

Теорема 2. Нехай виконується умова $\int_0^{\infty} \lambda^2\ \ d\ \ \ \Phi(\lambda) < +\infty$.Тоді справедлива оцінка:

$$\mathrm{M}\ \left[\ \xi(r,\varphi) - \xi_N(r,\varphi)\ \right]^2 \le \frac{1}{\pi\ \ N}\ \left(\ \frac{1}{2}\ \ r\ \ \mu\ _1\ +\ r^2\ \ \mu\ _2\right), \tag{28}$$

де $\mu_k = \int_0^{\infty} \lambda^k d\ \ \ \Phi\ \ (\lambda).$

Доведення:

Для доведення достатньо зауважити, що: $\mathrm{M} \int\limits_{|x| \le Q} \left[\xi(r,\varphi) - \xi_N(r,\varphi)\right]^2 d\ \ \ x = 2\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}\ \int_0^{\infty} J_k^{\ 2}(\lambda\ \ \ r)\ \ d\ \ \ \Phi\ \ (\lambda)$

та застосувати твердження наступної леми .

Лема . Для кожного дійсного та натурального справедлива нерівність:

$$\sum_{kN+1}^{\infty} J_k^2(z) \le \frac{1}{2\pi}\ \frac{1}{N}\ \left(\frac{1}{2}\ \lvert\ z\ \rvert\ +\ z^2\right). \tag{29}$$

Доведення: Приймемо до уваги теорему додавання для бесселевих функцій - співвідношення 8.531 [1]:

$$J_0\left(\lambda\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}\right)=J_0(\lambda r_1)J_0(\lambda r_2)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_k(\lambda r_1)J_k(\lambda r_2)\cos k(\varphi_1-\varphi_2).$$

Звідси випливає, що : $J_0\left(2z\sin\frac{\varphi}{2}\right)=J_0^2(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_k^2(z)\cos k\varphi.$

Це означає, що $\left\{2J_k^2(z),\ m\ge 1\right\}$ є послідовність коефіцієнтів Фур'є функції $J_0\left(2z\sin\frac{\varphi}{2}\right)$.

Друга похідна цієї функції дорівнює:

$$\left[J_0\left(2z\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]''=\frac{1}{2}z\sin\frac{\varphi}{2}J_1\left(2z\sin\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{1}{2}z^2\cos^2 k\varphi\left[J_0\left(2z\sin\frac{\varphi}{2}\right)-J_2\left(2z\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

Звідси випливає: $\sup\limits_{-\pi\le\varphi\le\pi}\left[J_0\left(2z\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]''\le\frac{1}{2}|z|+z^2$. Тому справедлива нерівність: $2J_k(z)\le\dfrac{\frac{1}{2}|z|+z^2}{k^2\pi}$.

Отже, остаточно отримаємо: $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}J_k^2(z)\le\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}|z|+z^2\right)\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\le$

$$\le\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}|z|+z^2\right)\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{\pi N}\left(\frac{1}{2}|z|+z^2\right).$$

Лема **доведена**.

На основі моделі (27) та оцінки (28) можна побудувано алгоритм статистичного моделювання гауссівського однорідного ізотропного випадкового поля $\xi(r,\varphi)$ на площині, яке задається своїми статистичними характеристиками: математичним сподіванням та кореляційною функцією.

2. Алгоритм.

1. Визначається значення числа **N**, відповідно наперед заданому числу ε**,** за допомогою нерівності (28) :

$$\frac{1}{\pi N}\left(\frac{1}{2}r\mu_1+r^2\mu_2\right)\le\varepsilon$$

, де **r** – радіус точки площини, в якій генерується реалізація випадкового поля $\xi(r,\varphi)$.

2. Обчислюються спектральні коефіцієнти $b_k(r)$ $(k=0,1,2,...)$ для прикладу кореляційної функції, що моделюється.

3. Генеруються набори незалежних стандартних гауссівських випадкових величин $\{\zeta_k(r),\ k=0,1,2,...,N\}$ та $\{\eta_k(r),\ k=0,1,2,...,N\}$.

4. Обчислюються значення реалізації у вигляді суми при підстановці в неї знайдених за попередніми пунктами величин :

$$\xi_N(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{N}\sqrt{\nu_k b_k(r)}\left[\zeta_k(r)\cos k\varphi+\eta_k(r)\sin k\varphi\right].\qquad(30)$$

5. Знаходиться статистична оцінка для кореляційної функції по отриманій реалізації випадкового поля $\xi(r,\varphi)$ за допомогою програм **S-Plus, GeoR** і порівнюється із заданою кореляційною функцією $B(\rho)$, а також проводиться статистичний аналіз цієї реалізації на адекватність.

3.Висновки

Слід відзначити, що наведений алгоритм можна застосувати і до випадкових полів з іншим типом розподілу ,а не лише з гаусівським.

1.*Бэйтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции.- М., 1974. 2. *Вижва З.О.* Про статистичне моделювання стаціонарних періодичних випадкових процесів (ч. 1) //Вісн. Київ. ун-ту. Математика і Механіка. – 2003. - Вип.10. – С.85-91. 3. *Вижва З.О.* Про статистичне моделювання стаціонарних періодичних випадкових процесів (ч. 2) //Вісн. Київ. ун-ту. Математика і Механіка. —2004. - Вип. 11-12. – С.20-24. 4. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М., 1971. 5. *Прудников А.П., БричковЮ.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды: специальные функции. - М, 1983. 6.*Ядренко М.И.* Спектральная теория случайных полей. - К., 1980. 7. *Grikh Z.,Yadrenko M., Yadrenko O.* About Approximation and Statistical Simulation of Izotropic Fields. //Rand. Operators and Stoh. Eq.- 1993. - Vol. 1, No. 1, - P. 37-45.

Надійшла до редколегії 02.10.2007

УДК 519.21

О. Кубайчук, канд.фіз.-мат.наук
katrissa@voliacable.com

АСИМПТОТИКА ОЦІНКИ ДЛЯ БАЄСОВОГО ПОРОГУ

Розглянуто асимптотику оцінки для баєсового порогу, побудованої методом мінімізації емпіричного ризику і методом емпірично-баєсової класифікації для порогових класифікаторів для вибірки із суміші зі змінними концентраціями.

The asymptotic of the estimator for Bayesian border that is constructed by the Empirical Risk Minimization method and the method of the Empirical-Bayesian Classification for border classifiers for the sample from mixture with varying concentrations is considered.

1. Вступ

Розглядається задача класифікації деякого об'єкту O за спостереженням його числової характеристики $\xi=\xi(O)$. Вважаємо, що об'єкт може належати лише одному з двох класів. Розглядаємо порогові класифікатори вигляду

$$g^1_{t_1,t_2}(\xi) = \begin{cases} 1, \text{ при } \xi \in [t_1, t_2], \\ 2, \text{при } \xi \notin [t_1, t_2], \end{cases} \quad (27)$$

тобто об'єкт відносять до першого класу, якщо його характеристика потрапляє в проміжок $[t_1, t_2]$ і до другого класу в іншому випадку. Приклад такої класифікації – визначення людини (об'єкт) як хворої (другий клас), якщо її температура (характеристика ξ) перевищує 37° (або рівень гемоглобіну в крові перевищує 84 одиниці) (поріг t_2) і є меншою за 36° (рівень гемоглобіну є меншим за 72 одиниці) (поріг t_1). Можливий також варіант

$$g^2_{t_1,t_2}(\xi) = \begin{cases} 1, \text{ при } \xi \notin [t_1, t_2], \\ 2, \text{при } \xi \in [t_1, t_2]. \end{cases} \quad (28)$$

Найкращим (баєсовим) вважають поріг $\overline{t}^B = (t_1^B, t_2^B)$, при якому $g^i_{t_1,t_2}$, $i = 1,2$ має найменшу ймовірність помилки. Об'єкт O, у якого спостерігається деяка числова характеристика $\xi = \xi(O)$, може належати одному з двох класів; невідомий номер класу, якому належить O позначимо $ind(O)$. Вважаються відомими апріорні ймовірності $p_i = P(ind(O) = i)$, $i = 1,2$. Характеристика ξ – випадкова, її розподіл залежить від $ind(O)$: $P(\xi(O) < x | ind(O) = i) = H_i(x)$. Розподіли H_i невідомі, але будемо вважати, що вони мають неперервні щільності відносно міри Лебега – h_i.

2. Методи оцінки і основні результати

Множину всіх класифікаторів позначимо G. Ймовірність помилки класифікатора:

$$L(g^1_{\overline{t}}) = L^1(\overline{t}) = P\{g^1_{\overline{t}}(\xi(O)) \neq ind(O)\} = \sum_{i=1}^{2} P\{ind(O) = i\} P\{g^1_{\overline{t}}(\xi(O)) = 3 - i | ind(O) = i\} =$$

$$= p_1(H_1(t_1) + 1 - H_1(t_2)) + p_2(H_2(t_2) - H_2(t_1)),$$

$$L(g^2_{\overline{t}}) = L^2(\overline{t}) = P\{g^2_{\overline{t}}(\xi(O)) \neq ind(O)\} = \sum_{i=1}^{2} P\{ind(O) = i\} P\{g^2_{\overline{t}}(\xi(O)) = 3 - i | ind(O) = i\} =$$

$$= p_1(H_1(t_2) - H_1(t_1)) + p_2(H_2(t_1) + 1 - H_2(t_2)).$$

Баєсовим класифікатором у класі G називають класифікатор $g^B \in G$, на якому досягається мінімум $L(g)$:

$$g^B = \arg\min_{g \in G} L(g_{\overline{t}}).$$

Поріг $\overline{t}^B$ баєсового класифікатора є баєсовим порогом: $\overline{t}^B = \arg\min_{\overline{t} \in R^2} L(\overline{t})$.

Для $g^1_{\overline{t}}$ маємо: $\overline{t}^{1B} = \arg\min_{t_1 \in R, t_2 \in R} L^1(t_1, t_2) = (\arg\min_{t_1 \in R} L^1(t_1, t_2), \arg\min_{t_2 \in R} L^1(t_1, t_2)) = (\arg\min_{t_1 \in R} L^1_1(t_1), \arg\min_{t_2 \in R} L^1_2(t_2))$

де $L^1_1(t_1) = p_1 H_1(t_1) - p_2 H_2(t_1)$, $L^1_2(t_2) = p_1(1 - H_1(t_2)) + p_2 H_2(t_2)$.

