

АСИМПТОТИЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В даній статті розглядається асимптотична еквівалентність систем диференціальних рівнянь, визначених на m -вимірному торі.

In this article the asymptotic equivalence of systems of differential equations on the m -dimensional torus are under the consideration.

1. Вступ.

Дана робота присвячена вивченню асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь, які є лінійним розширенням динамічної системи на m -вимірному торі, а саме відшуканню системи диференціальних рівнянь, асимптотична поведінка розв'язків якої є подібною до поведінки розв'язків розглядуваної системи. В роботі [4] був отриманий аналог відміченого результату для розв'язків систем диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \text{ де } A \text{ – стала } (n \times n)\text{-матриця, розв'язки якої обмежені на } [0, \infty) \text{ і } \frac{dy}{dt} = [A + B(t)]y, \text{ де}$$

$B(t) \in C[0, \infty)$ і $\int_0^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty$, який отримав назву теореми Левінсона.

2. Основні результати.

Розглянемо два лінійні розширення динамічних систем на торі

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = A(\varphi)x \tag{1}$$

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{y} = B(\varphi)y. \tag{2}$$

Тут $\varphi \in T^m$, $x, y \in R^n$, $a(\varphi)$ – m -мірна векторнозначна, $A(\varphi)$ і $B(\varphi)$ – $(n \times n)$ -мірні матричні функції, 2π -періодичні по φ_ν , $\nu = 1, 2, \dots, m$.

Кажуть [1], що системи (1) і (2) асимптотично еквівалентні, якщо між їх розв'язками $x(t, \varphi)$ і $y(t, \varphi)$ можна встановити таку взаємно однозначну відповідність, що $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t, \varphi) - y(t, \varphi)) = 0$, $\varphi \in T^m$.

Наведемо прості ознаки асимптотичної еквівалентності лінійних розширень динамічних систем на торі. Припустимо, що в системі (1) матриця $A(\varphi)$ така, що існує границя $\lim_{t \rightarrow \infty} A(\varphi_t(\varphi)) = A$ рівномірно по $\varphi \in T^m$.

Теорема 1. Нехай розв'язки системи рівнянь

$$\dot{x} = Ax \tag{3}$$

обмежені при $t \geq 0$. Якщо матриці $\sum_{j=1}^m \frac{\partial A(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi)$ і $B(\varphi)$ абсолютно інтегровані на $[0, \infty)$ вздовж кожної з траєкторій системи $\dot{\varphi} = a(\varphi)$, $\varphi \in T^m$, то лінійні розширення

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = A(\varphi)x \tag{4}$$

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{y} = (A(\varphi) + B(\varphi))y \tag{5}$$

асимптотично еквівалентні.

Для доведення сформульованого твердження використаємо ідею Брауера доведення теореми Левінсона [1, с.159], [3].

Без обмеження можна вважати, що $A = \text{diag}(A_0, A_-)$, де матриця A_0 має власні числа з нульовою дійсною частиною, а дійсні частини всіх власних чисел матриці A_- – від'ємні.

Позначимо через $X(t) = \text{diag}(e^{A_0 t}, e^{A_- t})$ матрицант системи рівнянь (3) і покладемо $X(t) = X_0(t) + X_-(t)$, де $X_0(t) = \text{diag}(e^{A_0 t}, 0)$, $X_-(t) = \text{diag}(0, e^{A_- t})$.

Тоді матрицю Коші $K(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau) = X(t - \tau)$ можна подати у вигляді $K(t - \tau) = X_0(t - \tau) + X_-(t - \tau)$,

причому існують такі додатні числа α, K_0 і K_- , що

$$\|X_0(t)\| = \|e^{A_0 t}\| \leq K_0, \quad t \in R, \tag{6}$$

$$\|X_-(t)\| = \|e^{A_- t}\| \leq K_- e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \tag{7}$$

Переконаємося тепер, що при виконанні умов теореми системи рівнянь (3) і (4) асимптотично еквівалентні. Для цього при кожному фіксованому $\varphi \in T^m$ (4) запишемо у вигляді

$$\dot{x} = Ax + P(\varphi_t(\varphi))x \tag{8}$$

де $P(\varphi) = A(\varphi) - A$, а систему (5) у вигляді

$$\dot{y} = Ay + [P(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi))]y. \quad (9)$$

Для кожного розв'язку $x(t, \varphi)$, $x(t_0, \varphi) = x_0$ справедливе інтегральне представлення

$$x(t, \varphi) = X(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X_0(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau, \varphi)d\tau + \int_{t_0}^t X_-(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau, \varphi)d\tau. \quad (10)$$

В силу абсолютної інтегрованості на $[0, \infty)$ матриці $P(\varphi_t(\varphi))$ для кожного $\varphi \in T^m$ робимо висновок, що кожний розв'язок $x(t, \varphi) \in$ обмеженим на $[0, \infty)$, а, отже, невластний інтеграл $\int_{t_0}^{\infty} X_0(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau, \varphi)d\tau$ збігається, що дає можливість інтегральне представлення (10) подати у вигляді

$$x(t, \varphi) = X(t-t_0)[x_0 + \int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau, \varphi)d\tau] + \int_{t_0}^t X_-(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau, \varphi)d\tau - \int_t^{\infty} X_0(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau, \varphi)d\tau \quad (11)$$

Аналогічні міркування дають можливість кожен розв'язок $y(t, \varphi)$, $y(t_0, \varphi) = y_0$ рівняння (9) подати у подібному до (11) вигляді

$$y(t, \varphi) = X(t-t_0)[y_0 + \int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0-\tau)[P(\varphi_\tau(\varphi)) + B(\varphi_\tau(\varphi))]y(\tau, \varphi)d\tau] + \int_{t_0}^t X_-(t-\tau)[P(\varphi_\tau(\varphi)) + B(\varphi_\tau(\varphi))]y(\tau, \varphi)d\tau - \int_t^{\infty} X_0(t-\tau)[P(\varphi_\tau(\varphi)) + B(\varphi_\tau(\varphi))]y(\tau, \varphi)d\tau, \quad (12)$$

бо в силу абсолютної інтегрованості на $[0, \infty)$ матриці $B(\varphi_t(\varphi))$ невластний інтеграл $\int_{t_0}^{\infty} X_0(t-\tau)B(\varphi_\tau(\varphi))d\tau$ збігається.

Між множиною розв'язків $x(t, \varphi)$, $x(t_0, \varphi) = x_0$ системи (8) і множиною розв'язків $y(t, \varphi)$, $y(t_0, \varphi) = y_0$ системи (9) встановимо відповідність формулою

$$x_0 + \int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau, \varphi)d\tau = y_0 + \int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0-\tau)[P(\varphi_\tau(\varphi)) + B(\varphi_\tau(\varphi))]y(\tau, \varphi)d\tau. \quad (13)$$

Переконаємося, що ця відповідність задає ізоморфізм лінійних просторів розв'язків систем рівнянь (8) і (9). Кожен з розв'язків $x(t, \varphi)$, $x(t_0, \varphi) = x_0$ і $y(t, \varphi)$, $y(t_0, \varphi) = y_0$ можна подати у вигляді $x(t, \varphi) = Q_{t_0}^t(\varphi)x_0$ і $y(t, \varphi) = R_{t_0}^t(\varphi)y_0$

де $Q_{t_0}^t(\varphi)$ і $R_{t_0}^t(\varphi)$ – матрицанти відповідно систем рівнянь (8) і (9), а тому рівність (13) можна записати так:

$$(E + \int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))Q_{t_0}^\tau(\varphi)d\tau)x_0 = (E + \int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0-\tau)[P(\varphi_\tau(\varphi)) + B(\varphi_\tau(\varphi))]R_{t_0}^\tau(\varphi)d\tau)y_0. \quad (14)$$

В силу умов теореми легко перекопати, що матрицанти $Q_{t_0}^t(\varphi)$ і $R_{t_0}^t(\varphi)$ рівномірно щодо $\varphi \in T^m$ і $t_0 \geq 0$ обмежені на $[t_0, \infty)$.

Так як $\int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0-\tau)\|P(\varphi_\tau(\varphi))\| \cdot \|Q_{t_0}^\tau(\varphi)\|d\tau \rightarrow 0$, $\int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0-\tau)(\|P(\varphi_\tau(\varphi))\| + \|B(\varphi_\tau(\varphi))\|) \cdot \|R_{t_0}^\tau(\varphi)\|d\tau \rightarrow 0$, коли $t_0 \rightarrow \infty$, в силу абсолютної інтегрованості матриць $P(\varphi_t(\varphi))$ і $B(\varphi_t(\varphi))$, то робимо висновок, що рівність (14), а отже і (13) задає ізоморфізм між множинами розв'язків систем (8) і (9).

Оцінимо різницю розв'язків $x(t, \varphi)$ і $y(t, \varphi)$ з початковими умовами, що задовольняють рівності (13). Скориставшись інтегральними представленнями (11) і (12) з урахуванням (13), маємо

$$y(t, \varphi) - x(t, \varphi) = \int_{t_0}^t X_-(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))[y(\tau, \varphi) - x(\tau, \varphi)]d\tau - \int_t^{\infty} X_0(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))[y(\tau, \varphi) - x(\tau, \varphi)]d\tau + \int_{t_0}^t X_-(t-\tau)B(\varphi_\tau(\varphi))y(\tau, \varphi)d\tau - \int_t^{\infty} X_0(t-\tau)B(\varphi_\tau(\varphi))y(\tau, \varphi)d\tau$$

$$y(t, \varphi) - x(t, \varphi) = \int_{t_0}^t X_-(t-\tau)[P(\varphi_\tau(\varphi)) + B(\varphi_\tau(\varphi))][y(\tau, \varphi) - x(\tau, \varphi)]d\tau - \int_t^{\infty} X_0(t-\tau)[P(\varphi_\tau(\varphi)) + B(\varphi_\tau(\varphi))] \cdot [y(\tau, \varphi) - x(\tau, \varphi)]d\tau + \int_{t_0}^t X_-(t-\tau)B(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau, \varphi)d\tau - \int_t^{\infty} X_0(t-\tau)B(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau, \varphi)d\tau. \quad (15)$$

Так як кожен з розв'язків $x(t, \varphi)$ і $y(t, \varphi)$ обмежений на проміжку $[0, \infty)$, то покладаючи

$$\sup_{t \geq t_0} \|y(t, \varphi) - x(t, \varphi)\| = m, \quad \sup_{t \geq t_0} \|Q_{t_0}^t \varphi\| = q, \quad \text{з (15) дістаємо}$$

$$\|y(t, \varphi) - x(t, \varphi)\| \leq \int_{t_0}^t K_- e^{-\alpha(t-\tau)} (\|P(\varphi_\tau(\varphi))\| + \|B(\varphi_\tau(\varphi))\|) m d\tau + \int_{t_0}^t K_- e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \|B(\varphi_\tau(\varphi))\| \cdot q \cdot \|x_0\| d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^t K_0 (\|P(\varphi_\tau(\varphi))\| + \|B(\varphi_\tau(\varphi))\|) m d\tau + \int_{t_0}^t K_0 \|B(\varphi_\tau(\varphi))\| \cdot q \cdot \|x_0\| d\tau. \quad (16)$$

Останні два доданки правої частини цієї нерівності прямують до нуля, коли $t \rightarrow \infty$ в силу абсолютної інтегрованості матричних функцій $P(\varphi_t(\varphi))$ і $B(\varphi_t(\varphi))$. Переконаємося, що перші два доданки правої частини нерівності (16) мають таку ж властивість. Справді, для $t \geq 2t_0$

$$\int_{t_0}^t K_- e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \|B(\varphi_\tau(\varphi))\| \cdot q \cdot \|x_0\| d\tau = \int_{t_0}^{t/2} K_- e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \|B(\varphi_\tau(\varphi))\| \cdot q \cdot \|x_0\| d\tau + \int_{t/2}^t K_- e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \|B(\varphi_\tau(\varphi))\| \cdot q \cdot \|x_0\| d\tau \leq$$

$$\leq e^{-\frac{\alpha t}{2}} \int_0^\infty K_- \|B(\varphi_\tau(\varphi))\| d\tau \cdot q \|x_0\| + \int_{t/2}^t K_- \|B(\varphi_\tau(\varphi))\| d\tau \cdot q \|x_0\| \rightarrow 0,$$

коли $t \rightarrow \infty$. Аналогічно $\int_{t_0}^t K_- e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot (\|P(\varphi_\tau(\varphi))\| + \|B(\varphi_\tau(\varphi))\|) d\tau \cdot m \leq$

$$\leq e^{-\frac{\alpha t}{2}} \int_0^\infty K_- (\|P(\varphi_\tau(\varphi))\| + \|B(\varphi_\tau(\varphi))\|) d\tau \cdot m + \int_{t/2}^t K_- (\|P(\varphi_\tau(\varphi))\| + \|B(\varphi_\tau(\varphi))\|) d\tau \cdot m \rightarrow 0, \quad \text{коли } t \rightarrow \infty.$$

Отже, з нерівності (16) робимо висновок, що $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t, \varphi) - y(t, \varphi)) = 0$, тобто системи рівнянь (8) і (9), або ж, що те саме, системи (4) і (5), асимптотично еквівалентні.

Сформулюємо ще частинний випадок доведеної теореми. Спочатку зауважимо, що за умови абсолютної інтегрованості на $[0, \infty)$ матриці $\sum_{j=1}^m \frac{\partial A(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi)$ вздовж кожної з траєкторій системи $\dot{\varphi} = a(\varphi)$, $\varphi \in \Gamma^m$ існує границя

$\lim_{t \rightarrow \infty} A(\varphi_t(\varphi)) = A$. Тому в теоремі замість абсолютної інтегрованості матриці $\sum_{j=1}^m \frac{\partial A(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi)$ досить вимагати абсо-

лютну інтегрованість матриці $P(\varphi_t(\varphi))$. Безпосередньо переконуємося в справедливості такого твердження

Теорема 2. Нехай в системі рівнянь (4) матриця $A(\varphi)$ така, що існує стала границя $\lim_{t \rightarrow \infty} A(\varphi_t(\varphi)) = A$

для всіх $\varphi \in \Gamma^m$ і матриця $A(\varphi_t(\varphi)) - A$ абсолютно інтегрована на $[0, \infty)$ для кожного $\varphi \in \Gamma^m$. Якщо розв'язки системи рівнянь (3) обмежені при $t \geq 0$, то система рівнянь (4) асимптотично еквівалентна системі (3).

З доведення теореми 1 випливає, що взаємно однозначна відповідність між розв'язками $x(t, x_0)$, $x(t_0, x_0) = x_0$ системи (3) і $y(t, \varphi)$, $y(t_0, \varphi) = y_0$ системи (4) при фіксованому $\varphi \in \Gamma^m$, що має місце гранична рівність

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t, x_0) - y(t, \varphi)) = 0 \quad \text{встановлюється рівністю } x_0 = y_0 + \int_{t_0}^\infty X_0(t_0 - \tau) P(\varphi_\tau(\varphi)) Q_{t_0}^\tau(\varphi) d\tau \cdot y_0.$$

Нехай $\lim_{t \rightarrow \infty} A(\varphi_t(\varphi)) = A$ і розв'язки системи рівнянь $\dot{x} = Ax$ обмежені на проміжку $[0, \infty)$.

Якщо матриця $A(\varphi_t(\varphi)) - A$ абсолютно інтегровна на $[0, \infty)$ вздовж будь-якого розв'язку $\varphi_t(\varphi)$ системи на торі $\dot{\varphi} = a(\varphi)$, то система $\dot{y} = A(\varphi_t(\varphi))y$ асимптотично еквівалентна системі $\dot{x} = Ax$.