Для $g^2_{\overline{t}}$ маємо: $\overline{t}^{2B} = \arg\min_{t_1 \in R, t_2 \in R} L^2(t_1, t_2) = (\arg\min_{t_1 \in R} L^2(t_1, t_2), \arg\min_{t_2 \in R} L^2(t_1, t_2)) = (\arg\min_{t_1 \in R} L^2_1(t_1), \arg\min_{t_2 \in R} L^2_2(t_2))$

де $L^2_1(t_1) = -p_1 H_1(t_1) + p_2 H_2(t_1)$, $L^2_2(t_2) = p_1 H_1(t_2) + p_2(1 - H_2(t_2))$.

Найкращим (баєсовим) вважають поріг $\overline{t}^B = (t_1^B, t_2^B)$, при якому g_{t_1,t_2} має найменшу ймовірність помилки. При цьому виникає проблема вибору (оцінки) порогу на основі навчаючої вибірки. Найбільш поширеними методами оцінювання $\overline{t}^B$ за повністю класифікованою вибіркою є емпірично-баєсова класифікація (ЕБК) [3;5] та метод мінімізації емпіричного ризику (МЕР) [2;7].

Розглянемо перший метод. Вважаємо, що навчаюча вибірка отримана із суміші зі змінними концентраціями. Будемо досліджувати асимптотичну поведінку цього методу.

Розглянемо випадок (27). Функції H_i (а, значить, і h_i) вважаються невідомими. Їх можна оцінити за даними, що являють собою вибірку із суміші зі змінними концентраціями: $\{\xi_{j:N}\}_{j=1}^N$, $\xi_{j:N}$ – незалежні між собою при фіксованому N і $P\{\xi_{j:N} < x\} = w_{j:N} H_1(x) + (1 - w_{j:N}) H_2(x)$, де $w_{j:N}$ – відома концентрація об'єктів першого класу у суміші в момент j-го спостереження [6]. Для оцінки функції розподілу H_i використовують зважені емпіричні функції розподілу

$$\widehat{H}_i^N(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} a^i_{j:N} 1\{\xi_j < x\},$$

де $1\{A\}$ – індикатор події A, $a^i_{j:N}$ – вагові коефіцієнти:

$a^1_{j:N} = \frac{1}{\Delta_N}\left((1 - S_N^1) w_{j:N} + (S_N^2 - S_N^1)\right)$, $a^2_{j:N} = \frac{1}{\Delta_N}\left(S_N^2 - S_N^1 w_{j:N}\right)$, $S_N^k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (w_{j:N})^k$, $\Delta_N = S_N^2 - (S_N^1)^2$ (див. [6]).

Для оцінки щільностей розподілів h_i можна скористатися ядерними оцінками

$$\widehat{h}_i^N(x) = \frac{1}{Nk_N}\sum_{j=1}^N a_{j:N}^i K\left(\frac{x-\xi_{j:N}}{k_N}\right),$$

де K – ядро (щільність деякого ймовірнісного розподілу), k_N – параметр згладжування [1;4].

Оцінка ЕБК будується наступним чином: знаходиться множина T_N всіх розв'язків рівняння $p_1\widehat{h}_1^N(t) - p_2\widehat{h}_2^N(t) = 0$ і на роль оцінки використовується $\overline{\widehat{t}}_N^{EBC} = \arg\min_{t_1,t_2\in T_N} L^1{}_N(t_1,t_2)$, де

$$L^1{}_N(t_1,t_2) = p_1\left(\widehat{H}_1^N(t_1)+1-\widehat{H}_1^N(t_2)\right) + p_2\left(\widehat{H}_2^N(t_2)-\widehat{H}_2^N(t_1)\right) = L^1{}_{N_1}(t_1) + L^1{}_{N_2}(t_2),$$

$$L^1{}_{N_1}(t_1) = p_1\widehat{H}_1^N(t_1) - p_2\widehat{H}_2^N(t_1), \quad L^1{}_{N_2}(t_2) = p_1(1-\widehat{H}_1^N(t_2)) + p_2\widehat{H}_2^N(t_2);$$

$$\widehat{t}_{N_1}^{EBC} = \arg\min_{t_1\in T_N} L^1{}_{N_1}(t_1), \quad \widehat{t}_{N_2}^{EBC} = \arg\min_{t_2\in T_N} L^1{}_{N_2}(t_2).$$

Будемо вважати, що виконуються наступні умови:

(A). $\overline{t}^B$ існує і є єдиною точкою глобального мінімуму $L^1(\overline{t})$ (t_1^B є точкою глобального мінімуму $L^1{}_1(t_1)$, t_2^B – $L^1{}_2(t_2)$).

(B_k). Існують границі $S^i = \lim_{n\to\infty} S_N^i$, $i = 1,2,...k$ і $\Delta = S^2 - (S^i)^2 > 0$.

Теорема 1. Нехай виконуються (A), (B_2), існують і є неперервними щільності h_i, $k_N \to 0$, $N_{k_N} \to \infty$, K – неперервна функція $d^2 \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)dt < \infty$.

Тоді $\overline{\widehat{t}}_N^{EBC} \to \overline{t}^B$ ($\widehat{t}_{N_1}^{EBC} \to t_1^B$, $\widehat{t}_{N_2}^{EBC} \to t_2^B$) за ймовірністю при $N \to \infty$.

Доведення. Згідно з теоремою 1 у [1], в наших умовах, $\widehat{h}_i^N(x) \to h_i(x)$ за ймовірністю в кожній точці $x \in R$. Отже $u_N(x) \triangleq p_2\widehat{h}_2^N(x) - p_1\widehat{h}_1^N(x) \to u(x) \triangleq p_2h_2(x) - p_1h_1(x)$ за ймовірністю. Для $\delta_i > 0$ позначимо

$$A_N(\delta_i) = \left\{\exists t_i : \left|t_i - t_i^B\right| \le \delta_i,\ u_N(t_i) = 0\right\}.$$

Покажемо, що

$$P\left(A_N\left(\delta_i\right)\right) \to,\ N \to \infty. \tag{29}$$

Оскільки t_1^B – точка мінімуму $L_1^1(t)$, t_2^B – точка мінімуму $L_2^1(t)$, а $-L_1^1(t) = +L_2^1(t) = u(t)$ – неперервна функція, то $u(t)$ повинна змінювати знак в околі точки t_i^B, тобто існують такі t_i^-, t_i^+, що $t_i^B - \delta_i < t_i^- < t_i^B < t_i^+ < t_i^B + \delta_i$ і $u\left(t_i^-\right)u\left(t_i^+\right) < 0$. Отже, $P\left(u_N\left(t_i^-\right)u_N\left(t_i^+\right) < 0\right) \to 1$. Але, оскільки u_N – неперервна, то $\left\{u_N\left(t_i^-\right)u_N\left(t_i^+\right) < 0\right\} \subseteq A_N\left(\delta_i\right)$. Отже, (29) доведено для $i = 1,2$.

Фіксуємо δ_i, $i = 1,2$. Оскільки, L_1^1, L_2^1 – неперервні на R функції, $L_1^1(-\infty) = 0$, $L_1^1(+\infty) = p_1 - p_2$, $L_2^1(-\infty) = p_1$, $L_2^1(+\infty) = p_2$ і виконана умова (A), то $\forall\delta_i > 0\ \ \exists\varepsilon_i$ таке, що для всіх t_i, для яких $\left|t_i - t_i^B\right| > \delta_i$ має місце нерівність $L^1(t_i) > L^1(t_i^B) + \varepsilon_i,\ i = 1,2$. Виберемо $0 < \delta_i^{'} < \delta_i$ так, щоб для всіх $t \in \left[t_i^B - \delta_i^{'},\ t_i^B + \delta_i^{'}\right]$ виконувалось $L^1(t_i) < L^1(t_i^B) + \dfrac{\varepsilon}{4}$. Позначимо $B_{N_i} = \left\{\inf\limits_{t\notin\left[t_i^B-\delta_i^{'},\ t_i^B+\delta_i^{'}\right]} L_{N_i}^1(t) > L^1\left(t_i^B\right) + \dfrac{\varepsilon}{2} > \inf\limits_{t\in\left[t_i^B-\delta_i^{'},\ t_i^B+\delta_i^{'}\right]} L_{N_i}^1(t)\right\}$.

Фіксуємо довільне $\lambda_i > 0$. Використовуючи рівномірну збіжність L_N^1 до L^1, отримуємо, що для достатньо великих N, $P\left(B_{N_i}\right) > 1 - \dfrac{\lambda_i}{2}$. Згідно (29), при великих N, $P\left(A_N\left(\delta_i^{'}\right)\right) > 1 - \dfrac{\lambda_i}{2}$. Якщо виконано $A_N\left(\delta_i^{'}\right)$, то існують $t_i^* \in T_N \cap \left[t_i^B - \delta_i^{'},\ t_i^B + \delta_i^{'}\right]$ і, при виконанні B_{N_i}, $L_{N_i}^1\left(t_i^*\right) < L_{N_i}^1(t_i)$ для всіх $t_i \notin \left[t_i^B - \delta_i,\ t_i^B + \delta_i\right]$. Тому

$$P\left\{\left|\widehat{t}_i^{EBC} - t_i^B < \delta\right\} \ge P\left(A_N\left(\delta_i^{'}\right) \cap B_{N_i}\right) \ge 1 - \frac{\lambda_i}{2} + 1 - \frac{\lambda_i}{2} = 1 - \lambda_i.$$

$$\left(P\left(A_N\left(\delta_i^{'}\right) \cap B_{N_i}\right) = P\left(A_N\left(\delta_i^{'}\right)\right) + P\left(B_{N_i}\right) - P\left(A_N\left(\delta_i^{'}\right) \cup B_{N_i}\right) \ge P\left(A_N\left(\delta_i^{'}\right)\right) + P\left(B_{N_i}\right) - 1\right)$$

при великих N, $i = 1,2$. Враховуючи довільність λ_i, $i = 1,2$, отримаємо твердження теореми.

Далі оцінку порогу $\overline{t}^B$ будуємо методом мінімізації емпіричного ризику. Знову вважаємо, що навчаюча вибірка отримана із суміші зі змінними концентраціями. Припущення щодо оцінок для H_i і h_i такі ж як і раніше. Дослідимо асимптотичну поведінку цього методу. Оцінка МЕР визначається як $\overline{\widehat{t}}_N^{MER} = \arg\min_{\overline{t}\in R^2} L^1{}_N(\overline{t})$, де

$$L^1{}_N(\overline{t}) = \left[p_1\widehat{H}_1^N(t_1) - p_2\widehat{H}_2^N(t_1)\right] + \left[p_1\left(1 - \widehat{H}_1^N(t_2)\right) + p_2\widehat{H}_2^N(t_2)\right],$$

де $L^1_{N_1}(t_1) = p_1\widehat{H}_1^N(t_1) - p_2\widehat{H}_2^N(t_1)$, $L^1_{N_2}(t_2) = p_1(1-\widehat{H}_1^N(t_2)) + p_2\widehat{H}_2^N(t_2)$.

Отже, $\widehat{t}_{N_1}^{MER} = \arg\min_{t_1\in R} L^1_{N_1}(t_1)$, $\widehat{t}_{N_2}^{MER} = \arg\min_{t_2\in R} L^1_{N_2}(t_2)$. Будемо вважати, що виконуються наступні умови:

(А). $\overline{t}^B$ існує і є єдиною точкою глобального мінімуму $L^1(\overline{t})$.

(B_k). Існують границі $S^i = \lim_{n\to\infty} S^i_N$, $i = 1,2,...k$ і $\Delta = S^2 - (S^i)^2 > 0$.

Теорема 2. Нехай виконуються (А), (B_2), H_i – неперервні функції на R. Тоді $\overline{\widehat{t}}_N^{MER} \to \overline{t}^B$ ($\widehat{t}_{N_1}^{MER} \to t_1^B$, $\widehat{t}_{N_2}^{MER} \to t_2^B$) за ймовірністю при $N \to \infty$.

Доведення. Відмітимо, що з умови (B_2) випливає рівномірна по N та j обмеженість вагових коефіцієнтів $a^i_{j:N}$. Тому за теоремою 2.4.2 з [3] $\sup_x\left|H_i^N(x) - H_i(x)\right| \to 0$ за ймовірністю при $N\to\infty$. Звідси випливає, що і $\sup_x\left|L^1_{N_1}(x) - L^1(x)\right| \to 0$ та $\sup_x\left|L^1_{N_2}(x) - L^1(x)\right| \to 0$ за ймовірністю. Фіксуємо довільні $\lambda_1,\lambda_2 > 0$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2 > 0$. Нехай $A_{N_1} = \left\{\sup_x\left|L^1_{N_1}(x) - L^1(x)\right| < \frac{\varepsilon_1}{2}\right\}$, $A_{N_1} = \left\{\sup_x\left|L^1_{N_2}(x) - L^1(x)\right| < \frac{\varepsilon_2}{2}\right\}$.

При достатньо великих N, $P\left(A_{N_1}\right) > 1-\lambda_1$, $P\left(A_{N_2}\right) > 1-\lambda_2$. Оскільки L^1_1, L^1_2 – неперервні функції на R, $L^1_1(-\infty) = 0$, $L^1_1(+\infty) = p_1 - p_2$, $L^1_2(-\infty) = p_1$, $L^1_2(+\infty) = p_2$ і виконана умова (A), то $\forall\delta_i > 0$ $\exists\varepsilon_i$ таке, що для всіх t_i, для яких $\left|t_i - t_i^B\right| > \delta_i$ має місце нерівність $L^1(t_i) > L^1\left(t_i^B\right) + \varepsilon_i$, $i = 1,2$.

Нехай події A_{N_i} виконані . Тоді $L^1\left(\widehat{t}_{N_i}^{MER}\right) - \frac{\varepsilon_i}{2} \le L^1_{N_i}\left(\widehat{t}_{N_i}^{MER}\right) \le L^1_{N_i}\left(t_i^B\right) \le L^1\left(t_i^B\right) + \frac{\varepsilon_i}{2}$, $i = 1,2$.

Отже, $L^1\left(\widehat{t}_{N_i}^{MER}\right) \le L^1\left(t_i^B\right) + \varepsilon_i$ і $\left|\widehat{t}_{N_i}^{MER} - t_i^B\right| \le \delta_i$, $i = 1,2$. Внаслідок довільності $\delta_1(\delta_2)$ та $\lambda_1(\lambda_2)$ теорема доведена.

Розглянемо випадок (28). В доведенні та формулюванні відбудуться незначні зміни, а саме, верхній індекс зміниться з 1 на 2, а також $L^1_1(-\infty) = 0,\ L^2_2(-\infty) = p_2$, $L^1_1(+\infty) = p_2 - p_1,\ L^2_2(+\infty) = p_1$, що не впливає на хід доведення .

3. Висновки

В даній роботі знайдено умови збіжності за ймовірністю оцінок для баєсового порогу, побудованих методом мінімізації емпіричного ризику і методом емпірично-баєсової класифікації для вибірки із суміші зі змінними концентраціями.

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М., 1977. 2. Вапник В.Н. Индуктивные принципы поиска эмпирических закономерностей // Распознавание . Классификация. Прогноз, Вып.1. – М., 1989. 3. *Деврой Л., Дьерфи Л.* Непараметрическое оценивание плотности. – М., 1988. 4. *Іванько Ю.О.* Асимптотика ядерних оцінок щільностей та їх похідних, побудованих за спостереженнями із суміші зі змінними концентраціями // Вісник КНУ, сер. Математика. Механіка. – 2003. – №9. – С. 29–35. 5. *Іванько Ю.О., Майборода Р.Є.* Експоненціальні оцінки емпірично-баєсового ризику при класифікації суміші зі змінними концентраціями // Український математичний журнал. – 2002. – Т.54, №10. – С. 1421–1428. 6. *Майборода Р.Є.* Статистичний аналіз сумішей. – К., 2003. 7. *Vapnik V.N.* The nature of Statistical Learning Theory. – N. Y., 1996.

Надійшла до редколегії 27.09.07

УДК 532.5

О.Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, О.Хорошилов, канд. фіз.-мат. наук
Email: alex_z_ua@ukr.net

УТОЧНЕННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГАЗОДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ, ЩО МАЮТЬ ОСОБЛИВІСТЬ НА ВІЛЬНІЙ МЕЖІ

На прикладі математичної моделі надзвукового обтікання невісесиметричних конічних пористих тіл, скрізь поверхню яких здійснюється сильний вдув газу, проведено вдосконалення методу побудови розв'язку крайової задачі з вільною межею в околі якої існує особливість. Розроблений алгоритм чисельного розв'язання крайової задачі дає змогу виконати умови незмінності функції ентропії на поверхні розділу двох потоків, поперечний перетин якої має форму кола.

On the example of mathematical model of the supersonic flowing around of of conical porous bodies without axial symmetry, everywhere surface of which the strong is carried out blew gas, perfection of method of construction of decision of regional task is conducted with free granitseyu in okoli which a feature is. The algorithm of numeral solution of boundary task is developed enables to execute the terms of invariability of function of entropii on the surface of section of two streams, the transversal crossing of which has a form of circle.

1. Вступ.

В роботі [3] побудована математична модель надзвукового обтікання невісесиметричних конічних пористих тіл, скрізь поверхню яких здійснюється сильний вдув газу. Сформульовано пряму та обернену крайові задачі із вільною границею. Слід вказати, що за межами викладеного в [3] матеріалу залишилося питання побудови розв'язку задачі у околі поверхні контактного розриву (поверхні розділу), якою на основі проведеного асимптотичного аналізу заміняється шар змішування (взаємодії) зовнішнього і внутрішнього потоків. В роботі [1] на базі математичної моделі з [3] розроблено метод побудови розв'язку крайової задачі з вільною границею, в околі якої існує особливість. Знайдені умови існування регулярного розв'язку та розроблений алгоритм чисельного розв'язання крайової задачі у всій області течії. Однак, аналіз результатів, отриманих за викладеним в [1] методом, показав, що для окремого випадку «прямої» задачі в [3], коли поперечний перетин конічної поверхні розділу має форму кола, треба додатково розглянути питання поведінки функції ентропії у околі поверхні контактного розподілу.

Дійсно, згідно постановці задачі в [3] у загальному випадку функція ентропії S представлена у вигляді

$$S = S_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \Theta_l S_l \cos(l\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m S_m \sin(m\varphi), \tag{1}$$

Для окремого випадку «прямої» задачі в [3], коли поперечний перетин конічної поверхні розділу має форму кола, на цій поверхні

$$S = S_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \Theta_l S_l \cos l\varphi \ . \tag{2}$$

Тобто, ентропія є функцією від змінної φ всюди, включаючи поверхню контактного розриву. У той же час, відомо, що А.Феррі, виходячі з физичних меркувань, доказав, що ентропія на поверхні вісесиметричного конуса має бути постійною [4].

Тому у околі контактної поверхні треба провести додаткове дослідження поведінки газодинамічних функцій.

2. Метод розв'язання.

Повернемося до роботи [3], де вісесиметрична течія описується нелінійною системою нульового наближення:

$$\begin{gathered} v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \xi_N} + \frac{1}{\rho_0}\frac{dp_0}{d\xi_N} - \sigma_0 \eta_0 u_0 v_0 = 0,\ v_0 \frac{dp_0}{d\xi_N} + \gamma p_0 \frac{dv_0}{d\xi_N} - \sigma_0 \gamma p_0 \left(v_0 + 2\eta_0 u_0\right) = 0, \\ \frac{dp_0}{d\xi_N} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{d\xi_N} = 0,\ u_0{}^2 + v_0{}^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}c. \end{gathered} \tag{3}$$

У загальному випадку для визначення збурень вісесиметричної течії маємо дві лінійні системи диференційних рівнянь. Перша з них не залежить від параметра Θ_m, а друга - від Θ_l. Таким чином, в кожній області I і II для визначення збурень в основному вісесиметричному потоці маємо наступні дві лінійні системи диференційних рівнянь:

$$\begin{gathered} v_0 \frac{dv_i}{d\xi_N} + v_i \frac{dv_0}{d\xi_N} + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{dp_i}{d\xi_N} - \frac{\rho_i}{\rho_0}\frac{dp_0}{d\xi_N}\right) - \sigma_0\left(\eta_0 u_0 v_i + \eta_0 u_i v_0 + \eta_i u_0 v_0\right) - \sigma_i \eta_0 u_0 v_0 = 0, \\ v_0 \frac{dw_i}{d\xi_0} - \sigma_0\left[w_i\left(v_0 + \eta_0 u_0\right) - \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\rho_0}\left(p_i + \frac{\eta_i}{\Theta_0 - \Delta_0}\frac{dp_0}{d\xi_0}\right)\right] = 0, \\ v_0 \frac{dp_i}{d\xi_0} + v_i \frac{dp_0}{d\xi_0} + \gamma\left(p_i \frac{dv_0}{d\xi_0} + p_0 \frac{dv_i}{d\xi_0}\right) - \gamma\sigma_0\left\{p_i\left(v_0 + 2\eta_0 u_0\right) + \right. \\ \left. p_0\left[v_i + 2\left(\eta_0 u_i + \eta_i u_0\right) + w_i\sqrt{1+\eta_0^2}\right]\right\} - \sigma_i \gamma p_0\left(v_o + 2\eta_0 u_0\right) = 0, \\ u_0 u_i + v_0 v_i + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{p_i}{p_0} - \frac{\rho_i}{\rho_0}\right) = 0, \\ \frac{p_i}{p_0} - \gamma\frac{\rho_i}{\rho_0} = S_i, \quad i = l, m \end{gathered} \tag{4}$$