Асимптотичну еквівалентність системи здійснює відповідність: $x_0 = y_0 + \int_{t_0}^\infty X_0(t_0 - \tau) (A(\varphi_\tau(\varphi)) - A) y(\tau, \varphi) d\tau$.

3. Висновки.

В даній роботі отримано достатні умови асимптотичної еквівалентності систем диференціальних рівнянь, які є лінійним розширенням динамічної системи на торі.

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – М., 1969. 2. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М., 1987. 3. Brauer. Nonlinear differential equations with forcing terms, Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – 15, №5. – P. 758 – 765. 4. Levinson N. The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations. Duke Math. Journ. – 1948. – 15. – P. 111 – 126.

УДК 517.9

Ю. Вакал, студ., І. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук
Vakal@ipnet.ua, pio@univ.kiev.ua**ОЦІНКА ХАУСДОРФОВОЇ РОЗМІРНОСТІ МНОЖИНИ КОЛМОГОРОВСЬКИХ ТОРІВ, ЧАСТОТИ ЯКИХ ПОГАННО АПРОКСИМУЮТЬСЯ РАЦІОНАЛЬНИМИ ЧИСЛАМИ**

Для гамільтонової системи з двома ступенями волі, близької до цілком інтегрованої, оцінено розмірність Хаусдорфа множини колмогоровських торів, для яких відношення частот квазіперіодичних рухів погано апроксимуються раціональними числами. Показано, що зазначена розмірність відрізняється від розмірності фазового простору на величину, пропорційну кореню шостого степеня з амплітуди збурення.

For Hamiltonian system with two degrees of freedom which is close to a completely integrable one, the Hausdorff dimension of a set of Kolmogorov tori for which the ratio of frequencies of quasiperiodic motions is badly approximable by rational numbers is estimated. It is shown that the above dimension differs from that of the phase space by the value proportional to the root of sixth degree of perturbation amplitude.

1. Вступ.

В останні десятиліття значну увагу дослідників, які працюють в галузі нелінійної динаміки, привертають задачі, пов'язані з вивченням механізмів переходу від регулярної до хаотичної поведінки нелінійних систем. Виявилось, що такий перехід, як правило, супроводжується виникненням у фазовому просторі структур фрактального типу [2; 3; 4; 6; 9; 20].

Однією з визначальних характеристик фрактальної множини є розмірність Хаусдорфа (Хаусдорфа-Безіковича), яка набуває дробових значень і не збігається з топологічною розмірністю [5; 7; 19].

Класичними прикладами фракталів є самоподібні множини канторового типу: трихотомічна множина Кантора, килим та губка Серпінського тощо. Досконалі ніде не щільні множини канторового типу природно з'являються у теорії Колмогорова-Арнольда-Мозера (КАМ), а також в інших задачах математичної фізики, в яких виникає відома проблема малих знаменників [1]. Так, частоти ω квазіперіодичних рухів колмогоровської множини інваріантних торів (ця множина складається з інваріантних торів збуреної гамільтонової системи, близької до невідродженої цілком інтегрованої гамільтонової системи) належать (несамоподібній) канторовій множині вигляду

$$\Omega_{\alpha}^{\tau} = \{\omega \in \Omega : \langle k, \omega \rangle \geq \alpha |k|^{-\tau} \quad \forall k \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}\},$$

де $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – область зміни частот незбуреної системи, n – кількість ступенів волі, τ і α – додатні числа, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярний добуток в \mathbf{R}^n , $|k| = |k_1| + \dots + |k_n|$. Зауважимо, що α при фіксованому τ може бути величиною порядку $\sqrt{\varepsilon}$, де ε – амплітуда збурення ($0 < \varepsilon \ll 1$) [1; 21].

Тривалий час у КАМ-теорії основна увага приділялася метричним характеристикам колмогоровської множини. Оскільки при фіксованому $\tau > n - 1$ міра Лебега доповнення до множини Ω_{α}^{τ} не перевищує величини порядку α , то при $\varepsilon \rightarrow 0$ відносна міра колмогоровської множини прямує до 1. Водночас для $\tau < n - 1$ множина $\Omega^{\tau} = \bigcup_{\alpha > 0} \Omega_{\alpha}^{\tau}$ узагалі є порожньою.

Відзначимо, яким би не було малим, але фіксованим $\varepsilon > 0$, КАМ-теорія не гарантує, що існують тори з частотами $\omega \in \Omega_{\alpha}^{\tau+1} \setminus \Omega_{\alpha}^{\tau}$ при як завгодно великому $\tau > n - 1$. Це пояснюється тим, що збурення спричиняє руйнування не лише строго резонансних торів, для яких частоти задовольняють точні рівності $\langle k, \omega \rangle = 0$ з деякими $k \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}$, але й торів, частоти яких досить добре апроксимуються раціональними числами. Теорія руйнування інваріантних торів та перехід до хаотичної динаміки зараз знаходяться в стадії активного розвитку. Теоретичні та експериментальні дослідження дають підстави для таких висновків: із зростанням величини збурення спочатку руйнуються ті тори, які краще апроксимуються раціональними числами; при цьому у фазовому просторі з'являються щілини, вільні від інваріантних торів; у щілинах між збуреними торами виникають хаотичні рухи, а якщо число ступенів волі перевищує 2, то в щілинах може виникнути явище так званої дифузії Арнольда; під дією збурень, які наростають, деформовані тори можуть поступово втрачати гладкість, перетворюючись урешті-решт на канторо-тори; останніми мають руйнуватися тори, частоти яких найгірше апроксимуються раціональними числами, тобто тори з частотами, які належать Ω_{α}^{n-1} з максимально можливим α ; зокрема, у випадку двох ступенів волі останніми руйнуються тори з відношенням частот, рівним золотому перерізу $(\sqrt{5} - 1)/2$ [1; 13; 16; 17; 18].

Викладене вище підтверджує важливість вивчення властивостей таких двох множин: 1) так званої виключної множини E^{τ} , утвореної частотами ω , кожна з яких має властивість: яке б не було $\alpha > 0$ знайдеться $k \in \mathbf{Z}^n$ таке, що $\langle k, \omega \rangle < \alpha |k|^{-\tau}$; 2) множини Ω^{n-1} . Властивості зазначених множин та їхніх узагальнень вже давно вивчаються в теорії діофантових наближень. Зокрема, ще у 1929 В. Ярніком [14] та в 1934 році незалежно А.С. Безіковичем [10] було показано, що хаусдорфова розмірність множини

$$W^{\tau} = \left\{ \lambda \in \mathbf{R} : \left| \lambda - p/q \right| < q^{-\tau} \quad \text{для нескінченної множини } (p/q) \in \mathbf{Q} \right\}$$

дорівнює $2/\tau$, якщо $\tau \geq 2$, і $W^{\tau} = \mathbf{R}$, якщо $\tau \leq 2$. В. Ярніком [15] було також виявлено, що множина

$$B = \bigcup_{\alpha > 0} \left\{ \lambda \in \mathbf{R} : \left| \lambda - p/q \right| \geq \alpha q^{-2} \quad \forall (p/q) \in \mathbf{Q} \right\},$$

(множина дійсних чисел, які погано апроксимуються раціональними числами) має нульову лебегову міру, але її хаусдорфова розмірність дорівнює 1. Про багатовимірні аналоги тверджень такого типу, зокрема для множини Ω^{n-1} , та про їхній зв'язок з КАМ-теорією йдеться в [11; 12].

Як уже зазначалося вище, природно було б висловити припущення, що тори з частотами, які погано апроксимуються раціональними числами, є найбільш стійкими щодо збурень. Виникає питання: якою є хаусдорфова розмірність множини таких торів? Наскільки відрізняється вона від розмірності фазового простору?

2. Постановка задачі.

Відповідь на поставлене питання не впливає безпосередньо з результатів, про які йшлося вище: адже КАМ-теорія гарантує існування збурених торів не з будь-якими частотами $\omega \in \Omega^{n-1}$, а лише з тими, які належать Ω_α^{n-1} при $\alpha = C\sqrt{\varepsilon}$, де C – деяка додатна стала. Отже, перш за все потрібно оцінити в залежності від ε хаусдорфову розмірність множини Ω_α^{n-1} , де $\alpha = C\sqrt{\varepsilon}$.

Надалі обмежимося аналізом випадку $n = 2$.

Розглянемо гамільтоніан вигляду $H(p, q, \varepsilon) = h(p) + f_\varepsilon(p, q)$, $f_\varepsilon(p, q) = \varepsilon f_1(p, q, \varepsilon)$ для малих значень параметра збурення ε , де $p = (p_1, p_2)$ – змінні дії, які пробігають область $D \subset \mathbf{R}^2$, а $q = (q_1, q_2) \bmod 2\pi$ – спряжені кутові змінні на торі \mathbf{T}^2 , так що f_ε має період 2π по кожній компоненті q_1, q_2 . Крім того, припускається, що H є дійсно аналітичним за всіма аргументами на $\bar{D} \times \mathbf{T}^2 \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, де ε_0 деяке додатне число.

Припускаємо, що інтегровний гамільтоніан h не вироджений у тому сенсі, що частотне відображення h'_p є дифеоморфізмом $D \rightarrow \Omega$. Тоді для кожного $\tau \geq 1$ існує стала $\delta > 0$ така, що для $0 < \varepsilon < \delta\alpha^2$ всі тори незбуреної системи з частотами $\omega := (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_\alpha^\tau$ виживають, є лагранжевими і лише трохи деформуються. Крім того, вони ліпшицево неперервно залежать від ω і, якщо $\tau > 1$, заповнюють множину, міра якої відрізняється від міри $D \times \mathbf{T}^n$ на величину $O(\alpha)$ [1]. Зрозуміло, що серед торів, які виживають є й усі ті, для яких відношення частот $\lambda = \omega_2 / \omega_1$ належить визначеній вище множині B . Міра Лебега множини таких торів дорівнює нулю. Задача полягає в оцінці розмірності Хаусдорфа цієї множини торів.

3. Основний результат.

Основний результат даної статті складає така теорема.

Теорема. При зроблених вище припущеннях щодо функції $H = h + f_\varepsilon$ існує така стала $C_0 > 0$, що множина інваріантних торів системи з гамільтоніаном H , які несуть на собі квазіперіодичні рухи з частотами ω_1, ω_2 і відношення яких ω_2 / ω_1 належить множині B , має розмірність Хаусдорфа не меншу, ніж $4 - C_0 \sqrt[6]{\varepsilon}$, при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доведення. Позначимо через $\Omega - \delta$ множину, яка складається з точок, які входять до Ω разом зі своїми δ -околами. Як відомо [21], існують числа $\varepsilon_* > 0$ і $C > 0$, і при кожному $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*)$ існує дифеоморфізм $\Psi : \Omega \times \mathbf{T}^2 \mapsto D \times \mathbf{T}^2$, який відображає множину $\hat{\Omega}(\varepsilon) \times \mathbf{T}^2$, де $\hat{\Omega}(\varepsilon) := \left\{ \omega \in \Omega - C\sqrt{\varepsilon} : \left| \langle k, \omega \rangle \right| \geq C\sqrt{\varepsilon} |k|^{-1} \quad \forall k \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{0\} \right\}$, в колмогоровську множину, причому образом тора $\{(\omega_1, \omega_2) \in \hat{\Omega}(\varepsilon)\} \times \mathbf{T}^2$ є інваріантний тор збуреної системи, який несе на собі квазіперіодичні рухи з частотами ω_1, ω_2 . Без обмеження загальності міркувань будемо вважати, що область Ω міститься в першому квадранті координатної площини. Відображення, яке точці $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ зіставляє точку $(\omega_1, \omega_2 / \omega_1) \in \hat{\Omega}(\varepsilon)$ є дифеоморфізмом. Цей дифеоморфізм переводить $\hat{\Omega}(\varepsilon)$ в множину, яка при відповідному виборі додатних чисел a, b, c, d містить у собі прямиий добуток

$$\{\omega_1 \in (a, b)\} \times \hat{B}(\varepsilon), \quad \text{де } \hat{B}(\varepsilon) := \left\{ \lambda \in (c, d) : \left| \lambda - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C\sqrt{\varepsilon}}{aq^2} \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \right\} \subset B.$$

Таким чином, колмогоровська множина містить підмножину торів, для яких відношення частот належить множині $\hat{B}(\varepsilon)$. Оскільки ліпеоморфізм і, зокрема, дифеоморфізм, зберігає хаусдорфову розмірність (її ми будемо позначати через \dim_H), а хаусдорфова розмірність прямого добутку множин не менша ніж сума хаусдорфових розмірностей співмножників, то для доведення теореми досить показати, що $\dim_H \hat{B}(\varepsilon) > 1 - C_0 \sqrt[6]{\varepsilon}$.

Для кожного $N > 0$ позначимо через B_N множину тих чисел $\lambda \in (c, d)$, які мають властивість: якщо $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ – зображення числа λ у вигляді ланцюгового дробу, то $a_j \leq N$ для всіх $j = 1, 2, \dots$. Як встановив В. Ярнік [15], для кожного $N \geq 8$ виконується нерівність

$$1 - \frac{4}{N \log 2} \leq \dim_H B_N \leq 1 - \frac{1}{8N \log N}. \quad (1)$$

З іншого боку, в [8, с. 51] показано, що для кожного $\lambda \in B_N$ справджується нерівність

$$\left| \lambda - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{(N+2)(N+1)^2 q^2} \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}.$$

Звідси випливає, що множина $\hat{B}(\varepsilon)$ містить множину $B_{N(\varepsilon)}$, де $N(\varepsilon)$ – корінь рівняння $(N+2)(N+1)^2 = a/(C\sqrt{\varepsilon})$. Але тоді існує стала $C_1 > 0$ така, що при всіх досить малих $\varepsilon > 0$ виконується нерівність $N(\varepsilon) \geq 1/(C_1 \sqrt[6]{\varepsilon})$. З урахуванням оцінки (1) маємо $\dim_H \hat{B}(\varepsilon) \geq \dim_H B_{N(\varepsilon)} > 1 - 4C_1 \sqrt[6]{\varepsilon} / \log 2$.

Теорему доведено.

Висновки.

Проблеми обчислення розмірності множин фрактального типу мають безпосереднє відношення до задач нелінійної динаміки, зокрема до КАМ-теорії і проблеми «малих знаменників». Методи, розроблені для обчислення хаусдорфових розмірностей фрактальних множин, які є об'єктом вивчення теорії діофантових наближень, виявилися придатними і для одержання нових результатів у теорії Колмогорова–Арнольда–Мозера.

У роботі було розглянуто гамільтонову систему з двома ступенями волі, близьку до цілком інтегрованої. Узагальненню отриманого результату на випадок більшого числа ступенів волі буде присвячено окрему статтю.

У зв'язку із проведеним дослідженням виникає така задача: чи існує таке ε , при якому тори збуреної системи утворюють множину міри нуль, однак хаусдорфова розмірність цієї множини, близька до розмірності фазового простору?

Роботу виконано за часткової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень (договір № Ф25.212-2008).

1. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. – М., 2002.
2. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. – М., 1988.
3. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М., 2000.
4. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика. – М., 1984.
5. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. – Москва-Ижевск, 2002.
6. Мун Ф. Хаотические колебания. – М., 1990.
7. Турбин А.Ф., Працевитый А.Ф. Фрактальные множества, функции распределения. – К., 1992.
8. Хинчин А.Я. Цепные дроби. – Москва, 1961.
9. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение. – М., 1988.
10. Besicovitch A.S. Sets of fractional dimensions (IV): on rational approximation to real numbers// J. Lond. Math. Soc. – 1934. – Vol. 9. – P. 126–131.
11. Dodson M.M., Vickers J.A.G. Exceptional sets in Kolmogorov–Arnol'd–Moser theory// J. Phys. A. – 1986. – Vol. 19. – P. 349–374.
12. Dodson M.M., Pöschel J., Rynne B.P., Vickers J.A.G. The Hausdorff dimension of small divisors for lower dimensional KAM-tori // Proc. R. Soc. Lond. – 1992. – Vol. 439. – P. 359–371.
13. Escande D.F., Doveil F. Renormalization method for computing the threshold of the large scale stochastic instability in two degree of freedom Hamiltonian systems// J.Stat. Phys. – 1981. – Vol. 26. – P. 257–284.
14. Jamik V. Diophantischen Approximationen und Hausdorffsches Mass// Mat. Sbornik. – 1929. – Vol. 36. – P. 371–382.
15. Jamik V. Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen// Prace Mat.-Fiz. – 1929. – Vol. 9. – P. 91–106.
16. Kadanoff L.P. Scaling for a critical Kolmogorov–Arnold–Moser trajectory// Phys. Rev. Lett. – Vol. 47. – 1981. – P. 1641–1643.
17. Khanin K., Sinai Ya.G. Renormalization group methods in the theory of dynamical systems// Int. J. Mod. Phys. B. – 1988. – Vol. 2. – P. 147–165.
18. Koch H. A renormalization group fix point associated with the break up of golden invariant tori// Discrete Contin. Syst. – 2004. – Vol. 11. – P. 881–909.
19. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. – New York, 1982.
20. Ott E. Chaos in dynamical systems. – Cambridge, 1993.
21. Pöschel J. Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets// Commun. Pure and Appl. Math. – 1982. – Vol. 35. P. 653–696.

Надійшла до редколегії 03.12.2007

УДК 517.946

А.П. Громик, викл., І.М. Конет, канд. фіз.-мат. наук

ИНТЕГРАЛЬНИ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ОБМЕЖЕНИХ БАГАТОШАРОВИХ ПРОСТОРОВИХ ОБЛАСТЕЙ

Методом інтегральних перетворень побудовано точні аналітичні розв'язки стаціонарних задач теплопровідності для обмежених багатошарових просторових областей.

The method of integral transformations builds the exact analytical solution of stationary task of heat conductivity for the limited multi-layer space areas.

1. Вступ.

Стаціонарні крайові задачі феноменологічної теорії теплопровідності для багатошарових (кусково-однорідних) середовищ становлять значний теоретичний та практичний інтерес [5,7,14,15]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків згаданих задач у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат присвячені монографії [12,8,9,10]. Стаціонарні температурні поля в необмежених двоскладових та тришарових просторових областях побудовано в працях [2,3,4,11]. У цій статті ми пропонуємо інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру стаціонарних задач теплопровідності для обмежених багатошарових за декартовою координатою просторових областей.

2. Основна частина.

Задача про структуру стаціонарного температурного поля в ортотропній обмеженій $(n+1)$ -шаровій просторовій області математично зводиться до побудови обмеженого на множині

$$\Omega_3 = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega_2 = \langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle; z \in K_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (l_{j-1}; l_j); l_0 \geq 0; l_k < l_{k+1}; l_{n+1} \equiv l < \infty\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Пуассона [6, 17]

$$\left[a_{xy}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{yz}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] T_j - \chi_j^2 T_j = -f_j(x, y, z); z \in \mathbf{I}_j; j = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) T_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(x, y), \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) T_{n+1} \Big|_{z=l} = g_l(x, y) \quad (2)$$

та умовами неідеального теплового контакту [1]

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) T_k - T_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left(\nu_k \frac{\partial T_k}{\partial z} - \nu_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial z} \right) \Big|_{z=l_k} = 0, k = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (3)$$

та відповідними крайовими умовами на межі Ω_2 , де $a_{xy}, a_{yz}, a_{zj} \geq 0$ – коефіцієнти теплопровідності у напрямках координатних осей $x, y, z (j = \overline{1, n+1})$; $\chi_j^2 \geq 0$ – коефіцієнти дисипації теплової енергії; $f(x, y, z) = \{f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), \dots, f_{n+1}(x, y, z)\}$ – інтенсивність теплових джерел; $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0, \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$ – деякі дійсні сталі; $g_0(x, y), g_l(x, y)$ – задані обмежені неперервні функції в області Ω_2 ; R_k – коефіцієнти термоопору; $\nu_k, \nu_{k+1} \geq 0$ – коефіцієнти теплопровідності; $T(x, y, z) = \{T_1(x, y, z), T_2(x, y, z), \dots, T_{n+1}(x, y, z)\}$ – шукана температура.

1. $\Omega_2 = (-\infty; +\infty) \times (-\infty; +\infty)$. У цьому випадку вважаємо, що на межі області Ω_2 виконуються умови

$$\frac{\partial^k T_j}{\partial x^k} \Big|_{x=\pm\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1} \quad (4)$$

щодо змінної x та умови

$$\frac{\partial^k T_j}{\partial y^k} \Big|_{y=\pm\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1} \quad (5)$$

щодо змінної y .

Припустимо, що задані й шукані функції задовольняють умовам застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 13, 10].

До задачі (1)-(5) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної x [16, 13]:

$$F_x [g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\sigma x} dx \equiv \tilde{g}(\sigma), i = \sqrt{-1}, \quad (6)$$

$$F_x^{-1} [\tilde{g}(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma \equiv g(x), \quad (7)$$

$$F_x \left[\frac{d^2 g}{dx^2} \right] = -\sigma^2 F_x [g(x)] \equiv -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma). \quad (8)$$

Інтегральний оператор F_x за правилом (6) внаслідок тотожності (8) крайовій задачі (1)-(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого в області $\Omega'_3 = \{(y, z) : y \in (-\infty; +\infty); z \in K_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\left[a_{xy}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \tilde{T}_j - (a_{xy}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{T}_j = -\tilde{f}_j(\sigma, y, z); z \in \mathbf{I}_j; j = \overline{1, n+1} \quad (9)$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{T}_1 \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_0(\sigma, y), \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{T}_{n+1} \Big|_{z=l} = \tilde{g}_l(\sigma, y), \quad (10)$$

$$\frac{\partial^k \tilde{T}_j}{\partial y^k} \Big|_{y=\pm\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1} \quad (11)$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) \tilde{T}_k - \tilde{T}_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left(\nu_k \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial z} - \nu_{k+1} \frac{\partial \tilde{T}_{k+1}}{\partial z} \right) \Big|_{z=l_k} = 0, k = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (12)$$

До задачі (9)-(12) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної y [16, 13]:

$$F_y [g(y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-isy} dy \equiv \tilde{g}(s), \tag{13}$$

$$F_y^{-1} [\tilde{g}(s)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(s)e^{isy} ds \equiv g(y), \tag{14}$$

$$F_y \left[\frac{d^2 g}{dy^2} \right] = -s^2 F_y [g(y)] \equiv -s^2 \tilde{g}(s), \tag{15}$$

Інтегральний оператор F_y за правилом (13) внаслідок тотожності (15) крайовій задачі (9)-(12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині K_n^+ розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[a_{zj}^2 \frac{d^2}{dz^2} - (a_{xy}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 s^2 + \chi_j^2) \right] \tilde{T}_j(\sigma, s, z) = -\tilde{f}_j(\sigma, s, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1} \tag{16}$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dz} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{T}_1 \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_0(\sigma, s), \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{d}{dz} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{T}_{n+1} \Big|_{z=l} = \tilde{g}_l(\sigma, s) \tag{17}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[(R_k \frac{d}{dz} + 1) \tilde{T}_k - \tilde{T}_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left(v_k \frac{d\tilde{T}_k}{dz} - v_{k+1} \frac{d\tilde{T}_{k+1}}{dz} \right) \Big|_{z=l_k} = 0, k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{18}$$

До задачі (16)-(18) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0, l]$ з n точками спряження [10]:

$$F_{jn} [g(z)] = \int_{l_0}^l g(z)V(z, \lambda_j)\sigma(z)dz \equiv g_j, \tag{19}$$

$$F_{jn}^{-1} [g_j] = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \frac{V(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \equiv g(z), \tag{20}$$

$$F_{jn} \left[\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \Theta(z-l_{i-1})\Theta(l_i-z) \frac{d^2 g}{dz^2} \right] \equiv \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \int_{l_0}^l \frac{d^2 g}{dz^2} V_i(z, \lambda_j)\sigma_i dz = -\lambda_j^2 g_j - \sum_{i=1}^{n+1} k_i^2 \int_{l_{i-1}}^{l_i} g(z)V_i(z, \lambda_j)\sigma_i dz - \left. -a_1^2 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \lambda_j) (\alpha_{11}^0 \frac{dg}{dz} + \beta_{11}^0 g) \right|_{z=l_0} + \left. a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(l, \lambda_j) (\alpha_{22}^{n+1} \frac{dg}{dz} + \beta_{22}^{n+1} g) \right|_{z=l}. \tag{21}$$

У рівностях (19)-(21) беруть участь величини і функції:

$$V(z, \lambda_j) = \sum_{i=1}^{n+1} V_i(z, \lambda_j)\Theta(z-l_{i-1})\Theta(l_i-z); \|V(z, \lambda_j)\|^2 \equiv \int_{l_0}^l V^2(z, \lambda_j)\sigma(z)dz = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{l_{i-1}}^{l_i} V_i^2(z, \lambda_j)\sigma_i dz;$$

$$\sigma(z) = \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i \Theta(z-l_{i-1})\Theta(l_i-z); V_m(z, \lambda_j) = \prod_{i=m}^n c_{2i} q_{i+1,j} [w_{m-1,2}(\lambda_j) \cos(q_{mj}z) - w_{m-1,1}(\lambda_j) \sin(q_{mj}z)], m = \overline{1, n};$$

$$V_{n+1}(z, \lambda_j) = w_{n2}(\lambda_j) \cos(q_{n+1,j}z) - w_{n1}(\lambda_j) \sin(q_{n+1,j}z), c_{1k} = 1, c_{2k} = \frac{v_{k+1}}{v_k}, q_{sj} = a_s^{-1} (\lambda_j^2 + k_s^2)^{1/2} \equiv a_s^{-1} b_{sj};$$

$$\sigma_k = \prod_{j=k}^n \frac{v_j a_{n+1}}{v_{j+1} a_k^2}, \sigma_n = \frac{v_n a_{n+1}}{v_{n+1} a_n^2}, \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}; v_{11}^{k1}(q_{sj} l_k) = -R_k q_{sj} \sin(q_{sj} l_k) + \cos(q_{sj} l_k); v_{21}^{k1}(q_{sj} l_k) = -q_{sj} \sin(q_{sj} l_k);$$

$$v_{11}^{k2}(q_{sj} l_k) = R_k q_{sj} \sin(q_{sj} l_k) + \sin(q_{sj} l_k); v_{21}^{k2}(q_{sj} l_k) = q_{sj} \cos(q_{sj} l_k); v_{12}^{k2}(q_{sj} l_k) = \cos(q_{sj} l_k); v_{22}^{k2}(q_{sj} l_k) = \sin(q_{sj} l_k);$$

$$v_{12}^{k1}(q_{sj} l_k) = -\frac{v_k}{v_{k+1}} q_{sj} \sin(q_{sj} l_k); \delta_{sm}^k(q_{kj} l_k, q_{k+1,j} l_k) = v_{11}^{ks}(q_{kj} l_k) v_{22}^{km}(q_{k+1,j} l_k) - v_{21}^{ks}(q_{kj} l_k) v_{12}^{km}(q_{k+1,j} l_k);$$

$$v_{22}^{k1}(q_{sj} l_k) = \frac{v_k}{v_{k+1}} q_{sj} \cos(q_{sj} l_k); w_{01}(\lambda_j) = -v_{11}^{01}(q_{1j} l_0); w_{02}(\lambda_j) = -v_{11}^{02}(q_{1j} l_0);$$

$$w_{sm}(\lambda_j) = w_{s-1,2}(\lambda_j) \delta_{1m}^s(q_{sj} l_s, q_{s+1,j} l_s) - w_{s-1,1}(\lambda_j) \delta_{2m}^s(q_{sj} l_s, q_{s+1,j} l_s);$$

λ_j - утворюючі дискретний спектр корені трансцендентного рівняння

$$\Delta_n(\lambda) \equiv v_{22}^{n+1,2}(q_{n+1}(\lambda)l)w_{n1}(\lambda) - v_{22}^{n+1,1}(q_{n+1}(\lambda)l)w_{n2}(\lambda) = 0;$$

$\Theta(x)$ - одинична функція Гевісайда.

Запишемо систему диференціальних рівнянь (16) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} (a_1^2 \frac{d^2}{dz^2} - q_1^2(\sigma, s)) \tilde{T}_1(\sigma, s, z) \\ (a_2^2 \frac{d^2}{dz^2} - q_2^2(\sigma, s)) \tilde{T}_2(\sigma, s, z) \\ \dots \\ (a_{n+1}^2 \frac{d^2}{dz^2} - q_{n+1}^2(\sigma, s)) \tilde{T}_{n+1}(\sigma, s, z) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{f}_1(\sigma, s, z) \\ \tilde{f}_1(\sigma, s, z) \\ \dots \\ \tilde{f}_{n+1}(\sigma, s, z) \end{bmatrix}, \tag{22}$$

де $q_j^2(\sigma, s) = a_{xy}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 s^2 + \chi_j^2$; $a_j^2 \equiv a_{zj}^2$; $j = \overline{1, n+1}$.

Інтегральний оператор F_{jn} , який діє за правилом (19), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{jn}[\dots] = \left[\int_{l_0}^{l_1} \dots V_1(z, \lambda_j) \sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(z, \lambda_j) \sigma_2 dz \dots \int_{l_{n-1}}^{l_n} \dots V_n(z, \lambda_j) \sigma_n dz \int_{l_n}^l \dots V_{n+1}(z, \lambda_j) \sigma_{n+1} dz \right]. \tag{23}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до системи (22). Внаслідок тотожності (21), одержуємо алгебраїчне рівняння

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\lambda_j^2 + k_i^2 + q_i^2(\sigma, s)) \tilde{T}_{ij}(\sigma, s) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{f}_{ij}(\sigma, s) - \frac{a_1^2 \sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_0(\sigma, s) + \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1}}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_l(\sigma, s), \tag{24}$$

де $\tilde{T}_{ij}(\sigma, s) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{T}_i(\sigma, s, z) V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz$; $\tilde{f}_{ij}(\sigma, s) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{f}_i(\sigma, s) V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz$; $i = \overline{1, n+1}$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\{q_1^2, q_2^2, \dots, q_{n+1}^2\} = q_1^2$, і покладемо всюди $k_i^2 = q_1^2 - q_j^2$ ($i = \overline{1, n+1}$). Рівняння (24) набуває вигляду

$$(\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2) \tilde{T}_j(\sigma, s) = \tilde{f}_j(\sigma, s) - \frac{a_1^2 \sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_0(\sigma, s) + \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1}}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_l(\sigma, s), \tag{25}$$

де $\tilde{T}_j(\sigma, s) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{T}_{ij}(\sigma, s)$, $\tilde{f}_j(\sigma, s) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{f}_{ij}(\sigma, s)$.