У рівняннях систем (3) і (4) прийняті такі позначення:

$$\sigma_0 = \frac{\Theta_0 - \Delta_0}{\eta_0\left(1+\eta_0^2\right)}, \quad \eta_0 = \Theta_0 + \xi\left(\Delta_0 - \Theta_0\right), \quad \sigma_l = \frac{\Theta_l - \sigma_0\left(1+3\eta_0^2\right)\eta_l}{\eta_0\left(1+\eta_0^2\right)}, \quad \sigma_m = \frac{\Theta_m - \sigma_0\left(1+3\eta_0^2\right)\eta_m}{\eta_0\left(1+\eta_0^2\right)},$$

$$\eta_l = \Theta_l\left(1-\xi\right), \quad \eta_m = \Theta_m\left(1-\xi\right), \quad c = \frac{c_{kp_\infty}}{c_{kp_{bd}}},$$

N - номер області течії.

Для окремого випадку «прямої» задачі в [3], коли поперечний перетин конічної поверхні розділу має форму кола, в області I залишиться лише одна система рівнянь першого наближення. В області II треба розглядати обидві системи рівнянь. Такий підхід є справедливим й для граничних умов.

Нагадаємо, що при побудові крайових задач першого наближення в рівняннях та граничних умовах залишалися лише члени першого порядку відносно δ_i. Внаслідок цього, у системі рівнянь Ейлера в рівнянні для ентропії не був врахований член:

$$Bw\sqrt{1+\eta^2}\,\frac{\partial S}{\partial \varphi}\,, \tag{5}$$

який має другий порядок малості по δ_i, але стає головним при малих значеннях ξ, коли перший додаток рівняння наближається до нуля.

На перший погляд може здатися, що врахування членів другого порядку малості відносно δ_i дозволить усунути цей недолік розв'язку першого наближення. Однак, в роботі [2], де наводиться обгрунтування теорії першого та другого наближень для задач обтікання вісесиметричних конічних тіл, вказано, що й в другому наближенні розв'язок для функції ентропії в околі поверхні конусу не відповідає физичній моделі.

Тому розглянемо на прикладі крайової задачі в області I дещо інший підхід, який дає змогу забезпечити постійне значення ентропії на поверхні контактного розриву, тобто при $\xi = 0$. Для цього треба модифікувати системи рівнянь першого наближення, враховуючи деякі члени більшого порядку малості.

Перепишемо рівняння для ентропії у вигляді: $A\dfrac{\partial S}{\partial \xi} + \varepsilon B\tilde{w}\sqrt{1+\eta^2}\,\dfrac{\partial S}{\partial \varphi} = 0,$

де ε - деякий малий параметр, який будемо вважати рівним δ_i, під час асимптотичного аналізу рівнянь. Це дає змогу зберегти в рівняннях *n-го* наближення поряд з членами *n-го* порядку ще і члени порядку δ_i^{n+1}, які стають головними при малих значеннях ξ.

Тоді, для першого наближення ми отримаємо рівняння для ентропії у такому вигляді: $E(\xi)\dfrac{\partial S_i}{\partial \xi} - \varepsilon_i \sin\varphi \dfrac{\partial S_1}{\partial \varphi} = 0,$ де $E(\xi) = \dfrac{v_0}{B_0 w_i \sqrt{1+\eta_0^2}}$.

Загальний розв'язок цього рівняння: $S_1 = F\left(b\,\mathrm{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right),$ де $b = e^{-\delta_i \int_1^{\xi} \frac{d\xi}{E(\xi)}}$, а F - довільна функція.

Представимо ентропію у першому наближені у вигляді:

$$S_1(\xi_N, \varphi) = \sum_{k=0}^{n} S_{1_k}(\xi)\cos k\varphi\,. \tag{6}$$

Якщо в (6) позначити функції ентропії на стрибку ущільнення як S_{1k}, то, якщо обмежившись чотирма членами ряду (тобто $n = 3$), отримаємо

$$S_{1k}(\xi) = (s_{10} - s_{12})q_{0k} + (s_{11} - 3s_{32})q_{1k} + 2s_{12}q_{2k} + 4s_{13}q_{3k}, \tag{7}$$

де

$$q_{00} = 1,\; q_{01} = q_{02} = q_{03} = 0,$$

$$q_{10} = \frac{1-b}{1+b},\; q_{11} = \frac{4b}{(1+b)^2},\; q_{12} = -\frac{4b(1-b)}{(1+b)^3},\; q_{13} = \frac{4b(1-b)^2}{(1+b)^4},\; q_{20} = \frac{1+b^2}{(1+b)^2},$$

$$q_{21} = \frac{4b(1-b)}{(1+b)^3},\; q_{22} = -\frac{4b(1-4b+b^2)}{(1+b)^4},\; q_{23} = \frac{4b(1-b)(1-6b+b^2)}{(1+b)^5},$$

$$q_{30} = \frac{1-b^3}{(1+b)^3},\; q_{31} = \frac{6b(1+b^2)}{(1+b)^4},\; q_{32} = -\frac{6b(1-b)^3}{(1+b)^5},$$

$$q_{33} = \frac{2b}{(1+b)^6}(3 - 18b + 38b^2 - 18b^3 + 3b^4).$$

За аналогією з (6), для інших параметрів маємо:

$$u_1 = \sum_{k=0}^{n} u_{1_k}(\xi)\cos k\varphi,\; v_1 = \sum_{k=0}^{n} v_{1_k}(\xi)\cos k\varphi,\; p_1 = \sum_{k=0}^{n} p_{1_k}(\xi)\cos k\varphi,\; \rho_1 = \sum_{k=0}^{n} \rho_{1_k}(\xi)\cos k\varphi,$$

$$w_1 = \sum_{k=0}^{n} w_{1_k}(\xi)\sin k\varphi,\; \Delta_1 = \sum_{k=0}^{n} \Delta_{1_k}(\xi)\cos k\varphi,\; \Theta_1 = \sum_{k=0}^{n} \Theta_{1_k}(\xi)\cos k\varphi,\; \Omega_1 = \sum_{k=0}^{n} \Omega_{1_k}(\xi)\cos k\varphi.$$

Система рівнянь для визначення цих параметрів має вигляд:

$$\frac{dv_{1_k}}{d\xi} = \frac{1}{v_0^2 - c_0^2}\left(C_{1_k} v_0 - \frac{1}{\rho_0} D_{1_k}\right),\quad \frac{dp_{1_k}}{d\xi} = \frac{1}{v_0^2 - c_0^2}\left(D_{1_k} v_0 - \gamma C_{1_k} p_0\right),$$

$$\frac{dw_{1_k}}{d\xi} = \frac{K_{1_k}}{v_0}, \tag{8}$$

$$u_{1_k} = -\frac{1}{u_0}\left[v_0 v_{1_k} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{p_{1_k}}{p_0} - \frac{\rho_{1_k}}{\rho_0}\right)\right],\quad \rho_{1_k} = \frac{\rho_0}{\gamma}\left(\frac{p_{1_k}}{p_0} - S_{1_k}\right),$$

де $C_{1_k} = \dfrac{1}{\rho_0}\left(\dfrac{v_{1_k}}{v_0} - \dfrac{\rho_{1_k}}{\rho_0}\right)\dfrac{dp_0}{d\xi} - u_0 u_{1_k} - u_0 v_0\left(\eta_0 \sigma_{1_k} + \eta_{1_k}\sigma_0\right),$

$$D_{1_k} = \frac{1}{p_0}\left(v_0 p_{1_k} - p_0 v_{1_k}\right)\frac{dp_0}{d\xi} - \gamma p_0\left[\sigma_0\left(v_{1_k} + 2\eta_0 u_{1_k} + 2\eta_{1_k} u_0\right) + \sigma_{1_k}\left(v_0 + 2\eta_0 u_0\right) - \sigma_0\sqrt{1+\eta_0^2}\, w_{1_k}\right],$$

$$K_{1_k} = \frac{\sigma_0\sqrt{1+\eta_0^2}}{\rho_0}\left(p_{1_k} - \frac{\eta_{1_k}}{\Omega_0 - \Theta_0}\frac{dp_0}{d\xi}\right) - \sigma_0\left(v_0 + \eta_0 u_0\right) w_{1_k}\,.$$

$$\sigma_0 = \frac{\Theta_0 - \Delta_0}{\eta_0\left(1+\eta_0^2\right)},\quad \eta_0 = \Theta_0 + \xi_I\left(\Delta_0 - \Theta_0\right),\quad \sigma_{1k} = \frac{\Theta_{1k} - \sigma_0\left(1+3\eta_0^2\right)\eta_{1k}}{\eta_0\left(1+\eta_0^2\right)},\quad \eta_{1k} = \Theta_{1k}\left(1-\xi_I\right),\quad c = \frac{c_{kp_\infty}}{c_{kp_{bd}}}.$$

Граничні умови в області I:

на стрибку ущільнення (ξ_I =0):

$$u_{1k} = -\frac{\Omega_0\Omega_{1ki}u_0}{1+\Omega_0^2} + \alpha_{1k},\, v_{1k} = \frac{\left(\gamma-1\right)U_{n0}^2 - 2\gamma p_\infty}{\left(\gamma+1\right)U_{n0}^2}U_{1k},\, w_{1k} = \frac{k\left(u_0\Omega_0 + v_0\right)\Omega_{1k}}{\Omega_0\sqrt{1+\Omega_0^2}} + \beta_{1k},$$
$$p_{1k} = \frac{4U_{0k}U_{1k}}{\gamma+1},\, \rho_{1k} = \frac{4\gamma\left(\gamma+1\right)p_\infty U_{0k}U_{1k}}{\left[\left(\gamma-1\right)U_{0k}^2 + 2\gamma p_\infty\right]^2}, \tag{9}$$

$$\alpha_{11} = -u_0\Theta_0,\quad \beta_{11} = \Theta_0 U_\infty,\quad \alpha_{10} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = \beta_{10} = \beta_{12} = \beta_{13} = 0.$$

на поверхні розподілу (ξ_I =1): $v_1 = 0$.

Далі, як і у роботі [1], для того, аби w_m мала скінчене значення на поверхні Θ , необхідно зв'язати функції w_{1k} і p_{1k} співвідношенням

$$w_{1k}(0) = k\frac{\sqrt{1+\Theta_0^2}}{\Theta_0 u_0 \rho_0}p_{1k}. \tag{10}$$

Після чого можна отримати аналітичний вираз для тангенціальної складової w_m вектора швидкості, який є справедливим у околі поверхні розподілу Θ :

$$w_{1k}\left(\xi_I\right) = w_{1k}(0) \pm \lambda_{1k}\xi_I^{1/2},\quad (k = 1,2,...n)., \tag{11}$$

де λ_{1k} - невідомі константи інтегрування, значення яких знаходяться чисельно за допомогою розробленого в [1] алгоритму побудови розв'язку у околі поверхні контактного розриву.

Завдяки запропонованому підходу побудова чисельного розв'язку крайових задач на базі математичної моделі [3] здійснюється за допомогою алгоритмів, розроблених в [3] і [1]. Ускладнення процедури розв'язання цих задач, що пов'язане з необхідністю виконання умови незмінності функції ентропії на поверхні контактного розриву, зводится лише до техничних питань, оскільки, згідно [3], розв'язок крайової задачі будується у вигляді лінійної комбінації лінійно незалежних розв'язків, що задовольняють відповідним граничним умовам. В даному випадку їх кількість збіль шується й визначається числом членів в співвідношені (6).

3. Висновки.

На основі математичної моделі надзвукового обтікання невісесиметричних конічних пористих тіл, скрізь поверхню яких здійснюється сильний вдув газу, проведено вдосконалення розробленого раніш методу побудови розв'язку крайової задачі з вільною границею в околі якої існує особливість. У окремому випадку "прямої" крайової задачі для режима течії, коли поверхня розділу має поперечний перетин у формі кола, розроблений метод розв'язання, що дає змогу виконати умови незмінності функції ентропії на контактній поверхні двох потоків. При цьому зберегаються алгоритми побудови розв'язку задачі, що були розроблені в [3] і [1].

1. *Антонов А.М., Зайцев О.В., Хорошилов О.В.* Метод розв'язання газодинамічних задач, що мають особливість на вільній межі // Вісн. Київ. ун-ту, Мат., мех. 2006, №17, С. 2. *Булах Б.М.* Сверхзвуковой поток около наклоненного кругового конуса// ПММ. 1962, т.XXVI, віп.2, С.300-307. *3.Зайцев О.В., Хорошилов О.В., Черній Д.І.* Метод розв'язання прямої та оберненої крайових задач про невісесиметричне обтікання конічних тіл із вдувом // Вісн. Київ. ун-ту, Мат., мех. 2005, №13, С.54-59. *4. Ferri A.* Supersonic flow around circular cones// NASA TN, №2236.

Надійшла до редколегії 17.08.07

УДК 538.6; 539.3; 534.1

Л. Мольченко, д-р. фіз.-мат. наук, , І. Лоос, канд.фіз.-мат. наук, Р. Індіамінов, канд. фіз.-мат. наук

МАГНІТОПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ОРТОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З ОРТОТРОПНОЮ ЕЛЕКТРОПРОВІДНІСТЮ

Побудована нелінійна двовимірна модель магнітопружності струмонесучих ортотропних оболонок обертання з врахуванням ортотропної електропровідності, магнітної та діелектричної проникливості. Отримана зв'язана розв'язуюча система нелінійних диференціальних рівнянь, яка описує напружено–деформований стан гнучких струмонесучих ортотропних оболонок обертання з довільною формою меридіану, з ортотропною електропровідністю, які знаходяться при нестаціонарних силових та електромагнітних навантаженнях.

A two-dimensional variant of connected nonlinear equations of electrodynamics of the current-carrying orthotropic rotation shells, under no stationary loads in presented. A procedure for solution of asymmetrical problems of magneto elasticity of flexible current-carrying orthotropic rotation shells under no stationary actions of mechanical and electromagnetic forces is plotted. A stress-strained state of flexible current-carrying orthotropic rotation shells is studied as an example.

1. Вступ.

Важливе місце у механіці спряжених полів займають питання вивчення руху суцільних середовищ з врахуванням електромагнітних ефектів. Дослідження механіки зв'язаних полів у деформованих тілах мають як фундаментальний, так і прикладний характер, що надає їм особливої актуальності. У сучасній техніці використовуються конструкційні матеріали, які у недеформованому стані вже анізотропні, подекуди ортотропні. Причому анізотропія властивостей таких матеріалів виникає в них у разі застосування різних технологічних процесів. Останнім часом розроблені матеріали з новими електромагнітними властивостями. Ці матеріали можуть ефективно використовуватись у різних галузях нової техніки.

Особливий інтерес викликають задачі магнітопружності при дії на тіло стороннього струму. Однак, задачі, пов'язані з питаннями врахування сторонніх струмів, в цілому достатньо важкі, але суттєво спрощуються у випадку тонких тіл, що мало змінюють форми при деформації. Подалі нас будуть цікавити саме ці спрощені задачі.

Вважаємо, що електропровідне тіло перебуває в магнітному полі, створюваному як електричним струмом у самому тілі (власне магнітне поле), так і джерелом, яке знаходиться на віддалі від тіла (зовнішнє магнітне поле). Вважається також, що сторонній електричний струм у не збудженому стані рівномірно розподілений по тілу (густина струму не залежить від координат). Тіло має скінчену електропровідність і не має властивості самовільної поляризації та намагнічення.

Визначимо величини та запишемо рівнянняя, які характеризують електромагнітне поле. Нехай електромагнітне поле тіла в ейлеровій системі координат характеризується вектором напруженості електричного поля $\vec{e}$, вектором напруженості магнітного поля $\vec{h}$, вектором електричної індукції $\vec{d}$ і вектором магнітної індукції $\vec{b}$, а в лагранжевій системі координат характеризується відповідно $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$ і $\vec{B}$.

Аналіз електромагнітних ефектів має місце на основі системи рівнянь Максвелла, сумісно з матеріальними рівняннями, які зв'язують між собою вектори $\vec{d}$ і $\vec{e}$, $\vec{b}$ і $\vec{h}$, $\vec{j}$ і $\vec{e}$, які в разі лінійних ізотропних середовищ мають вигляд [3]:

$$\vec{d} = \varepsilon_\alpha \vec{e}, \qquad \vec{b} = \mu_\alpha \vec{h}, \qquad \vec{j} = \sigma \vec{e} \ ,$$

де ε_α, μ_α - називаються відповідно електричною і магнітною проникливостями, σ- електричною провідністю середовища. Властивості середовищ характеризуються параметрами ε_α, μ_α і σ. В залежності від властивостей параметрів ε_α, μ_α і σ розрізняють наступні середовища:

лінійні, в яких параметри ε_α, μ_α і σ не залежать від величини електричного і магнітного полів, і нелінійні, в яких параметри ε_α, μ_α і σ (чи хоча б один з них) залежить від величини електричного чи магнітного поля. Всі реальні середовища, по суті, є нелінійними. Однак, при не дуже сильних полях в багатьох випадках можливо знехтувати залежністю ε_α, μ_α і σ від величини електричного и магнітного полів і вважати, що розглядуване середовище лінійне. В свою чергу, лінійні середовища діляться на однорідні і неоднорідні, ізотропні и анізотропні. Однорідними називають середовища, параметры ε_α, μ_α і σ яких не залежать від координат, тобто властивості середовища однакові у всіх його точках. Середовища, у яких хоча б один з параметрів ε_α, μ_α і σ є функцією координат, називають неоднорідними. Якщо властивості середовища однакові за різними напрямками, то середовище називають ізотропним. Відповідно середовища, властивості яких різні за різними напрямками, називають анізотропними. В ізотропних середовищах вектори $\vec{d}$ і $\vec{e}$, а також $\vec{b}$ і $\vec{h}$ паралельні, в анізотропних середовищах вони можуть бути не паралельними. В ізотропних середовищах параметри ε_α, μ_α і σ - скалярні величини. В анізотропних середовищах, хоча б, один з цих параметрів є тензором. Відмітимо, що визначення зв'язків між величинами $\vec{e}$ і $\vec{d}$, а також $\vec{h}$ і $\vec{b}$ конкретизує модель середовища.

При русі провідного тіла в магнитному полі чи при зміні магнітного поля за часом в тілі виникають індукційні струми і обумовлені ними пондеромоторні сили Лоренца, що, в свою чергу, супроводжується деформацією середовища і появою хвиль напружень.

Рух пружного середовища в магнітному полі описується сумісною системою рівнянь електродинаміки середовища, що повільно рухається і рівняннями динамічної теорії пружності з врахуванням пондеромоторних сил. Дана система рівнянь є нелінійною за рахунок нелінійності співвідношень узагальненого закону Ома і виразів для пондеромоторних сил.

Здійснимо перехід від ейлерової системи координат $\vec{x}$ до лагранжевої ξ за допомогою залежностей [6,10]:

$$\begin{gathered} \rho = \Gamma \rho^*; \ \ \vec{E} = F^T \vec{e}; \ \ \vec{H} = F^T \vec{h} \ ; \\ \vec{D} = \Gamma F^{-1} d; \ \ \vec{B} = \Gamma F^{-1} b; \ \ \Gamma \rho = P F^T \ ; \\ \vec{P}_R = P \vec{n}_R; \ \ R_e = \Gamma \rho_e; \ \ \vec{J} = \Gamma F^{-1} \vec{j} \ ; \end{gathered} \qquad (1)$$

де

$$\Gamma = \det \left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right|, \ \ F = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}, \quad (i, j = 1,2,3) \ .$$

В цьому випадку, згідно результатам робіт [2,5,6], рівняння магнітопружності для анізотропних тіл в лагранжевих змінних, в області, яку займає тіло (внутрішня область), запишуться наступним чином [10]:

$$rot \ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \qquad rot \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_{cm} \ ;$$

$$div\ \vec{B} = 0\ ,\ div\ \vec{D} = 0\ ; \quad (2)$$

$$\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \rho\left(\vec{f} + \vec{f}^{\wedge}\right) + div\hat{\sigma}\ , \quad (3)$$

де $\vec{J}_{cm}$ - густина стороннього електричного струму, $\vec{f}$ - об'ємна сила, $\vec{f}^{\wedge}$ - об'ємна сила Лоренца, $\vec{J}$ - густина електричного струму, $\hat{\sigma}$ - тензор внутрішніх напружень.