Із рівняння (25) знаходимо функцію

$$\tilde{T}_j(\sigma, s) = \frac{\tilde{f}_j(\sigma, s)}{\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2} - \frac{a_1^2 \sigma_1 V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_0(\sigma, s)}{\alpha_{11}^0 (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)} + \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_l(\sigma, s)}{\alpha_{22}^{n+1} (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)}. \tag{26}$$

Оскільки суперпозиція операторів F_{jn} та F_{jn}^{-1} є одиничним оператором, то оператор F_{jn}^{-1} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{jn}^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} \dots \frac{V_1(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{\infty} \dots \frac{V_2(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \\ \dots \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{\infty} \dots \frac{V_{n+1}(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

За правилом множення матриць застосуємо операторну матрицю-стовпець (27) до матриці-елементу $[\tilde{T}_j(\sigma, s)]$, де функція $\tilde{T}_j(\sigma, s)$ визначена формулою (26). Одержуємо єдиний обмежений розв'язок задачі (16)-(18):

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i(\sigma, s, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\tilde{f}_j(\sigma, s)}{\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2} - \frac{a_1^2 \sigma_1 V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_0(\sigma, s)}{\alpha_{11}^0 (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)} + \right. \\ \left. + \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} V_{n+1}(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_l(\sigma, s)}{\alpha_{22}^{n+1} (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)} \right\} \frac{V_i(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2}; i = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \tag{28}$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{T}_i(\sigma, s, z)$, визначених формулами (28), обернені оператори F_y^{-1} та F_x^{-1} , одержуємо функції

$$T_i(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}(x, \xi, y, \eta, z, \zeta) f_k(\xi, \eta, \zeta) \sigma_k \rho d\xi d\eta d\zeta + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_i^1(x, \xi, y, \eta, z) g_0(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_i^2(x, \xi, y, \eta, z) g_i(\xi, \eta) d\xi d\eta; i = \overline{1, n+1}, \quad (29)$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в розглянутій області. У формулах (29) беруть участь:

компоненти фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{ik}(x, \xi, y, \eta, z, \zeta) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{V_i(z, \lambda_j) V_k(\zeta, \lambda_j) \cos(|x - \xi| \sigma) \cos(|y - \eta| s)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2 (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)} d\sigma ds; i, k = \overline{1, n+1}, \quad (30)$$

компоненти нижньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^1(x, \xi, y, \eta, z) = -a_1^2 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} E_{i1}(x, \xi, y, \eta, z, l_0), \quad (31)$$

та компоненти верхньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^2(x, \xi, y, \eta, z) = -a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} E_{i, n+1}(x, \xi, y, \eta, z, l) \quad (32)$$

еліптичної крайової задачі (1)-(5).

Зауваження 1. Якщо деякі з коефіцієнтів термоопору R_k дорівнюють нулю, то безпосередньо з формул (29) одержуємо структуру стаціонарного температурного поля у випадку здійснення на відповідних площинах $z = l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 2. При $R_k = 0 (k = \overline{1, n})$ безпосередньо з формул (29) одержуємо структуру стаціонарного температурного поля у випадку здійснення на всіх площинах $z = l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 3. У випадку $a_{xy}^2 = a_{yy}^2 = a_{zj}^2 \equiv a_j^2 \geq 0$ формули (29) визначають структуру стаціонарного температурного поля в ізотропній обмеженій $(n+1)$ – шаровій просторовій області.

Зауваження 4. Параметри $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0; \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$ дають можливість виділяти із формул (29) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $z = l_0, z = l$ крайової умови 1-го роду ($\alpha_{11}^0 = 0, \beta_{11}^0 = 1, g_0(x, y) = \alpha_{11}^0 g'_0(x, y); \alpha_{22}^{n+1} = 0, \beta_{22}^{n+1} = 1, g_l(x, y) = \alpha_{22}^{n+1} g'_l(x, y)$), 2-го роду ($\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 = 1, \alpha_{22}^{n+1} = 1, \beta_{22}^{n+1} = 0$) й 3-го роду ($\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 \equiv h_1 > 0, \alpha_{22}^{n+1} = 1, \beta_{22}^{n+1} \equiv h_2 > 0$) та їх можливих комбінацій.

Зауваження 5. Аналіз розв'язку (29) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(x, y, z) (j = \overline{1, n+1}), g_0(x, y)$ та $g_l(x, y)$ проводиться безпосередньо.

2. $\Omega_2 = (-\infty; +\infty) \times (0; +\infty)$. Уцьому випадку вважаємо, що на межі області Ω_2 виконуються умови (4) щодо змінної x та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h \right) T_j \Big|_{y=0} = g_j(x, z), \frac{\partial^k T_j}{\partial y^k} \Big|_{y=+\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1} \quad (33)$$

щодо змінної y , де

$h \geq 0$ - коефіцієнт теплообміну через поверхню $y = 0$; $g_j(x, z) = h T_j^c(x, z), T_j^c(x, z)$ - температура середовища на поверхні $y = 0$.

Припустимо, що задані й шукані функції мають необхідну гладкість та задовольняють умовам застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 13, 10].

До задачі (1)-(4), (33) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є щодо змінної x . Інтегральний оператор F_x за правилом (6) внаслідок тотожності (8) крайовій задачі (1)-(4), (33) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого в області $\Omega_3^+ = \{(y, z) : y \in (0; +\infty); z \in K_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь (9) за крайовими умовами (10), крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h \right) \tilde{T}_j \Big|_{y=0} = \tilde{g}_j(\sigma, z), \frac{\partial^k \tilde{T}_j}{\partial y^k} \Big|_{y=+\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1} \quad (34)$$

та умовами спряження (12).

До задачі (9), (10), (34), (12) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі щодо змінної y [13]:

$$F_{+y}[g(y)] = \int_0^{\infty} g(y) K_y(y, s) dy \equiv \tilde{g}(s), \quad (35)$$

$$F_{+y}^{-1}[\tilde{g}(s)] = \int_0^{\infty} \tilde{g}(s)K_y(y, s)ds \equiv g(y), \tag{36}$$

$$K_{+y} \left[\frac{d^2 g}{dy^2} \right] = -s^2 \tilde{g}(s) + K_y(0, s) \left(-\frac{dg}{dy} + hg \right) \Big|_{y=0}, \tag{37}$$

де ядро перетворення

$$K(y, s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s \cos sz + h \sin sz}{\sqrt{s^2 + h^2}}.$$

Інтегральний оператор F_{+y} за правилом (35) внаслідок тотожності (37) крайовій задачі (9), (10), (34), (12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині K_n^* розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[a_{zj}^2 \frac{d^2}{dz^2} - (a_{xj}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 s^2 + \chi_j^2) \right] \tilde{T}_j(\sigma, s, z) = -\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma, s, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1} \tag{38}$$

за крайовими умовами (17) та умовами спряження (18), де

$$\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma, s, z) = \tilde{f}_j(\sigma, s, z) + a_{yj}^2 K_y(0, s) \tilde{g}_j(\sigma, z); j = \overline{1, n+1}.$$

З точністю до позначень крайова задача на спряження (38), (17), (18) збігається із задачею (16)-(18). Побудований методом інтегрального перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0, l]$ з n точками спряження єдиний обмежений розв'язок задачі (38), (17), (18) відповідно до формул (28) визначають функції

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i(\sigma, s, z) = & \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma, s)}{\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2} - \frac{a_{11}^2 V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{\tilde{g}}_0(\sigma, s)}{\alpha_{11}^0 (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)} + \right. \\ & \left. + \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} V_{n+1}(l_0, \lambda_j) \tilde{\tilde{g}}_l(\sigma, s)}{\alpha_{22}^{n+1} (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)} \right\} \frac{V_i(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2}; i = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \tag{39}$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{T}_i(\sigma, s, z)$, визначених формулами (39), обернені оператори F_{+y}^{-1} та F_x^{-1} , одержуємо функції

$$\begin{aligned} T_i(x, y, z) = & \sum_{k=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}(x, \xi, y, \eta, z, \zeta) f_k(\xi, \eta, \zeta) \sigma_k \rho d\xi d\eta d\zeta + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} W_i^1(x, \xi, y, \eta, z) g_0(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} W_i^2(x, \xi, y, \eta, z) g_l(\xi, \eta) d\xi d\eta + a_{yi}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{yik}(x, \xi, y, z, \zeta) g_k(\xi, \zeta) \sigma_k d\xi d\zeta; i = \overline{1, n+1}, \end{aligned} \tag{40}$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в розглянутій області.

У формулах (40) беруть участь:

компоненти фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{ik}(x, \xi, y, \eta, z, \zeta) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{V_i(z, \lambda_j) V_k(\zeta, \lambda_j) \cos(|x - \xi| \sigma)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2 (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)} d\sigma ds; i, k = \overline{1, n+1}, \tag{41}$$

компоненти нижньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^1(x, \xi, y, \eta, z) = -a_1^2 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} E_{i1}(x, \xi, y, \eta, z, l_0), \tag{42}$$

компоненти верхньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^2(x, \xi, y, \eta, z) = -a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} E_{i, n+1}(x, \xi, y, \eta, z, l) \tag{43}$$

та компоненти ординатної матриці Гріна

$$W_{yik}(x, \xi, y, z, \zeta) = E_{ik}(x, \xi, y, 0, z, \zeta) \tag{44}$$

еліптичної крайової задачі (1)-(4), (33).

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметр h дає можливість виділяти із формул (40) розв'язку крайових задач у випадках задання на поверхні $y = 0$ крайової умови 1-го роду ($h \rightarrow \infty$) та 2-го роду ($h = 0$); 3) аналіз розв'язку (40) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(x, y, z), g_j(x, z) (j = \overline{1, n+1}), g_0(x, y)$ та $g_l(x, y)$ проводиться безпосередньо.

3. $\Omega_2 = (-\infty; +\infty) \times (0; b)$. У цьому випадку вважаємо, що на межі області Ω_2 виконуються умови (4) щодо змінної x та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1\right) T_j \Big|_{y=0} = g_{1j}(x, z), \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2\right) T_j \Big|_{y=b} = g_{2j}(x, z); j = \overline{1, n+1} \quad (45)$$

щодо змінної y , де $h_1 \geq 0$ - коефіцієнт теплообміну через поверхню $y = 0$; $g_{1j}(x, z) = h_1 T_j^{c1}(x, z)$, $T_j^{c1}(x, z)$ - температура середовища на поверхні $y = 0$; $h_2 \geq 0$ - коефіцієнт теплообміну через поверхню $y = b$; $g_{2j}(x, z) = h_2 T_j^{c2}(x, z)$, $T_j^{c2}(x, z)$ - температура середовища на поверхні $y = b$.

Припустимо, що задані й шукані функції мають необхідну гладкість та задовольняють умовам застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 13, 5].

До задачі (1)-(4), (45) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є щодо змінної x . Інтегральний оператор F_x за правилом (6) внаслідок тотожності (8) крайовій задачі (1)-(4), (45) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого в області $\Omega'_3 = \{(y, z) : y \in (0; b); z \in K_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь (9) за крайовими умовами (10), крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1\right) \tilde{T}_j \Big|_{y=0} = \tilde{g}_{1j}(\sigma, z), \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2\right) \tilde{T}_j \Big|_{y=b} = \tilde{g}_{2j}(\sigma, z); j = \overline{1, n+1} \quad (46)$$

та умовами спряження (12).

До задачі (9), (10), (46), (12) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[0; b]$ щодо змінної y [13]:

$$\Lambda_{yk}[g(y)] = \int_0^b g(y) V_k(y) dy \equiv g_k, \quad (47)$$

$$\Lambda_{yk}^{-1}[g_k] = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{V_k(y)}{\|V_k\|^2} \equiv g(y), \quad (48)$$

$$\Lambda_{yk} \left[\frac{d^2 g}{dy^2} \right] = -\gamma_k^2 g_k + V_k(0) \left(-\frac{d}{dz} + h_1 \right) g \Big|_{y=0} + V_k(b) \left(\frac{d}{dy} + h_2 \right) g \Big|_{y=b}, \quad (49)$$

де ядро перетворення

$$V_k(y) = \frac{\gamma_k \cos(\gamma_k y) + h_1 \sin(\gamma_k y)}{\sqrt{\gamma_k^2 + h_1^2}}, \|V_k\|^2 \equiv \int_0^b V_k^2(y) dy = \frac{b}{2} + \frac{(h_1 + h_2)(\gamma_k^2 + h_1 h_2)}{2(\gamma_k^2 + h_1^2)(\gamma_k^2 + h_2^2)},$$

$\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ - монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$\operatorname{ctg}(\gamma b) = \frac{\gamma^2 - h_1 h_2}{\gamma(h_1 + h_2)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_{yk} за правилом (47) внаслідок тотожності (49) крайовій задачі (9), (10), (46), (12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині K_n^+ розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[a_{zj}^2 \frac{d^2}{dz^2} - (a_{xy}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 \gamma_k^2 + \chi_j^2) \right] \tilde{T}_{jk}(\sigma, z) = -\tilde{G}_{jk}(\sigma, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (50)$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dz} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{T}_{1k} \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_{ok}(\sigma), \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{d}{dz} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{T}_{n+1,k} \Big|_{z=l} = \tilde{g}_{lk}(\sigma) \quad (51)$$

та умовами спряження

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\left(R_p \frac{d}{dz} + 1 \right) \tilde{T}_{pk} - \tilde{T}_{p+1,k} \right] \Big|_{z=l_p} = 0, \\ \left(v_p \frac{d \tilde{T}_{pk}}{dz} - v_{p+1} \frac{d \tilde{T}_{p+1,k}}{dz} \right) \Big|_{z=l_p} = 0, p = \overline{1, n}, \end{array} \right. \quad (52)$$

де

$$\tilde{G}_{jk}(\sigma, z) = \tilde{f}_{jk}(\sigma, z) + a_{yj}^2 V_k(0) \tilde{g}_{1j}(\sigma, z) + a_{yj}^2 V_k(b) \tilde{g}_{2j}(\sigma, z); j = \overline{1, n+1}.$$

З точністю до позначень крайова задача на спряження (50)-(52) збігається із задачею (16)-(18). Отже, відповідно до формул (28), єдиний обмежений розв'язок задачі (50)-(52) визначають функції

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ik}(\sigma, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\tilde{G}_{kj}(\sigma)}{\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2} - \frac{a_1^2 \sigma_1 V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_{0k}(\sigma, s)}{\alpha_{11}^0 (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2)} + \right. \\ \left. + \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} V_{n+1}(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_{ik}(\sigma, s)}{\alpha_{22}^{n+1} (\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2)} \right\} \frac{V_i(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2}; i = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (53)$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{T}_{ik}(\sigma, z)$, визначених формулами (53), обернені оператори Λ_{yk}^{-1} та F_x^{-1} , одержуємо функції

$$\begin{aligned} T_i(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}(x, \xi, y, \eta, z, \zeta) f_k(\xi, \eta, \zeta) \sigma_k \rho d\xi d\eta d\zeta + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_i^1(x, \xi, y, \eta, z) g_0(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{yik}^2(x, \xi, y, \eta, z) g_i(\xi, \eta) d\xi d\eta + a_{yi}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{yik}^1(x, \xi, y, z, \zeta) g_{1k}(\xi, \zeta) \sigma_k d\xi d\zeta + \\ + a_{yi}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{yik}^2(x, \xi, y, z, \zeta) g_{2k}(\xi, \zeta) \sigma_k d\xi d\zeta; i = \overline{1, n+1}, \end{aligned} \quad (54)$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в розглянутій області.