Систему рівнянь магнітопружності необхідно замкнути співвідношеннями, які пов'язують вектори напруженості та індукції електромагнітного поля, а також законом Ома, що визначає густину струму провідності в рухомому середовищі. Якщо анізотропне тіло лінійно відносно магнітних і електричних властивостей, то визначаючі рівняння для електромагнітних характеристик поля і кінематичні рівняння для електропровідності, а також вирази для сил Лоренца, з врахуванням стороннього струму $\vec{J}_{cm}$ у змінних Лагранжа запишуться відповідно у вигляді [1,10]:

$$\vec{B} = \mu_{ij}\vec{H}\ , \qquad \vec{D} = \varepsilon_{ij}\vec{E}\ ,$$
$$\vec{J} = \Gamma F^{-1}\vec{J}_{cm} + \sigma_{ij}\Gamma F^{T}F^{-1}\left[\vec{E} + \vec{\upsilon}\times\vec{B}\right], \quad (4)$$
$$\rho\vec{f}^{\wedge} = \Gamma^{-1}F^{-1}\left[\vec{J}_{cm}\times\vec{B} + \sigma_{ij}\left(\vec{E} + \vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)\times\vec{B}\right].$$

Відмітимо, що в рівняннях Максвелла нехтуємо струмами зміщення, вектором електричної індукції і об'ємної густини електричних зарядів (квазістатичне поле); σ_{ij}, ε_{ij}, μ_{ij} - відповідно тензори електричної провідності, діелектричної та магнітної проникливості лінійно анізотропного струмонесучого тіла $(i, j = 1, 2, 3)$. Для однорідних анізотропних середовищ вони є симетричними тензорами другого рангу [3,8].

Система рівнянь (2), (3), яка визначає рух пружного струмонесучого тіла в електромагнітному полі, повинна бути доповнена початковими умовами, граничними умовами і умовами на нескінченності. Обмежуючись розглядом випадків, коли електропровідне тіло контактує з зовнішнім неполяризуємим неелектропровідним середовищем чи неполяризуємим електропровідним тілом скінченого об'єму, за початкові умови приймаємо

$$\vec{u} = 0,\ \frac{d\vec{u}}{dt} = 0\ ,\ \vec{B} = 0\ ,\ \vec{B}^{(c)} = 0\ ,\ \vec{H} = 0\ ,\ \vec{H}^{(c)} = 0\ , \quad (5)$$

де $\vec{u}$ - вектор переміщень; індекс (с) вказує на величини зовнішнього середовища.

Крайові умови на вектори електромагнітного поля на поверхні (S) контакту середовищ з різними властивостями матеріалу у разі, коли на поверхні тіла поверхневі заряди і струми дорівнюють нулю, для середовищ, що повільно рухаються, записуються у вигляді [1]:

$$(\vec{E}^{(c)} - \vec{E})\times\vec{n}_R = 0, \quad (\vec{D}^{(c)} - D)\cdot\vec{n}_R = 0,$$
$$(\vec{H}^{(c)} - \vec{H})\times\vec{n}_R = 0, \quad (\vec{B}^{(c)} - \vec{B})\cdot\vec{n}_R = 0, \quad (6)$$

де $(\vec{a}^{(c)} - \vec{a})$ - стрибки векторів при переході через поверхню S - розподілу середовищ; $\vec{n}_R$ - вектор нормалі до поверхні розриву. Відмітимо, що умови на нормальні складові електричного і магнітного полів виконуються тотожньо, внаслідок рівнянь

$$div\ \vec{D}^{(c)} = 0,\ div\ \vec{D} = 0,\ div\ \vec{B}^{(c)} = 0\ ,\ div\ \vec{B} = 0\ . \quad (7)$$

В тілі, що розглядається, під дією електромагнітного поля вздовж і поперек силових ліній з'являються відповідно розтягуючі та стискаючі зусилля, які визначаються електродинамічним тензором напруження Максвелла. Крайові умови для функцій, які характеризують як механічну частину задачі, так і електромагнітну, в разі завдання на поверхні тіла зовнішнього навантаження $\vec{P}$, записуються в ейлерових змінних наступним чином [10]:

$$\left(\sigma_{ki} + T_{ki}\right)n_i /_{S_1^*} = P_i + n_i T_{ki}^{(c)} /_{S_1^*}\ . \quad (8)$$

Тут n_i - компоненти вектора одиничної нормалі до деформованої границі тіла; P_i-складові поверхневих сил, віднесені до розмірів площадки в деформованому стані; T_{ki} і $T_{ki}^{(c)}$ -тензори напружень Максвелла відповідно у тілі і вакуумі, які виражені через просторові характеристики тіла; S_1^* - частина границі тіла, на якій задані граничні умови в напруженнях. Вирази для тензора напружень Максвелла T_{ki} в загальному вигляді запишуться [1]:

$$T_{ki} = b_k h_i + d_k e_i - \frac{1}{2}\delta_{ki}\left(h_p b_p + d_p e_p\right). \quad (9)$$

Так як нас цікавлять рівняння поля, що записані у лагранжевих змінних, граничні умови необхідно також записати в цих змінних. Враховуючи вираз (1), граничні умови (8) приймають вигляд

$$\left(\hat{\sigma}_R + \hat{\tau}_R\right)\cdot n_R /_S = \vec{P}_R + \hat{\tau}^{(c)}\cdot\vec{n}_R /_S\ . \quad (10)$$

Тут $\hat{\sigma}_R = \Gamma\hat{\sigma}\Gamma^{-1}$ - тензор напружень, віднесений до недеформованої поверхні, $\vec{P}_R$ - вектор поверхневої сили, віднесений до одиничної поверхні тіла в недеформованому стані;

$$\hat{\tau}_R = F^{-1}\hat{\tau}\ , \quad \hat{\tau}_R^{(c)} = \Gamma F^{-1}\hat{\tau}^{(c)}. \quad (11)$$

-тензори напружень Максвелла відповідно у тілі і вакуумі. З наведених рівнянь видно, що задача електромагнітопружності для збуреного стану, не дивлячись на прийняті спрощення, все ще складна і нелінійна. Подальші спрощення задачі електромагнітопружності пов'язуємо з геометрією провідного тела, яке розглядається.

При побудові наближених рівнянь магнітопружності гнучких струмонесучих анізотропних оболонок, які знаходяться у змінному полі, згідно результатів робіт [1,10] вкористаємо слідуючу групу гіпотез:

$$\begin{gathered} E_1 = E_1(\alpha,\beta,t); \quad E_2 = E_2(\alpha,\beta,t); \quad E_3 = \frac{\partial u_2}{\partial t}B_1 - \frac{\partial u_1}{\partial t}B_2; \\ J_1 = J_1(\alpha,\beta,t); \quad J_2 = J_2(\alpha,\beta,t); \quad J_3 = 0; \\ H_1 = \frac{1}{2}\left(H_1^+ + H_1^-\right) + \frac{z}{h}\left(H_1^+ - H_1^-\right); \\ H_2 = \frac{1}{2}\left(H_2^+ + H_2^-\right) + \frac{z}{h}\left(H_2^+ - H_2^-\right); \quad H_3 = H_3(\alpha,\beta,t). \end{gathered} \tag{12}$$

Тут u_i - компоненти просторового вектора переміщень; $H_i^{\pm}$ - відомі компоненти вектору напруженості магнітного поля на поверхнях оболонки. Ці припущення є деяким електродинамічним аналогом гіпотези недеформованих нормалей і разом з останньою складають гіпотези магнітопружності тонких тіл. Для розглядуваного випадку квадратичної нелінійності [4] деформації й кути повороту – величини малі, але другі значно перевищують перші. Врахування мализни подовжень і нехтування зсувами в порівнянні з кутами повороту дозволяють не проводити різниці між розмірами об'ємного елементу до і після деформації. Сказане дозволяє прийняти, що

$$S_i^* / S_i \approx 1 \qquad \text{і} \qquad V^* / V \approx 1 \quad \left(i = 1,2,3\right).$$

Тут S_i - елементарна площадка з нормалями $\vec{n}_i$ до деформації, S_i^* - та ж площадка після деформації; V і V^*- об'єми елементарного елемента до і після деформації. Такий підхід дозволяє врахувати нелінійність у співвідношеннях для деформацій, кривин і кручення. При цьому метрика оболонки залишається практично недеформованою, бо радіуси кривин і параметри Ламе відповідають недеформованому стану оболонки.

Будемо розглядати гнучкі оболонки змінної товщини, у яких координатна поверхня має форму, яка замкнена в коловому напрямку за поверхнею обертання. Припускаємо, що оболонка знаходиться під дією нестаціонарного механічного і електромагнітного впливів. Нехтуючи впливом процесів поляризації і намагнічування, а також температурними напруженнями вважаємо, що до торця оболонки підводиться змінний електричний струм від зовнішнього джерела. Пружні властивості матеріалу оболонки вважаються ортотропними, головні напрямки пружності якого співпадають з напрямками відповідних координатних ліній, електромагнітні ж властивості матеріалу характеризуються тензорами електричної провідності σ_{ij}, магнітної проникливості μ_{ij} і діелектричної проникливості ε_{ij} $\left(i, j = 1, 2, 3\right)$.

При цьому, виходячи з кристалофізики [9] і згідно роботам [2,3,8], для розглядуваного класу провідних ортотропних середовищ з ромбічною кристалічною структурою вважаємо, що тензори σ_{ij}, μ_{ij}, ε_{ij} приймають діагональний вигляд.

Координатну поверхню в недеформованому стані віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат s і θ, де s - довжина дуги твірної (меридіану), яка відраховується від деякої фіксованої точки, θ - центральний кут у паралельному колі, який відраховується від обраної поверхні. Координатні лінії $s = const$ і $\theta = const$ є лініями головних кривин координатної поверхні. Обираючи координату ζ за нормаллю до координатної поверхні обертання, відносимо оболонки до координатної просторової системи координат s, θ, ζ. Товщина оболонки $h = h\left(s, \theta\right)$. В декартовій системі координат x, y, z рівняння координатної поверхні має вигляд:

$$x = r\left(s\right)\cos\theta,\ y = r\left(s\right)\sin\theta,\ z = z\left(s\right)\ ; \quad \left(s_o \le s \le s_N\ , \quad 0 \le \theta \le 2\pi\right), \tag{13}$$

де $r = r\left(s\right)$ - радіус паралельного кола; $z = z\left(s\right)$ - відстань по осі обертання від початкової площини $z = z_o$. Вісь oz співпадає з віссю обертання координатної поверхні, а рівняння

$$x = r\left(s\right)\ , \quad z = z\left(s\right) \tag{14}$$

є параметричними рівняннями твірної в площині xoz, яку в подальшому будемо називати меридіаном. Параметри Ламе в даному випадку приймають вигляд

$$A = 1\ , \quad B = r\ , \tag{15}$$

а радіуси головних кривин R_s и R_θ дорівнюють відповідно радіусам кривин меридіану і довжині відрізку, який паралельний нормалі, і міститься між координатною поверхнею і віссю обертання. Якщо φ - кут між нормаллю до координатної поверхні і осі обертання, то

$$\frac{1}{R_\theta} = \frac{\sin\varphi}{r}\ , \qquad \frac{dz}{ds} = \sin\varphi. \tag{16}$$

Перше рівняння Кодацці – Гаусса з врахуванням (16) можна записати наступним чином:

$$\frac{dr}{ds} = \cos\varphi. \tag{17}$$

Припускаючи, що розглядуване ортотропне тіло лінійне відносно магнітних і електричних властивостей, з врахуванням діагонального вигляду тензорів σ_{ij}, μ_{ij}, ε_{ij} і згідно результатів робіт [2,5,10], а також, враховуючи описану геометрію оболонки, повна система рівнянь в криволінійній ортогональній системі координат, яка дозволяє математично описати нелінійну двовимірну модель магнітопружності ортотропних оболонок обертання, складається з:

рівнянь руху

$$\frac{\partial}{\partial s}(rN_s)+\cos\varphi N_\theta+\frac{\partial S}{\partial\theta}+\frac{1}{R_s}\frac{\partial H}{\partial\theta}+\frac{1}{R_s}Q_s+r\left(p_s+\rho F_s^n\right)=r\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial s}\left(r^2S\right)+\frac{\partial}{\partial s}(\sin\varphi H)+\frac{\cos\varphi}{R_s}H+\sin\varphi Q_\theta+r\left(p_\theta+\rho F_\theta^n\right)=r\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(rQ_s)+\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta}-\frac{r}{R_s}N_s-\sin\varphi N_\theta+r\left(p_\zeta+\rho F_\zeta^n\right)=r\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial H}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial s}(rM_s)-\cos\varphi M_\theta-rQ_s-r\left(N_s-\frac{\sin\varphi}{r}M_\theta\right)\vartheta_s-rS\vartheta_\theta=0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial s}\left(r^2H\right)+\frac{\partial M_\theta}{\partial\theta}-rQ_\theta-r\left(N_\theta-\frac{1}{R_s}M_s\right)\vartheta_\theta-rS\vartheta_s=0,$$

$$\left(S=N_{\theta s}-\frac{1}{R_s}M_{s\theta}=N_{s\theta}-\frac{\sin\varphi}{r}M_{\theta s}\quad,\quad H=M_{s\theta}=M_{\theta s}\right),$$

рівнянь Максвелла

$$-\frac{\partial B_\zeta}{\partial t}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial s}-\frac{\partial E_s}{\partial\theta}\right);\ \sigma_1\left[E_s-\frac{\partial v}{\partial t}B_\zeta-0{,}5\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_\theta^++B_\theta^-\right)\right]=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial H_\zeta}{\partial\theta}-\frac{r\left(H_\theta^+-H_\theta^-\right)}{h}\right);$$

$$\sigma_2\left[E_\theta-\frac{\partial u}{\partial t}B_z+0{,}5\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_s^++B_s^-\right)\right]=\left(-\frac{\partial H_\zeta}{\partial s}+\frac{\left(H_s^+-H_s^-\right)}{h}\right), \tag{19}$$

виразів для деформацій

$$\varepsilon_s=\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{w}{R_s}+\frac{1}{2}\vartheta_s^2;\quad \varepsilon_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r}u+\frac{\sin\varphi}{r}w+\frac{1}{2}\vartheta_\theta^2;$$

$$\varepsilon_{s\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+r\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v}{r}\right)+\vartheta_s\vartheta_\theta;\qquad \chi_s=\frac{\partial\theta}{\partial s};\ \chi_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r}\vartheta_s;$$

$$(20)$$

$$2\chi_{s\theta}=\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial s}+\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta_s}{\partial\theta}-\frac{\cos\varphi}{r}\vartheta_\theta+\frac{1}{R_s}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{\cos\varphi}{r}v\right)+\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial v}{\partial s};$$

де

$$\vartheta_s=-\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{u}{R_s};\ \vartheta_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{\sin\varphi}{r}v, \tag{21}$$

співвідношень пружності $N_s=\frac{e_sh}{1-\nu_s\nu_\theta}\left(\varepsilon_s+\nu_\theta\varepsilon_\theta\right)$; $N_\theta=\frac{e_\theta h}{1-\nu_s\nu_\theta}\left(\varepsilon_\theta+\nu_s\varepsilon_s\right)$; $S=g_{s\theta}h\varepsilon_{s\theta}$;

$$M_s=\frac{e_sh^3}{12(1-\nu_s\nu_\theta)}\left(\chi_s+\nu_\theta\chi_\theta\right);\ M_\theta=\frac{e_\theta h^3}{12(1-\nu_s\nu_\theta)}\left(\chi_\theta+\nu_s\chi_s\right);\quad H=g_{s\theta}\frac{h^3}{12}2\chi_{s\theta}. \tag{22}$$

Тут $\nu_s=\nu_{\theta s}$; $\nu_\theta=\nu_{s\theta}$; $e_s\nu_\theta=e_\theta\nu_s$.

Компоненти сили Лоренца мають вигляд:

$$\rho F_s^n=-hJ_{\theta cm}B_\zeta+\sigma_1h\left[E_\theta B_\zeta-\frac{\partial u}{\partial t}B_\zeta^2+0{,}5\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_s^++B_s^-\right)B_\zeta\right]+$$

$$+\sigma_1h\frac{\partial v}{\partial t}\left[0{,}25\left(B_s^++B_s^-\right)\left(B_\theta^++B_\theta^-\right)+\frac{1}{12}\left(B_s^+-B_s^-\right)\left(B_\theta^+-B_\theta^-\right)-\frac{1}{12}\left(B_\theta^++B_\theta^-\right)B_\zeta\right],$$

$$\rho F_\theta^n=hJ_{scm}B_\zeta-\sigma_2h\left\{\frac{\mu_2}{\sigma_1r}\left(\frac{\partial B_\zeta}{\partial\theta}-\frac{r\left(B_\theta^+-B_\theta^-\right)}{h}\right)-\frac{\partial v}{\partial t}B_\zeta+0{,}5\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_\theta^++B_\theta^-\right)\right\}B_\zeta+$$

$$+\sigma_2h0{,}5\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_\theta^++B_\theta^-\right)B_\zeta-\sigma_2h\frac{\partial v}{\partial t}B_\zeta^2-\sigma_2h\frac{\partial v}{\partial t}\left(0{,}25\left(B_\theta^++B_\theta^-\right)^2+\frac{1}{12}\left(B_\theta^+-B_\theta^-\right)^2-0{,}5\left(B_s^++B_s^-\right)B_\zeta\right)$$

$$\rho F_\zeta^n = 0{,}5\,h\left[-J_{scm}\left(B_\theta^+ + B_\theta^-\right) + J_{\theta cm}\left(B_s^+ + B_s^-\right)\right] + \tag{23}$$

$$+0{,}5\ \sigma_3\,h\left\{\frac{\mu_2}{\sigma_1 r}\left(\frac{\partial B_\zeta}{\partial\theta} - \frac{r\left(B_\theta^+ - B_\theta^-\right)}{h}\right) - \frac{\partial v}{\partial t}B_\zeta + 0{,}5\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_\theta^+ + B_\theta^-\right)\right\}\left(B_\theta^+ + B_\theta^-\right) -$$

$$-\sigma_3\,h\,0{,}5\,E_\theta\left(B_s^+ + B_s^-\right) + \sigma_3\,h\,0{,}5\,\frac{\partial u}{\partial t}\left(B_s^+ + B_s^-\right)B_\zeta + \sigma_3\,h\,0{,}5\,\frac{\partial v}{\partial t}\left(B_\theta^+ + B_\theta^-\right)B_\zeta -$$

$$-\sigma_3\,h\frac{\partial w}{\partial t}\left[0{,}25\left(B_\theta^+ + B_\theta^-\right)^2 + 0{,}25\left(B_s^+ + B_s^-\right)^2 + \frac{1}{12}\left(B_\theta^+ - B_\theta^-\right)^2 + \frac{1}{12}\left(B_s^+ - B_s^-\right)^2\right].$$

Тут N_s, N_θ - нормальні тангенціальні зусилля; S - зсувне зусилля; Q_s, Q_θ - поперечні зусилля; M_s, M_θ, H - відповідно згинаючі та скручуючий моменти; u, v, w - компоненти переміщень; E_s, E_θ - складові напруженості електричного поля; B_ζ - нормальна складова магнітної індукції; B_s^+, B_s^- - відомі складові магнітної індукції на поверхні оболонки. J_{scm}, $J_{\theta cm}$ - складові густини електричного струму від зовнішнього джерела; σ_s - електрична провідність; $h = h(s,\theta)$ - товщина оболонки; E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуассона.

Використовуючи наведені рівняння магнітопружності (18)-(23), побудуємо розв'язуючу систему рівнянь оболонок обертання для осесиметричного випадку. Припускаємо, що всі компоненти, які входять в рівняння, не залежать від координати θ.