У формулах (54) беруть участь:

компоненти фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{ik}(x, \xi, y, \eta, z, \zeta) = \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{V_i(z, \lambda_j) V_r(\zeta, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \times \frac{\cos(|x - \xi| \sigma) V_r(y) V_r(\eta)}{(\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_r^2 + \chi_1^2) \|V_r\|^2} d\sigma ds; i, k = \overline{1, n+1}, \quad (55)$$

компоненти нижньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^1(x, \xi, y, \eta, z) = -a_1^2 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} E_{i1}(x, \xi, y, \eta, z, l_0), \quad (56)$$

компоненти верхньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^2(x, \xi, y, \eta, z) = -a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} E_{i, n+1}(x, \xi, y, \eta, z, l), \quad (57)$$

компоненти лівої ординатної матриці Гріна

$$W_{yik}^1(x, \xi, y, z, \zeta) = E_{ik}(x, \xi, y, 0, z, \zeta) \quad (58)$$

та компоненти правої ординатної матриці Гріна

$$W_{yik}^2(x, \xi, y, z, \zeta) = E_{ik}(x, \xi, y, b, z, \zeta) \quad (59)$$

еліптичної крайової задачі (1)-(4), (45).

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметри h_j ($j = 1, 2$) дають можливість виділяти із формул (54) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $y = 0, y = b$ крайових умов 1-го роду й 2-го роду та їх можливих комбінацій; 3) аналіз розв'язку (54) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(x, y, z), g_{1j}(x, z), g_{2j}(x, z)$ ($j = \overline{1, n+1}$), $g_0(x, y)$ та $g_i(x, y)$ проводиться безпосередньо.

3. Висновки.

При найбільш загальних припущеннях в межах феноменологічної теорії теплопровідності побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків стаціонарних задач в обмежених багатозарових просторових областях. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів та даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. – 517с. 2. Громик А.П., Конет І.М. Стаціонарні задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: 3б. наук. пр. – Чернівці: Прут, 2006. – Вип. 13. – С. 52-65. 3. Громик А.П., Конет І.М. Крайові задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: 3б. наук. пр. – Чернівці: Прут, 2006. – Вип. 14. – С. 36-50. 4. Громик А.П., Конет І.М. Крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Наукові праці Кам'янець-Подільського державного університету. Збірник за підсумками звітної наукової конференції викладачів і аспірантів. Випуск 5. В 3-х томах. – Кам'янець-Подільський: К-ПДУ, 2006, Т. 1. – С. 94-95. 5. Дейнека В.С., Серієнко І.В., Скопечкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998. – 614 с. 6. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 448 с. 7. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с. 8. Конет І.М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 209 с. 9. Конет І.М., Ленюк М.П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с. 10. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці: Прут, 2004. – 276 с. 11. Конет І.М., Ленюк М.П. Крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: 3б. наук. пр., – Чернівці: Прут, 2006. – Вип.14. – С.84-96. 12. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с. 13. Ленюк М.П. Интегральные преобразования з разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К., 1983. – 60 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.4). 14. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с. 15. Серієнко І.В., Скопечкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с. 16. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: Из-во иностр. лит., 1956. – 668 с. 17. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

УДК 517.944:532.546

В. Попов, канд. фіз.-мат. наук, доц., Є. Вакал, канд. фіз.-мат. наук, доц., І. Гап'як, студ.
mph_mmf@univ.kiev.ua

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ З НЕГЛАДКИМИ МЕЖАМИ

Здійснено чисельний експеримент щодо різних варіантів застосування методу граничних інтегральних рівнянь на прикладі крайової задачі Діріхле для гармонічної функції в області з негладкою межею. Отримано чисельні розв'язки тестової задачі, що враховують особливість крайової задачі, а також розв'язок, що не враховує цю особливість. Проаналізовано результати чисельного експерименту.

A numerical experiment for different variants of using the boundary integral equations method on example of Dirichle boundary value problem for harmonic function in the field with non-smooth boundary is fulfilled. Numerical solutions of test problem that take into account the particularity of the boundary value problem are obtained as well as solution, not taking into account this particularity. The results of numerical experiment are analyzed.

1. Вступ.

Лінійні крайові задачі в областях, межа яких містить кутові точки, можуть виникати при моделюванні багатьох механічних та фізичних процесів, що зумовлює актуальність дослідження їх впливу на шуканий розв'язок.

Суть методу граничних інтегральних рівнянь [5], використаного в даній роботі, полягає в зведенні крайової задачі до інтегрального рівняння на основі використання тотожності Гріна. Вказаним методом задачу для області з негладкою межею можна розв'язувати кількома способами, наприклад:

- використовувати тотожність Гріна для областей з кусково-гладкою межею;
- згладжувати область і використовувати тотожність Гріна для областей з гладкою межею;
- використовувати тотожність Гріна для областей з гладкою межею без урахування зламу межі конкретної області.

Для вибору способу чисельного розв'язування крайових задач описаного типу необхідно отримати відповідні розв'язки та здійснити їх аналіз.

2. Постановка задачі.

Розглянемо задачу знаходження гармонічної функції $\varphi(x, y)$ в замкненій області D , якщо на її межі ∂D задана одна з класичних лінійних крайових умов:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= f(x, y), \\ \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial n} &= g(x, y), \\ \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial n} + h\varphi(x, y) &= \omega(x, y) \end{aligned} \quad (x, y) \in \partial D. \quad (1)$$

Вважаємо, що межа ∂D є кусково-гладкою лінією.

3. Чисельне розв'язування задачі.

З основної тотожності Гріна для гармонічної функції у двовимірному випадку маємо [4]:

$$\Omega(P)\varphi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial}{\partial n_Q} \varphi(Q) \ln \frac{1}{r(P, Q)} - \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r(P, Q)} \right\} ds(Q), \quad (2)$$

$$\text{де } \Omega(P) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } P \in D, \\ \frac{\beta(P)}{2\pi}, & \text{якщо } P \in \partial D, \\ 0, & \text{якщо } P \notin \bar{D}. \end{cases}$$

Тут $\ln \frac{1}{r(P, Q)}$ – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа; $r(P, Q) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ – відстань між точками $Q(x, y)$ і $P(x_0, y_0)$; $P(x_0, y_0)$ – довільна фіксована точка; $Q(x, y)$ – точка інтегрування; n_Q – зовнішня нормаль; $\beta(P)$ – кут, під яким видно область з точки P (якщо межа гладка, то $\beta(P) = \pi$). У випадку об'ємної задачі величину $\beta(P)$ ще називають тілесним кутом [4].

Рівність (2) (для випадку $P \in \partial D$) і одна з крайових умов (1) утворюють систему рівнянь для знаходження на ∂D двох функцій φ і $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. З цієї системи отримується одне інтегральне рівняння, яке для задачі Діріхле є інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду, а для задачі Неймана і третьої крайової задачі – інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду.

Для отримання конкретних результатів та вивчення впливу кутових точок межі на розв'язок розглядається задача Діріхле для області $D = (-1, 1) \times (-1, 1)$:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(x, y) &= 0, & (x, y) \in D, \\ \varphi(x, y) &= f(x, y) & (x, y) \in \partial D. \end{aligned} \tag{3}$$

З метою спрощень при формуванні інтегрального рівняння функцію $f(x, y)$ вибираємо з властивістю симетрії:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(-x, y), & (x, y) \in \partial D, \\ f(x, y) &= f(x, -y) \end{aligned} \tag{4}$$

Розглянемо тотожність (2), коли точка $P \in \partial D$. З урахуванням крайової умови інтегральне рівняння для знаходження розв'язку має вигляд:

$$\int_{\partial D} \frac{\partial\varphi(Q)}{\partial n_Q} \ln\left(\frac{1}{r(P, Q)}\right) ds(Q) = \beta(P) f(P) + \int_{\partial D} f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln\left(\frac{1}{r(P, Q)}\right) ds(Q). \tag{5}$$

Легко показати, що функція $\frac{\partial\varphi(Q)}{\partial n_Q}$, $Q \in \partial D$, як і розв'язок $\varphi(x, y)$, має на межі області ∂D властивість симетрії

(4). Позначимо $g(Q) = \frac{\partial\varphi}{\partial n_Q}$. Враховуючи симетрію крайових умов, в (5) зручно перейти від інтегрування по всій межі ∂D до інтегрування лише по її частині ∂D_1 – частині межі, що лежить у першому квадранті площини та містить кутову точку P^* з кутом $\beta(P^*) = \frac{\pi}{2}$.

Позначимо через $K(t, s)$ ядро інтегрального рівняння, а через $u(s)$ – його праву частину. В результаті отримуємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду:

$$\int_0^L g(t) K(t, s) dt = u(s), \quad s \in [0, L], \tag{6}$$

де L – довжина дуги ∂D_1 .

Задача (6), як відомо, є некоректною. Для розв'язання рівняння (6) використовується метод регуляризації Тихонова першого порядку [2, 6]. Замість точної правої частини (6) розглянемо функцію u_δ таку, що $\rho_{L_2}(u_\delta, u) \leq \delta$, де

$$\rho_{L_2}(u_\delta, u) = \left\{ \int_0^L [u_\delta(x) - u(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Розглянемо згладжуючий функціонал (функціонал Тихонова)

$$M^\alpha[g, u_\delta] = \|Ag - u_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha\Omega[g], \tag{7}$$

де введено позначення

$$\Omega[g] = \int_0^L \left[q(s)g^2(s) + p(s) \left(\frac{dg}{ds} \right)^2 \right] ds. \tag{8}$$

Тут $q(s)$ і $p(s)$ – задані невід'ємні неперервні функції такі, що $\forall s \in [0, L] \quad q^2(s) + p^2(s) \neq 0$ і $p(s) \geq p_0 > 0$, де p_0 – число. Функціонал $\Omega[g]$ називають стабілізуючим функціоналом, а $\alpha > 0$ є параметром регуляризації. Використовуючи теорію регуляризації, приходимо до задачі мінімізації функціонала $M^\alpha[g, u_\delta]$, а саме, враховуючи необхідну умову мінімуму функціонала $M^\alpha[g, u_\delta]$ та здійснюючи необхідні обчислення, отримуємо інтегродиференціальне рівняння [6]

$$\int_0^L \left(\int_0^L K(z, s) K(z, t) dz \right) g(t) dt + \alpha \left[g(s) - pg''(s) \right] = \int_0^L K(z, s) u_\delta(z) dz, \tag{9}$$

для розв'язків якого виконуються крайові умови одного з наступних чотирьох типів:

$$g(0) = 0, \quad g(L) = 0, \tag{10}$$

$$g(0) = 0, \quad g'(L) = 0, \tag{11}$$

$$g'(0) = 0, \quad g(L) = 0, \tag{12}$$

$$g'(0) = 0, \quad g'(L) = 0. \tag{13}$$

Візьмемо за стабілізуючий функціонал $\Omega[z]$ функціонал вигляду $\Omega[g] = \int_0^L [g^2 + p(g')] ds$, $p = \text{const} > 0$.

Для того, щоб невідома функція рівняння (9) задовольняла одну з крайових умов (10)–(13) (наприклад, умову (10)), необхідно розглянути функцію $g_1 = g - g^*$, де $g^* = g(0) + \frac{t}{L}(g(L) - g(0))$, $t \in [0, L]$. Таким чином, регуляризований розв'язок g_1 задовольняє умову (10) і інтегральне рівняння Фредгольма II роду:

$$\int_0^L \left(\int_0^L K(z,s)K(\xi,t) dz \right) g_1(\xi) dt + \alpha [g_1(\xi) - pg_1''(\xi)] = \int_0^L K(z,s)u_\delta(\xi) dz. \quad (14)$$

Для чисельної реалізації рівняння (14) необхідно передбачити параметризацію межі ∂D_1 та її аналогу – згладжувальної кривої. Крім того, та чи інша апроксимація шуканої функції вимагає введення сітки точок на межі інтегрування. В даній роботі використовується нерівномірне розбиття зі згущенням точок біля точки P^* . Це можна зробити за допомогою формули [3]

$$z_i = L \frac{e^{\frac{\gamma i}{n}} - 1}{e^\gamma - 1}, \quad i = \overline{0, n}, \quad (15)$$

де n – кількість проміжків, на які розбивається відрізок $[0, L]$, параметр γ відповідає за згущення координат сітки біля одного з кінців відрізка $[0, L]$.

Шукана функція з рівняння (14) знаходиться методом колокації [3].

Використовуючи триточкові формули чисельного диференціювання, з (14) отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \bar{K}(s_1, t_j) (\xi_j - z_{j-1}) g_j + \alpha g_1 - 2p\alpha \left(\frac{g_1}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)} ((s_1 - s_3) + (s_1 - s_4) + (s_1 - s_2)) + \right. \\ & + \frac{g_2}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)} ((s_1 - s_3) + (s_1 - s_4)) + \frac{g_3}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)(s_3 - s_4)} ((s_1 - s_4) + (s_1 - s_2)) + \\ & \left. + \frac{g_4}{(s_4 - s_1)(s_4 - s_3)(s_4 - s_2)} ((s_1 - s_3) + (s_1 - s_2)) \right) = F_1, \\ & \sum_{j=1}^n \bar{K}(s_i, t_j) (\xi_j - z_{j-1}) g_j + \alpha g_i - 2p\alpha \left(\frac{g_{i-1}}{(s_{i-1} - s_i)(s_{i-1} - s_{i+1})} + \frac{g_i}{(s_i - s_{i-1})(s_i - s_{i+1})} + \right. \\ & \left. + \frac{2g_{i+1}}{(s_{i+1} - s_{i-1})(s_{i+1} - s_i)} \right) = F_i, \quad i = \overline{2, n-1}, \\ & \sum_{j=1}^n \bar{K}(s_n, t_j) (\xi_j - z_{j-1}) g_j + \alpha g_n - 2p\alpha \left(\frac{g_{n-3}}{(s_{n-3} - s_{n-2})(s_{n-3} - s_{n-1})(s_{n-3} - s_n)} ((s_n - s_{n-2}) + (s_n - s_{n-1})) + \right. \\ & + \frac{g_{n-2}}{(s_{n-2} - s_{n-3})(s_{n-2} - s_{n-1})(s_{n-2} - s_n)} ((s_n - s_{n-1}) + (s_n - s_{n-3})) + \frac{g_{n-1}}{(s_{n-1} - s_{n-3})(s_{n-1} - s_{n-2})(s_{n-1} - s_n)} ((s_n - s_{n-2}) + (s_n - s_{n-3})) + \\ & \left. + \frac{g_n}{(s_n - s_{n-3})(s_n - s_{n-2})(s_n - s_{n-1})} ((s_n - s_{n-3}) + (s_n - s_{n-2}) + (s_n - s_{n-1})) \right) = F_n, \end{aligned}$$

де позначено

$$t_j = \frac{z_j - z_{j-1}}{2}, \quad F_i = \int_0^L K(z, s_i) u_\delta(\xi) dz, \quad i = \overline{1, n}; \quad \bar{K}(s_i, t_j) = \int_0^L K(z, s_i) K(z, t_j) dz, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Значення $\bar{K}(s_i, t_j)$ та F_i , $i, j = \overline{1, n}$ обчислюються за допомогою найпростіших квадратурних формул, наприклад формул трапецій [1, 3]

$$\begin{aligned} \bar{K}(s_i, t_j) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} K(z, s_i) K(z, t_j) dz = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{z_{k+1} - z_k}{2} (K(z_{k+1}, s_i) K(z_{k+1}, t_j) + K(z_k, s_i) K(z_k, t_j)) \right), \\ F_i &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} K(z, s_i) u_\delta(\xi) dz = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{z_{k+1} - z_k}{2} (K(z_{k+1}, s_i) u_\delta(\xi_{k+1}) + K(z_k, s_i) u_\delta(\xi_k)) \right). \end{aligned}$$

При такому обчисленні інтегралів виникає ситуація, коли вузли s_i (або t_j) належать проміжку інтегрування $[z_k, z_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, що може привести до суттєвих похибок, якщо не враховувати слабку особливість ядер (логарифмічну особливість). Врахування слабкої особливості при інтегуванні здійснюється заміною підінтегральної змінної.