У випадку дослідження напружено-деформованого стану ортотропних оболонок обертання довільної форми, будемо виходити з наступних міркувань. По-перше, шукана система рівнянь повинна описувати увесь клас оболонок обертання, включаючи циліндричну оболонку і круглу пластину, по-друге, вона повинна бути, представлена у вигляді, зручному для чисельного розв'язання задачі, по-третє, повинна допускати формулювання граничних умов в зусиллях, моментах, переміщеннях і у змішаному вигляді. Нарешті, система диференціальних рівнянь повинна бути записана відносно таких функцій, щоб можна було найпростішим чином здійснити умови спряження різних оболонок. Виходячи з цих міркувань, обираємо в якості розв'язуючих наступні функції:

$$u_x, u_z, \vartheta_s, N_x, N_z, M_s, E_\theta, B_\zeta, \tag{24}$$

де u_x, u_z - радіальне та осьове переміщення; N_x, N_z - радіальне та осьове зусилля; E_θ, B_ζ - напруженість електричного і індукція магнітного полів, які виражаються через переміщення u, w і зусилля N_s, Q_s наступним чином

$$N_x = N_s\cos\varphi + Q_s\sin\varphi;\ N_z = N_s\sin\varphi - Q_s\cos\varphi; \tag{25}$$

$$u_x = u\cos\varphi + w\sin\varphi;\ u_z = u\sin\varphi - w\cos\varphi.$$

Після деяких перетворень з врахуванням (24), (25) отримуємо наступну зв'язану систему нелінійних диференціальних рівнянь у формі Коші:

$$\frac{\partial u_x}{\partial s} = \frac{1 - v_s v_\theta}{e_s h}\left(\cos\varphi N_x + \sin\varphi N_Z\right)\cos\varphi + \frac{v_\theta\cos\varphi}{r}u_x + \frac{1}{R_s}u_z - \sin\varphi\ \vartheta_s - \frac{\cos\varphi}{2}\vartheta_s^2;$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial s} = \frac{1 - v_s v_\theta}{e_s h}\left(\cos\varphi N_x + \sin\varphi N_z\right)\sin\varphi + \frac{v_\theta\sin\varphi}{r}u_x - \frac{1}{R_s}u_z + \cos\varphi\ \vartheta_s - \frac{\sin\varphi}{2}\vartheta_s^2;$$

$$\frac{\partial\vartheta_s}{\partial s} = \frac{12\left(1 - v_s v_\theta\right)}{e_s h^3}M_s - \frac{v_\theta\cos\varphi}{r}\vartheta_s;$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial s} = \frac{\cos\varphi}{r}\left(v_\theta - 1\right)N_x + \left(\frac{1}{R_s} + \frac{v_\theta\sin\varphi}{r}\right)N_z + \frac{e_\theta h}{r^2}u_x - \cos\varphi\left(P_S + \rho f_S^\wedge\right) - \sin\varphi\left(P_\zeta + \rho f_\zeta^\wedge\right) + \rho h\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial N_z}{\partial s} = -\frac{\cos\varphi}{r}N_z - \frac{1}{R_s}N_x - \sin\varphi\left(P_S + \rho f_S^\wedge\right) + \cos\varphi\left(P_\zeta + \rho f_\zeta^\wedge\right) + \rho h\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}; \tag{26}$$

$$\frac{\partial M_s}{\partial s} = \frac{\cos\varphi}{r}\left(v_\theta - 1\right)M_s + \frac{e_\theta h^3}{12}\frac{\cos^2\varphi}{r^2}\vartheta_s + \cos\varphi\ N_x - \sin\varphi\ N_z +$$

$$+\left(\cos\varphi N_x + \sin\varphi N_z\right)\vartheta_s - \frac{v_\theta\sin\varphi}{r}M_s\,\vartheta_s - \frac{e_\theta h^3}{12}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r}\vartheta_s^2;$$

$$\frac{\partial B_\zeta}{\partial s} = -\sigma_2\mu_3\left[E_\theta + 0{,}5\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\sin\varphi - \frac{\partial u_z}{\partial t}\cos\varphi\right)\left(B_S^+ + B_S^-\right) - \left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\cos\varphi + \frac{\partial u_z}{\partial t}\sin\varphi\right)B_\zeta\right] + \frac{B_S^+ - B_S^-}{\mu_1\ h};$$

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_\zeta}{\partial t} - \frac{\cos\varphi}{r}E_\theta.$$

Компоненти сили Лоренца в даному випадку мають вигляд:

$$\rho f_S^{\wedge} = -h J_{\theta cm} B_\zeta + \sigma_1 h \left[E_\theta B_\zeta + 0,5 \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \sin\varphi - \frac{\partial u_z}{\partial t} \cos\varphi \right) B_\zeta \left(B_S^+ + B_S^- \right) - \right.$$

$$\left. \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \cos\varphi + \frac{\partial u_z}{\partial t} \sin\varphi \right) B_\zeta^2 \right];$$

$$\rho f_\zeta^{\wedge} = 0,5 h J_{\theta cm} \left(B_S^+ + B_S^- \right) + \sigma_3 h \left\{ -0,5 E_\theta \left(B_S^+ + B_S^- \right) - \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \sin\varphi - \frac{\partial u_z}{\partial t} \cos\varphi \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[0,25 \left(B_S^+ + B_S^- \right)^2 + \frac{1}{12} \left(B_S^+ - B_S^- \right)^2 \right] + 0,5 \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \cos\varphi + \frac{\partial u_z}{\partial t} \sin\varphi \right) B_\zeta \left(B_S^+ + B_S^- \right) \right\}. \quad (27)$$

Тут під $B_S^{\pm}$ - розуміємо $B_S^{\pm} = B_{S0}^{\pm} + B_{S0} - B_{\zeta 0} \vartheta_S + B_\zeta \vartheta_S$.

Де $B_{S0}^{\pm}$ - компоненти магнітної індукції початкового власного магнітного поля, обумовлені стороннім електричним струмом; B_{S0} - компоненти зовнішнього магнітного поля, отримані з розв'язку задачі статики; B_ζ - нормальна складова магнітної індукції оболонки, $h = h(s)$ - товщина оболонки.

Таким чином, отримана зв'язана розв'язуюча система нелінійних диференціальних рівнянь восьмого порядку (26) описує напружено-деформований стан гнучких струмонесучих ортотропних оболонок обертання з довільною формою меридіану, яка має ортотропну електропровідність. Складові сили Лоренца враховують швидкість деформування оболонки, зовнішнє магнітне поле, величину и напруженість струму провідності відносно зовнішнього магнітного поля. Врахування нелінійності в рівняннях руху викликає нелінійність в пондеромоторній силі. Додаючи до отриманої системи рівнянь початкові і граничні умови, отримаємо крайову задачу. У векторному вигляді нелінійна крайова задача має вигляд:

рівняння руху

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial s} = \vec{F}\left(s, t, \vec{N}, \frac{\partial \vec{N}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial t^2} \right), \qquad \begin{pmatrix} s_0 \le s \le s_N, \\ t_0 \le t \le t_N \end{pmatrix}, \quad (28)$$

граничні умови

$$\vec{g}_1\left(\vec{N}(s_0, t) \right) = \vec{b}_1^{\,*}, \quad \vec{g}_2\left(\vec{N}(s_N, t) \right) = \vec{b}_2^{\,*}, \quad (29)$$

початкові умови

$$\vec{N} = 0, \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (30)$$

Тут: $\vec{N} = \{u, w, \theta_S, N_S, Q_S, M_S, E_\theta, B_z\}^T$ – вектор стовпчик шуканих функцій; $\vec{F}, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{b}_1^{\,*}, \vec{b}_2^{\,*}$ - у загальному випадку нелінійні вектор функції. В подальшому, крайова задача (28), (29) з початковими умовами (30), розв'язується чисельно у відповідності з методикою, яка викладена в роботах [7,10]. Розв'язок крайових задач магнітопружності пов'язаний з суттєвими обчислювальними труднощами. Це пояснюється тим, що розв'язуюча система рівнянь (26) є системою диференціальних рівнянь гіперболо-параболічного типу восьмого порядку зі змінними коефіцієнтами. Запропонований підхід до чисельного розв'язання крайової задачі базується на послідовному застосуванні схеми Ньюмарка, методу квазілінеаризації і методу дискретної ортогоналізації.

На закінчення відмітимо наступне. Діелектричні і магнітні властивості твердого тіла змінюються не тільки при зміні густини, але і при деформаціях (зсувах), коли густина залишається сталою. В результаті деформації діелектричні і магнітні властивості тіла стають анізотропними, а скалярні діелектрична і магнітна проникливості замінюються тензорами другого рангу. На основі отриманих рівнянь, з використанням запропонованої методики, маємо можливість, враховувати, як анізотропію матеріалу, так і анізотропію внутрішнього електромагнітного поля оболонки, а також вплив деформацій на електромагнітні властивості тіла. Такі задачі електромагнітопружності досить актуальні з точки зору додатків.

2. Висновки.

У випадку тонких анізотропних чи ізотропних тіл з анізотропною електропровідністю можна ставити і розв'язувати оптимальні задачі магнітопружності шляхом варіації усіх фізико-механічних параметрів матеріалу тіла. Зокрема, при сталих механічних і геометричних параметрах задачі, за допомогою зміни анізотропних електродинамічних параметрів можна отримати конструктивні елементи з якісно новою механічною поведінкою.

1. *Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. - М., 1977. 2. *Багдасарян Г.Е., Данонян З.Н.* Уравнения движения в перемещениях идеально-проводящих упругих анизотропных сред при наличии магнитного поля // Механика: Межвуз., сб., науч., тр., Мех., дефор., тверд., тела. - 1984. - Вып. 3. - С. 32-42. 3. *Вольман В.И., Пименов Ю.В.* Техническая электродинамика. - М., 1971. 4. *Григоренко Я.М., Мольченко Л.В.* Основи теорії пластин та оболонок. - К., 1993. 5. *Kaliski S.* Wave equations of thermoelectromagnetoelasticity. // Proc. Vibr. Probl. Pol. Acad. Sci., - 1965, - 6, № 3, - P. 231-265. 6. *Махорт Ф.Г.* О теории распространения магнито-упругих волн в проводящих телах с начальными напряжениями. // Прикл. Механика. - 1985, XXI , - № 6, - С. 3-11. 7. *Мольченко Л.В., Лоос И.И., Индиаминов Р.Ш.* Нелинейное деформирование конической оболочки, находящейся в магнитном поле. // Прикл. механика, - 1997, 33, - № 3, - С.58-64. 8. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. - М., 1967. 9. *Сиротин Ю.И., Шашкольская М.П.* Основы кристаллофизики. - М., 1979. 10. *Улітко А.Т., Мольченко Л.В., Ковальчук В.Ф.* Магнітопружність при динамічному навантаженні. - К., 1994.

Надійшла до редколегії 25.09.07.