Розв'язуючи СЛАР методом Жордана, отримуємо розподіл нормальної похідної гармонічної функції на межі області. Шукана функція $\varphi(x, y)$ при необхідності обчислюється квадратурами в будь-якій внутрішній точці $P \in D$ за допомогою тотожності (2).

4. Аналіз результатів розв'язування задачі.

Для задачі Діріхле розглянуто тестову гармонічну функцію $\varphi(x, y) = \operatorname{ch} x \cdot \sin y$, $(x, y) \in \bar{D} = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Її нормальною похідною на межі ∂D буде функція:

$$g(x, y) = n_x \operatorname{sh} x \cdot \sin y + n_y \operatorname{ch} x \cdot \cos y, \quad (x, y) \in \partial D.$$

Із застосуванням описаного алгоритму знайдено наближений розв'язок $g_\alpha(x, y)$.

На рис.1-3 подано графіки залежності похибки наближеного розв'язку $Y_1 = \|g - g_\alpha\|_C$ від параметра регуляризації α :

- a) крива 1 відповідає випадку, коли наближений розв'язок знаходився по незгладжуваній межі;
- b) крива 2 відповідає випадку, коли наближений розв'язок знаходився по згладжуваній межі;
- c) крива 3 відповідає випадку, коли наближений розв'язок знаходився по незгладжуваній межі, причому при його обчисленні множник $\beta(x, y)$ в рівнянні (5) не враховувався.

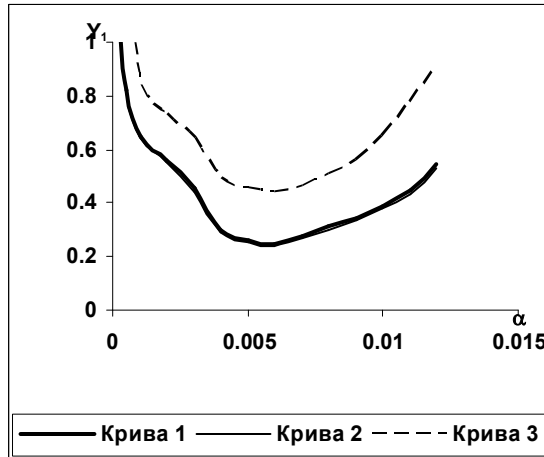


Рис. 1. Залежності похибки розв'язків від параметра регуляризації (крива 2: радіус дуги згладжування $r = 0,002$)

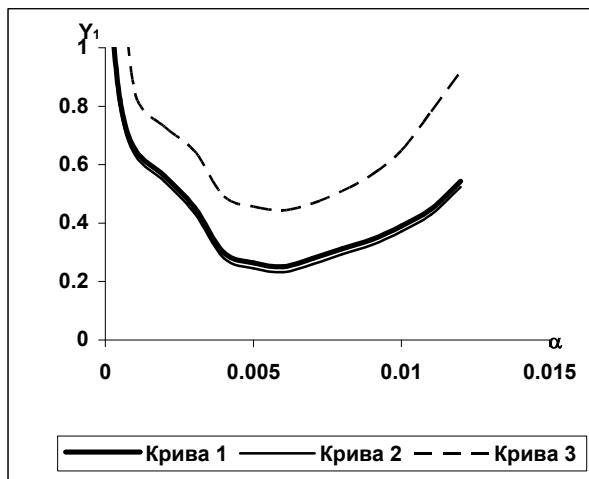


Рис. 2. Залежності похибки розв'язків від параметра регуляризації (крива 2: радіус дуги згладжування $r = 0,006$)

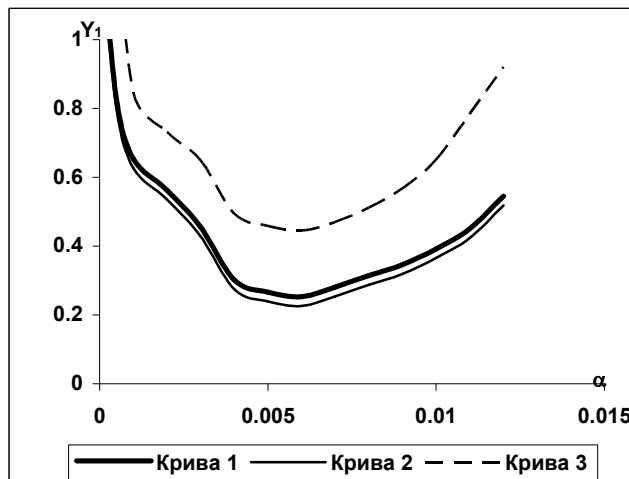


Рис. 3. Залежності похибки розв'язків від параметра регуляризації (крива 2: радіус дуги згладжування $r = 0,008$)

5. Висновки.

При знаходженні розв'язку в області з межею, яка містить кутові точки, потрібно враховувати кут зламу – множник $\beta(x, y)$ у рівнянні (5). Альтернативою цьому є згладжування межі області. Графіки похибок свідчать про те, що із зменшенням радіуса дуги згладжування кутової точки можна прийти до істотно точніших результатів.

1. Арушанян И.О. Применение метода квадратур для решения граничных интегральных уравнений плоской теории упругости на многоугольниках. – М., 2003. 2. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: справочное пособие. – К., 1986. 3. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М., 1978. 4. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. – М., 1970. 5. Риццо Ф. Метод граничных интегральных уравнений – современный вычислительный метод прикладной механики // Механика. Новое в зарубежной науке. – 1978. – №15. 6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М., 1979.

Надійшла до редакції 12.11.2007р.

УДК 517.91

О.О.Пришляк, докт.фіз.-мат.наук
prishlyak@yahoo.com

ФУНКЦІЇ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ НА ПОВЕРХНЯХ З МЕЖЕЮ

Побудовано повний топологічний інваріант функцій загального положення на поверхнях з межею.

We construct the complete topological invariant of functions in general position on surfaces with boundary.

1. Вступ.

Якщо M – гладкий замкнений многовид, то функція Морса на ньому буде функцією загального положення, якщо на кожному її критичному рівні міститься одна критична точка. Такі функції утворюють відкриту скрізь щільну множину. За лемою Морса [2], для невідродженої критичної точки p існує локальна система координат (x_1, \dots, x_n) , в якій функція має вигляд $f(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$.

Нехай M – гладкий компактний n -вимірний многовид з межею ∂M . Функція $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ є функцією загального положення, якщо

- усі її критичні точки – невідроджені і не лежать на межі ∂M ,
- обмеження $f|_{\partial M}$ функції f на ∂M є функцією Морса загального положення,
- критичний рівень функції f містить одну критичну точку цієї функції і не містить критичних точок функції $f|_{\partial M}$.

Нехай $x \in \partial M$ – критична точка $f|_{\partial M}$. Індексом $\text{ind } x$ цієї критичної точки називається пара (λ, δ) , де λ – звичайний індекс, а $\delta = +1$, якщо вектор $\text{grad} f_x$ спрямований назовні і $\delta = -1$, якщо $\text{grad} f_x$ спрямований в усередину многовиду M . Якщо $x \notin \partial M$ – критична точка f , то індекс визначається звичайним чином. Аналогічно лемі Морса в околі невідродженої критичної точки f_0 існує локальна система координат (x_1, \dots, x_n) , $x_n \geq 0$, в якій функція f має вигляд $f(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \delta x_n^2$ [4].

Нехай $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкі функції. Функції f і g називаються топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $\psi: M \rightarrow M$, $\zeta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що $f \zeta = g \psi$.

Критерії топологічної еквівалентності функцій Морсу на компактних двовимірних многовидах отримані у роботах [1, 5, 6], а тривимірних у [3].

Основною метою роботи – дати топологічну класифікацію функцій загального положення на поверхнях (двовимірних многовидах) з межею.

2. Локальна класифікація.

В цьому розділі розглядається питання еквівалентності функцій на поверхні в околі зв'язної компоненти критичного рівня. Можливі 4 типи критичних точок на межі, що відрізняються індексом. Для функції висоти вони зображені на рис. 1.



Рис. 1.

Нехай компонента рівня не є локальний мінімум чи максимум. Тоді вона може містити лише такі критичні точки: 1) внутрішні критичні точки, 2) критичні точки на краю індекса $(0, +1)$, 3) критичні точки на краю індекса $(1, -1)$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що функція f має критичне значення 0, а окіл компоненти критичного рівня є компонентою множини $f^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$. Компоненти $\partial M = f^{-1}(\varepsilon)$ є колами та відрізками. Їх ми будемо називати нижніми. Кола та відрізки з $\partial M = f^{-1}(\varepsilon)$ будемо називати верхніми. Побудуємо аналог хордової діаграми на нижніх колах та відрізках. Для цього розглянемо поле $\text{grad } f$ у деякій рімановій метриці. Стіїкі многовиди особливих точок індексу 1 утворюють хорди (криві) з кінцями на нижніх колах чи внутрішніх точках нижніх відрізків. Компонента межі ∂M , яка містить точку індексу $(1, -1)$ є хордою, що з'єднує кінці нижніх відрізків. За допомогою поля $\text{grad } f$ знайдемо проєкції точок індексу $(0, +1)$ на ∂M (перетин інтегральних траєкторій, що проходять через ці точки з ∂M). Зменшуючи за

необхідності ε , доможемося того, що ці проєкції будуть лежати на нижніх колах та відрізках. Орієнтація поверхні і напрямки поля градієнта визначають орієнтацію кіл та відрізків.

Означення. Об'єднання орієнтованих кіл та відрізків з'єднаних хордами, з виділеними на колах та відрізках точками, називається *хордовою m -діаграмою*. При цьому, якщо кінець хорди є кінцем відрізка, то і інший кінець хорди є кінцем деякого відрізка.

Дві m -діаграми називаються ізоморфними, якщо існує їх гомеоморфізм, який відображає кола на кола, відрізки на відрізки, хорди на хорди, а виділені точки на виділені точки і зберігає орієнтації кіл та відрізків.

Лема. Дві функції загального положення є топологічно еквівалентними в околі критичного рівня, якщо відповідні їм хордові m -діаграми є ізоморфними.

Доведення. *Необхідність* випливає з побудови. *Достатність.* Без обмеження загальності будемо вважати, що функції мають однакове критичне значення і приймають однакові значення на границі околу критичного рівня. Зафіксуємо ріманову метрику на поверхнях. Ізоморфізм m -діаграм задає відповідність між інтегральними траєкторіями (крім нестійких многовидів сідлових точок) полів градієнтів. При цьому, оскільки хорди та виділені точки відображаються на хорди та виділені точки, то стійкі многовиди критичних точок переходять в стійкі многовиди. Відповідність між траєкторіями задає гомеоморфізм між їх об'єднаннями за таким правилом: точки на відповідних траєкторіях переходять одна в одну, якщо вони мають однакові значення в цих точках. Відповідність орієнтації дозволяє продовжити гомеоморфізм з об'єднання траєкторій, між якими задана відповідність, на нестійкі многовиди сідлових точок і, таким чином, побудувати шуканий гомеоморфізм околів. Верхні кола та відрізки задають цикли та маршрути на діаграмі, які будемо називати верхні цикли та маршрути.

3. Глобальна класифікація.

Побудуємо граф Ріба функції загального положення f . Для цього введемо таке відношення еквівалентності на M : дві точки еквівалентні, якщо вони належать одній компоненті лінії рівня функції. Тоді граф Ріба є факторпростір $G_f = M/\sim$. На графі Ріба є природна орієнтація ребер, породжена зростанням функції на відповідних лініях рівня. Крім того, ребра графа розфарбовано в два кольори (розбито на два типи): 1) ребра, для яких компоненти рівня є колами, 2) ребра, для яких компоненти рівня - відрізки.

Розглянемо вершини графа, валентність яких не перевищує 3. Вершини валентності 1 відповідають локальним мінімумам (витоки) чи максимумам (стоки). При цьому, якщо інцидентне їй ребро має перший тип, то відповідна критична точка -внутрішня, а, якщо другий, то вона лежить на краю. Для вершин, валентність яких більше 1, існує принаймні одне ребро, яке входить в неї, і одне, яке виходить з неї. Ребра валентності 2 мають два інцидентних ребра різних типів. При цьому відповідна критична точка має індекс $(0, +1)$, якщо ребро другого типу виходить, і індекс $(1, -1)$, якщо ребро другого типу входить в неї.

Для вершин валентності 3 є такі можливості:

- 1) всі інцидентні їй ребра мають перший тип. Тоді критична точка є внутрішня і має індекс 1;
- 2) два ребра другого типу входять (виходять), а одне першого - виходить (входить). Тоді можливо два варіанти:
 - а) дві критичні точки на краю індексу $(1, -1)$ $((0, +1))$ - дві хорди, кожна з яких з'єднує кінці двох різних відрізків,
 - б) дві критичні точки на краю індексу $(1, -1)$ $((0, +1))$ і одна індексу 1 - дві хорди, кожна з яких з'єднує кінці одного з двох відрізків і третя хорда з'єднує дві внутрішні точки різних відрізків (Рис. 2);

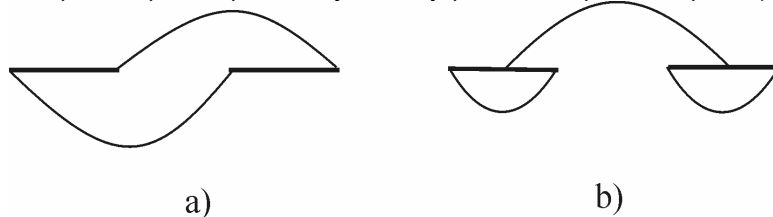


Рис. 2.

- 3) одне ребро другого типу входить, одне ребро другого типу виходить, а третє ребро має перший тип. Можливі два варіанти: а) одна критична точка, яка є внутрішньою індексу 1, б) три критичні точки, індекси яких $(1, -1)$ і $(0, +1)$;
- 4) всі три інцидентні до вершини ребра мають другий тип. Тоді можливі такі варіанти: а) одна критична точка, яка лежить на краю і має тип $(0, +1)$, якщо два ребра виходить і одне входить, б) одна точка типу $(1, -1)$ в іншому випадку, в) дві точки типу $(1, -1)$ і одна $(0, +1)$, г) одна точка типу $(1, -1)$ і дві типу $(0, +1)$;
- 5) два ребра першого типу, одне з яких входить і одне виходить, і одне другого типу - виходить (входить). Тоді маємо дві критичні точки: одна на краю індексу $(1, -1)$ $((0, +1))$ а друга внутрішня індексу 1.

Якщо валентність вершини більше 3, то необхідно фіксувати хордові m -діаграми, як в п.1. При цьому будемо фіксувати такі бієкції: 1) між нижніми колами і вхідними ребрами першого типу, 2) між нижніми відрізками та вхідними ребрами другого типу, 3) між циклами і вихідними ребрами першого типу, 4) максимальними маршрутами і вихідними ребрами другого типу. Як і для звичайних функцій m -функція задає упорядкування (відображення на множину $\{1, 2, \dots, N\}$) вершин графа Ріба.

Розрізняючим графом функції загального положення на компактній орієнтованій поверхні називається побудована за нею (як вище) орієнтований граф Ріба, з розфарбуванням його ребер у два кольори, упорядкуванням вершин, оснащенням вершин валентності більше 2 хордовою m -діаграмою і завданням бієкції інцидентних до цих вершин ребер з відповідними елементами хордової m -діаграми. Два розрізняючих графи називаються ізоморфними, якщо існує ізоморфізм графів Ріба, що зберігає орієнтації та розфарбування ребер, упорядкування вершин, оснащення вершин та комутує з заданими бієкціями.

Теорема. Дві функції загального положення на компактній орієнтованій поверхні топологічно еквівалентні тоді та тільки тоді, коли існує ізоморфізм їх розрізняючих графів.

Доведення. Необхідність. Топологічна еквівалентність функцій загального положення, за побудовою, породжує ізоморфізм розрізняючих графів.

Достатність. Для кожної пари відповідних вершин (відповідність задається ізоморфізмом m -графів) побудуємо, як в п.1, гомеоморфізми околі відповідних компонент критичних рівнів. При цьому гомеоморфізмі компоненти границі переходять в такі компоненти границі, що відповідні їм ребра m -графу переходять один в одного при ізоморфізмі m -графів. Тоді ця відповідність, зважаючи на упорядкування вершин та орієнтації ребер, дозволяє продовжити гомеоморфізми з околі критичних рівнів на решту поверхні (що є об'єднанням циліндрів $S^1 \times [0,1]$ та квадратів $[0,1] \times [0,1]$).

4. Приклади підрахувань.

Будемо позначати ребра першого типу звичайною стрілочкою в кінці ребра, а другого - порожньою в середині. Можливі дві функції, у яких по дві критичні точки – одна на сфері, а інша на двовимірному диску. Можливі дві функції з трьома критичними точками, їх графи відрізняються лише орієнтацією ребер. Тому будемо зображати лише один такий граф. На рис. 3 зображено графи функцій з 2 та 3 критичними точками. Графи функцій з 4 критичними точками зображено на рис. 4.

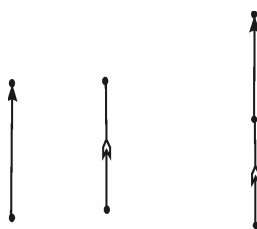


Рис. 3.

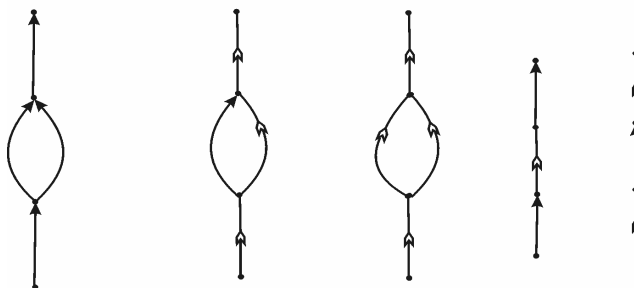
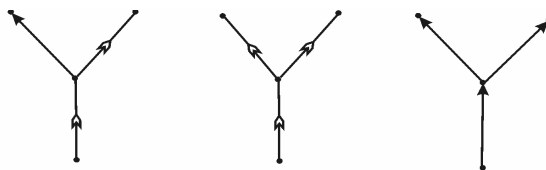


Рис. 4.

На першому графі можливі два різні упорядкування вершин і дві орієнтації ребер (всього 4 не еквівалентних функцій). Наступні два графи мають по одному упорядкуванню і дві орієнтації (по 2 функції). Решта графів задають по одній функції. Отже, існує 13 топологічно не еквівалентних функцій загального положення з 4 критичними точками.

Для функцій з 5 критичними точками існує 9 графів та 22 топологічно нееквівалентні функції.

5. Висновок.

Отримано топологічну класифікацію функцій загального положення на компактних орієнтованих поверхнях з межею.

1. Максименко С.І. Еквівалентність m -функцій на поверхнях// Некоторые вопросы совр. мат. Праці Ін-ту математики НАНУ, Т.25, Київ, 1998,- С.128-134. 2. Милнор Дж. Теория Морса. - М.: Мир, 1964. - 184 с. 3. Пришляк А.О. Сопряженность функций Морса // Некоторые вопросы совр. мат. Праці Ін-ту математики НАНУ, Т.25, Київ, 1998,- С.94-103. 4. Jankowski A., Rubinsztein R. Functions with non-degenerated critical points on manifolds with boundary// Comm. Math. XVI, 1972, p.99-112. 5. Kulinich E.V. On topological equivalence Morse functions on surfaces// Methods of Func. An. and Topology, N1, 1998.- P.22-28. 6. Sharko V.V. On topological equivalence Morse functions on surfaces// Int. conference at Chelyabinsk State Univ.: Low-dimensional Topology and Combinatorial Group Theory, 1996.-P.19-23.

Надійшла до редколегії 01.10.2007р.

УДК 512.534.5

В.Дереч, канд. фіз.-мат. наук
derech@svitonline.com**ВАРІАНТИ ІНВЕРСНИХ НАПІВГРУП СКІНЧЕННОГО РАНГУ**

Нехай S – інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінчену довжину. Для фіксованого елемента c визначимо на S операцію $*_c$ згідно правила $x *_c y = xcy$, а множину S з операцією $*_c$, яка є напівгрупою, позначимо через $(S, *_c)$. Для $(S, *_c)$ знайдено необхідні і достатні умови того, що $(S, *_a) \cong (S, *_b)$.

Let S be an inverse semigroup whose semilattice of idempotents is of finite length. For fixed element c from S defines operation $*_c$ on S via $x *_c y = xcy$. The set S with operation $*_c$ is, obviously, a semigroup which we denote by $(S, *_c)$. Necessary and sufficient conditions in order that $(S, *_a) \cong (S, *_b)$ are founded.

1. Вступ.

Нехай S – довільна напівгрупа. Зафіксуємо елемент $a \in S$ і визначимо нову бінарну операцію $*_a$ згідно правила $x *_a y = xay$. Легко перевірити, що операція $*_a$ є асоціативною. Напівгрупа $(S, *_a)$ називається варіантом напівгрупи S .

Одне з найважливіших питань, яке виникає при вивченні варіантів напівгрупи, формулюється таким чином: нехай a і b – елементи напівгрупи S . За яких умов напівгрупи $(S, *_a)$ і $(S, *_b)$ будуть ізоморфними? У випадку скінченної інверсної симетричної напівгрупи (вона позначається через IS_n) відповідь на це питання дано в [4, теорема 1]. Сформулюємо її:

Результат [4, теорема 1] Напівгрупи $(IS_n, *_a)$ і $(IS_n, *_b)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $rank(\alpha) = rank(\beta)$.

В даній замітці отримано узагальнення згаданого вище результату. Основні результати даної статті анонсовано в [5].

1. Означення, термінологія і формулювання потрібних результатів

Напіврешітку E називають напіврешіткою скінченної довжини, якщо існує таке натуральне число n , що довжина будь-якого ланцюжка напіврешітки E не перевищує n .

Нехай P – впорядкована множина скінченної довжини з найменшим елементом 0. Довжина максимально-го за кількістю елементів ланцюжка, що з'єднує 0 і елемент x , називається висотою елемента x і позначається через $h(x)$.

Нехай S – довільна напівгрупа, N_0 – множина всіх невід'ємних цілих чисел. Функцію $rank : S \rightarrow N_0$ називають ранговою на напівгрупі S , якщо для будь-яких елементів $a, b \in S$ виконується нерівність $rank(a \cdot b) \leq \min\{rank(a), rank(b)\}$. Число $rank(x)$ називається рангом елемента x .

Нехай S – інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину. Функція $rank(a) = h(aa^{-1})$, де $h(aa^{-1})$ – висота ідемпотента aa^{-1} в напіврешітці ідемпотентів напівгрупи S , є ранговою (див. [2]). В даній статті використовується поняття рангу елемента інверсної напівгрупи саме в такому сенсі.

Зазначимо, що для скінченної симетричної інверсної напівгрупи поняття рангу перетворення згідно класичного означення і означення, сформульованого вище, – збігаються. Аналогічне зауваження має місце і для $PAut(V)$ – напівгрупи всіх часткових автоморфізмів скінченновимірною векторного простору V .

Відзначимо деякі властивості рангової функції (див. [2]), які надалі використовуються без відповідних посилань: якщо S – інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінчену довжину, то для довільних $a, b \in S$ мають місце такі властивості:

- 1) якщо $a < b$, то $rank(a) < rank(b)$, де через $a < b$ позначено строгий канонічний порядок на інверсній напівгрупі S ;
- 2) для кожного елемента $a \in S$ має місце рівність $rank(a) = rank(a^{-1}) = rank(aa^{-1}) = rank(a^{-1}a)$.

Множина всіх ідемпотентів напівгрупи (S, \circ) позначається через $E(S, \circ)$. Всі інші необхідні поняття з теорії напівгруп можна знайти в монографії [3].

2. Основний результат

Спочатку доведемо декілька лем.

Лема 1. Якщо a – ідемпотент інверсної напівгрупи (S, \cdot) , то $E(S, *_a) \subseteq E(S, \cdot)$.

Доведення. Нехай $x \in E(S, *_a)$, тоді $xax = x$. Отже $axa = x^{-1}$ і $xa \in E(S, \cdot)$. Звідси $x^{-1} = axa = aaxa = ax^{-1}$. Таким чином, $x = xa \in E(S, \cdot)$.

Лема 2. Якщо a – ідемпотент інверсної напівгрупи (S, \cdot) , то $E(S, *_a) = \{x : x \leq a\}$, де відношення \leq є канонічним порядком на (S, \cdot) .

Доведення. Нехай $x \in E(S, *_a)$. Тоді $xax = x$. Згідно леми 1 елемент x є ідемпотентом напівгрупи (S, \cdot) , а тому $x = xax = xa$, тобто $x \leq a$. Навпаки, якщо $x \leq a$, то $xa = x$, звідки $xax = x$, тобто $x \in E(S, *_a)$.

Лема 3. Якщо a – ідемпотент інверсної напівгрупи (S, \cdot) , то на множині $E(S, *_a)$ операції $*_a$ і \cdot збігаються.

Доведення. Нехай $x, y \in E(S, *_a)$. Тоді $x *_a y = xay$. Оскільки згідно леми 2 $x = xa$, то $x *_a y = xay = xy$.

Лема 4. Якщо a – ідемпотент інверсної напівгрупи (S, \cdot) , то будь-які два ідемпотенти напівгрупи $(S, *_a)$ комутують.

Це твердження безпосередньо випливає з леми 3.

Лема 5. Нехай (S, \cdot) – інверсна напівгрупа скінченного рангу, $a, b \in E(S, \cdot)$. Якщо напівгрупи $(S, *_a)$ і $(S, *_b)$ ізоморфні, то $\text{rank}(a) = \text{rank}(b)$.

Доведення. З леми 4 випливає, що множини $E(S, *_a)$ і $E(S, *_b)$ є піднапівгрупами відповідно напівгруп $(S, *_a)$ і $(S, *_b)$. Оскільки за умовою напівгрупи $(S, *_a)$ і $(S, *_b)$ ізоморфні, то ізоморфні і піднапівгрупи їх ідемпотентів, тобто $E(S, *_a) \cong E(S, *_b)$.

Згідно леми 2 $E(S, *_a) = \{x : x \leq a\}$ і $E(S, *_b) = \{x : x \leq b\}$, де \leq – канонічний порядок на інверсній напівгрупі (S, \cdot) . Оскільки згідно леми 3 операція $*_a$ на множині $E(S, *_a)$ збігається з операцією \cdot , а операція $*_b$ на множині $E(S, *_b)$ збігається з операцією \cdot , то множини $\{x : x \leq a\}$ і $\{x : x \leq b\}$ ізоморфні як впорядковані множини. Звідси випливає, що $h(a) = h(b)$, де $h(a)$ – висота ідемпотента a . Отже, згідно означення рангу маємо $\text{rank}(a) = \text{rank}(b)$.

Теорема 1. Нехай інверсний моноїд S з групою оборотних елементів G задовольняє такі умови:

- 1) напіврешітка ідемпотентів моноїда S має скінченну довжину;
- 2) ідеали моноїда S лінійно впорядковані відносно включення;
- 3) для будь-якого $x \in S$ існує такий елемент $g \in G$, що $x \leq g$.

Тоді для будь-яких a і b напівгрупи $(S, *_a)$ і $(S, *_b)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $\text{rank}(a) = \text{rank}(b)$.

Доведення. Нехай елементи $a, b \in S$ такі, що $\text{rank}(a) = \text{rank}(b)$. Тоді $SaS = SbS$ (див. [2], теорема 2). Отже існують такі елементи u і v , що $uav = b$. Запишемо останню рівність у вигляді $uaa^{-1}aa^{-1}av = b$. Позначимо uaa^{-1} через x і $a^{-1}av$ через y . Покажемо, що $\text{rank}(x) = \text{rank}(y) = \text{rank}(a) = \text{rank}(b)$. Справді, $\text{rank}(x) = \text{rank}(uaa^{-1}) \leq \text{rank}(aa^{-1}) = \text{rank}(a)$. Якщо припустити, що $\text{rank}(uaa^{-1}) < \text{rank}(a)$, то $\text{rank}(a) = \text{rank}(b) = \text{rank}(uaa^{-1}aa^{-1}av) \leq \text{rank}(uaa^{-1}) < \text{rank}(a)$. Маємо суперечність. Отже, $\text{rank}(x) = \text{rank}(a) = \text{rank}(b)$. Аналогічно, $\text{rank}(y) = \text{rank}(a) = \text{rank}(b)$. Таким чином $xay = b$, причому $\text{rank}(x) = \text{rank}(y) = \text{rank}(a)$. Звідси випливає, що

$$x^{-1}x = aa^{-1} \quad (1)$$

$$yy^{-1} = a^{-1}a. \quad (2)$$

Дійсно, припустимо, що $x^{-1}x \neq aa^{-1}$. Оскільки $\text{rank}(x^{-1}x) = \text{rank}(aa^{-1})$, то $x^{-1}xaa^{-1} < aa^{-1}$. Отже, $\text{rank}(x^{-1}xaa^{-1}) < \text{rank}(aa^{-1})$. Далі, $\text{rank}(b) = \text{rank}(xay) = \text{rank}(xx^{-1}xaa^{-1}ay) \leq \text{rank}(x^{-1}xaa^{-1}) < \text{rank}(aa^{-1}) = \text{rank}(a)$. Отримали суперечність. Аналогічно доводиться справедливості рівності (2).

Згідно умови 3) теореми 1 існують такі оборотні елементи $g \in G$ і $q \in G$, що $x \leq g$ і $y \leq q$. Тому

$$xx^{-1} = gx^{-1} \quad (3)$$

$$y^{-1}y = y^{-1}q. \quad (4)$$

Згідно рівностей (1), (3) маємо $xa = xx^{-1}xa = gx^{-1}xa = gaa^{-1}a = ga$. Тобто

$$xa = ga. \quad (5)$$

Аналогічно з рівностей (4) і (2) отримуємо $ay = ayu^{-1}y = ayu^{-1}q = aa^{-1}aq = aq$.

Тобто

$$ay = aq. \quad (6)$$

Використовуючи рівності (5) і (6), одержуємо $b = xay = xaa^{-1}ay = gaa^{-1}aq = gaq$. Отже, $b = gaq$.

Далі, як в статті [4, теорема 1] визначимо перетворення за допомогою рівності $F(x) = q^{-1}xg^{-1}$. Легко перевірити, що перетворення F є ізоморфізмом між напівгрупами $(S, *_a)$ і $(S, *_b)$.

Доведемо тепер зворотне твердження. Нехай $(S, *_a) \cong (S, *_b)$. Оскільки $\text{rank}(aa^{-1}) = \text{rank}(a)$, то згідно доведеного вище $(S, *_a) \cong (S, *_{aa^{-1}})$. Аналогічно, позаяк $\text{rank}(bb^{-1}) = \text{rank}(b)$, то $(S, *_b) \cong (S, *_{bb^{-1}})$. Звідси випливає, що $(S, *_{aa^{-1}}) \cong (S, *_{bb^{-1}})$. Оскільки aa^{-1} і bb^{-1} – ідемпотенти, то згідно леми 5 $\text{rank}(aa^{-1}) = \text{rank}(bb^{-1})$. Таким чином $\text{rank}(a) = \text{rank}(aa^{-1}) = \text{rank}(bb^{-1}) = \text{rank}(b)$.

3. Наслідки

Нехай V – скінченновимірний лінійний простір. Позначимо через $PAut(V)$ інверсну напівгрупу всіх часткових автоморфізмів лінійного простору V відносно звичайної операції композиції бінарних відношень. Відомо, що ідеали напівгрупи $PAut(V)$ лінійно впорядковані відносно включення. Скориставшись добре відомими класичними теоремами лінійної алгебри, легко показати, що виконується умова 3) теореми 1. Таким чином, маємо

Наслідок 1. Напівгрупи $(PAut(V), *_\alpha)$ і $(PAut(V), *_\beta)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $\text{rank}(\alpha) = \text{rank}(\beta)$.

Нехай $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ ($m \geq 2$) – скінченна сім'я рівнопотужних множин, причому $A_i \cap A_j = \emptyset$, якщо $i \neq j$. Сконструємо інверсну напівгрупу часткових взаємно однозначних перетворень на множині $\bigcup_{i=1}^m A_i$ наступним чином:

- 1) зафіксуємо деяку групу бієкцій G_1 на множині A_1 ;
- 2) для кожного A_k ($k \neq 1$) фіксуємо бієкцію $\varphi_k : A_1 \rightarrow A_k$.

Напівгрупу, що породжена множиною $G_1 \cup \{\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_m, \varphi_2^{-1}, \varphi_3^{-1}, \dots, \varphi_m^{-1}\}$, позначимо через I . Очевидно, що порожнє перетворення належить I і є нулем напівгрупи I .

Легко перевірити, що напівгрупа I має такі властивості:

- 1) якщо $f \in I$, то $f^{-1} \in I$;
- 2) якщо $f \in I$ і $f \neq \emptyset$, то $\text{dom}(f)$ і $\text{im}(f)$ (тут $\text{dom}(f)$ і $\text{im}(f)$ відповідно область визначення і множина значень перетворення f) належать сімейству $\{A_i : i = 1, 2, \dots, m\}$;
- 3) для будь-яких A_k і A_r , що належать сімейству $\{A_i : i = 1, 2, \dots, m\}$, існує таке перетворення $\psi \in I$, що $\text{dom}(\psi) = A_k$ і $\text{im}(\psi) = A_r$.

Легко перевірити, що напівгрупа I є цілком 0-простою інверсною напівгрупою, тобто напівгрупою Брандта. Позначимо через $\Omega(I)$ оболонку зсувів напівгрупи I . Відомо [6, с. 209], що оболонка зсувів інверсної напівгрупи є інверсною напівгрупою. З основного результату статті [1] випливає, що напівгрупа $\Omega(I)$ є ідеалізатором напівгрупи I в

симетричній напівгрупі всіх часткових перетворень множини $\bigcup_{i=1}^m A_i$. Тепер вже легко зрозуміти, що елементи напів-

групи $\Omega(I)$ є взаємно однозначними перетвореннями множини $\bigcup_{i=1}^m A_i$, кожне з яких є об'єднанням перетворень з

напівгрупи I . Звідси випливає, що кожний ідемпотент напівгрупи $\Omega(I)$ є об'єднанням тотожних перетворень множин, що належать сімейству $\{A_i : i = 1, 2, \dots, m\}$. Отже кількість ідемпотентів напівгрупи $\Omega(I)$ скінченна, а тому напівгрупа $\Omega(I)$ задовольняє умову 1) теореми 1. Далі, елемент $\psi \in \Omega(I)$ є оборотним тоді і тільки тоді, коли

$\text{dom}(\psi) = \text{im}(\psi) = \bigcup_{i=1}^m A_i$. Звідси випливає, що напівгрупа $\Omega(I)$ задовольняє умову 3) теореми 1. Крім того легко

показати, що ідеали напівгрупи $\Omega(I)$ лінійно впорядковані відносно включення. Таким чином, інверсна напівгрупа $\Omega(I)$ задовольняє усі умови теореми 1. Отже має місце таке твердження.

Наслідок 2. Напівгрупи $(\Omega(I), *_\alpha)$ і $(\Omega(I), *_\beta)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $\text{rank}(\alpha) = \text{rank}(\beta)$.

Зокрема, якщо G_1 є одноелементною групою, то $\Omega(I)$ ізоморфна симетричній інверсній напівгрупі на множині $\{1, 2, \dots, m\}$. Звідси випливає теорема 1 зі статті [4].

Наслідок 3. Нехай S – інверсна напівгрупа скінченної довжини. Для будь-яких $a, b \in S$ $(S, *_a) \cong (S, *_b)$ тоді і тільки тоді, коли S – група.

Доведення. Якщо S – група, то, очевидно, що вона задовольняє усі умови теореми 1. Очевидно, що всі елементи групи мають нульовий ранг. Отже, згідно теореми 1 для будь-яких $a, b \in S$ $(S, *_a) \cong (S, *_b)$.

Нехай тепер S – інверсна напівгрупа скінченної довжини така, що для будь-яких елементів $a, b \in S$ $(S, *_a) \cong (S, *_b)$. Покажемо, що S є групою. Оскільки за умовою напівгрупа S має скінчену довжину, то напіврешітка її ідемпотентів містить найменший елемент e . Доведемо, що ідемпотент e єдиний в інверсній напівгрупі S . Скористаємося методом від супротивного і припустимо, що напівгрупа S містить принаймні ще один ідемпотент f . Розглянемо напівгрупи $(S, *_e)$ і $(S, *_f)$. Згідно леми 2 $E(S, *_e) = \{x | x \leq e\} = \{e\}$ і $E(S, *_f) = \{x | x \leq f\}$. Отже множина $E(S, *_e)$ одноелементна, а множина $E(S, *_f)$ містить принаймні два елементи e і f . Згідно припущення напівгрупи $(S, *_e)$ і $(S, *_f)$ ізоморфні, а оскільки при ізоморфізмі ідемпотент переходить в ідемпотент, то маємо суперечність. Таким чином інверсна напівгрупа S містить точно один ідемпотент. Звідки легко випливає (див. наприклад, [6, с.88]), що S – група.

4. Приклади

Залишаючи незмінною умову 1) теореми 1, на прикладах покажемо, що умови 2) і 3) є суттєвими.

Приклад 1. Розглянемо впорядковану множину $\{1 < 2 < 3\}$. Позначимо через IO_3 інверсну напівгрупу всіх часткових монотонних ін'єкцій множини $\{1 < 2 < 3\}$. Легко перевірити, що для напівгрупи IO_3 виконується умова 2), але не виконується умова 3). Позначимо елемент $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in IO_3$ через α , а елемент $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in IO_3$ через β . Згідно леми 2 $E(IO_3, *_\alpha) = \{\emptyset, \alpha\}$ і $E(IO_3, *_\beta) = \{\emptyset, \beta\}$. Покажемо, що напівгрупи $(IO_3, *_\alpha)$ і $(IO_3, *_\beta)$ не є ізоморфними. Скористася методом від супротивного і припустимо, що існує ізоморфізм f між напівгрупами $(IO_3, *_\alpha)$ і $(IO_3, *_\beta)$. Тоді, очевидно, $f(\alpha) = \beta$. Прямим підрахунком легко перевірити, що існує рівно 6 таких елементів $x \in (IO_3, *_\alpha)$, що $x^2 = \alpha$ і рівно 4 таких елементів $y \in (IO_3, *_\beta)$, що $y^2 = \beta$. Маємо суперечність. Таким чином умова 3) теореми 1 є суттєвою.

Приклад 2. Розглянемо інверсну напівгрупу часткових ін'єкцій множини $\{1, 2, 3\}$:
 $S = \left\{ \emptyset, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. Легко перевірити, що $A = \left\{ \emptyset, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ і $B = \left\{ \emptyset, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ є ідеалами напівгрупи S , причому $A \not\subset B$ і $B \not\subset A$. Тобто ідеали напівгрупи S не утворюють ланцюжок відносно включення. Очевидно, що $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ є групою оборотних елементів напівгрупи S . Легко перевірити, що для напівгрупи S виконується умова 3). Нехай $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ і $\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Очевидно, що $rank(\alpha) = rank(\beta)$. Легко перевірити, що напівгрупа $(S, *_\beta)$ містить рівно 7 таких елементів ρ , що $\rho *_\beta \rho = \emptyset$, а напівгрупа $(S, *_\alpha)$ містить рівно 5 таких елементів ω , що $\omega *_\alpha \omega = \emptyset$. Отже, напівгрупи $(S, *_\alpha)$ і $(S, *_\beta)$ не є ізоморфними. Таким чином, умова 2) теореми 1 є суттєвою.

5. Висновки

Вивчення варіантів напівгрупи дозволяє одержувати додаткову інформацію про структуру вихідної напівгрупи. В даній замітці узагальнено один відомий результат [4, теорема 1] і окреслено межі застосування аналогу цієї теореми для інверсних напівгруп скінченного рангу.

1. Глушкін Л.М. Идеалы полугрупп преобразований // Матем. сб. – 1959. – 47, № 3. – С. 111-130. 2. Дереч В.Д. Конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2005. – 57, № 4. – С. 469 – 473. 3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т.1 – 286 с. 4. Цяпута Г.Ю. Напівгрупи перетворень із деформованим множенням // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки – 2003. - № 3. – С. 82-88. 5. Derech V. Inverse semigroups with the deformed multiplication // 6th International Algebraic Conference in Ukraine: Abstracts, Kamyanets-Podilsky, 2007. – P. 59-60. 6. Petrich M. Inverse semigroups. New York etc.: John Wiley and Sons, 1984. – 674 p.

УДК 519.21

І. Дарійчук, асп.
elijadar@rambler.ru

РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ З ІМОВІРНІСТЮ ОДИНИЦЯ ВЕЙВЛЕТ РОЗКЛАДУ ОДНОГО КЛАСУ ПЕРЕДГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Отримано умови рівномірної збіжності з імовірністю 1 вейвлет розкладів Θ -передгауссових випадкових процесів.
Conditions of uniform convergence with probability one of wavelet expansions of Θ -pre-Gaussian random processes defined on the space \mathbb{R} are presented.

1. Вступ

Актуальною є задача про різноманітні розклади випадкових процесів за системами функцій. В [5] була використана загальна теорема про рівномірну збіжність вейвлет розкладів на скінченних інтервалах для функцій, які мають деякий степінь росту на нескінченності, для вивчення умов рівномірної збіжності з імовірністю один вейвлет розкладів φ -субгауссових випадкових процесів. Становить інтерес узагальнення цих результатів для нових класів випадкових процесів.

В статті отримано умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів іншого класу випадкових процесів - Θ -передгауссових. Спочатку розглядаються умови рівномірної збіжності на скінченному інтервалі вейвлет розкладів невідповідних функцій, які мають деяку степінь росту на нескінченності [1]. Потім ці умови пов'язуються з Θ -передгауссовими випадковими процесами для отримання умов рівномірної збіжності з імовірністю 1 вейвлет розкладів випадкових процесів на скінченних інтервалах.

2. Основні відомості з вейвлет аналізу

Нехай $\phi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ - деяка функція для перетворення Фур'є $\hat{\phi}(y)$, для якої виконуються умови: $\hat{\phi}(0) \neq 0$, $\hat{\phi}(y)$ неперервна в точці 0 і майже скрізь $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(y + 2k\pi)|^2 = 1$. Тоді якщо існує така 2π -періодична функція

$m_0(x) \in L_2([0, 2\pi])$, що справджується рівність $\hat{\phi}(y) = m_0\left(\frac{y}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{y}{2}\right)$, то функцію $\phi(x)$ називають f -вейвлетом, а

функцію $\psi(x)$, яка є оберненим перетворенням Фур'є функції $\hat{\psi}(y) = \overline{m_0\left(\frac{y}{2} + \pi\right)} \exp\left\{-i\frac{y}{2}\right\}\hat{\phi}\left(\frac{y}{2}\right)$, - m -вейвлетом.

Нехай $\phi \in f$ -вейвлетом. Кажуть [1], що виконується умова S для ϕ , якщо існує така незростаюча функція $\Phi(x)$, $x \geq 0$, для якої $\int_{\mathbb{R}} \Phi(|x|) dx < +\infty$ і справджується нерівність $|\phi(x)| \leq \Phi(|x|)$. В подальшому суттєво використовується такий результат [5].

Теорема 1. Нехай виконується умова S для f -вейвлету ϕ та m -вейвлету ψ , що відповідає ϕ ; $c(x)$, $x \in \mathbb{R}$ - така опукла функція, що: а) $c(x) > 1$, $x \in \mathbb{R}$; б) $c(x)$ зростає для $x > 0$; в) $\int_{\mathbb{R}} c(x)\Phi(|x|) dx < +\infty$; г) існує така додатна функція $y(t)$, $t > 0$, що для досить великих x : $c(kx) \leq c(x)y(k)$, де $k > 0$ - деяка константа.

Якщо $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, є такою вимірною на \mathbb{R} функцією, що $|f(x)| < c(x)$ для $x \in \mathbb{R}$ і $f(x)$ неперервна на кожному інтервалі $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, то тоді рівномірно на кожному інтервалі $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$

$$f_m(x) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{0k} \phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{jk} \psi_{jk}(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(x)$$

де $\alpha_{0k} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\phi_{0k}(x)} dx$, $\beta_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_{jk}(x)} dx$, $\phi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k)$, $\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$.

3. Основна теорема про Θ -передгауссові випадкові процеси

Нехай (Ω, \mathcal{F}, P) стандартний імовірнісний простір. Випадкову величину $\xi = \xi(\omega)$, $E\xi = 0$, називають передгауссовою, якщо існують такі числа $H > 0$ і $a > 0$, що нерівність $E \exp\{\lambda \xi\} \leq \exp\left\{\frac{a^2 \lambda^2}{2}\right\}$ виконується для всіх $\lambda \in (-H, H)$. Клас передгауссових випадкових величин, визначених на стандартному імовірнісному просторі позначають $\text{Prg}(\Omega)$.

Означення 1 [2]. Випадковий процес називається *передгауссовим*, якщо всі випадкові величини $X(t)$, $t \in T$ є передгауссовими.

Нехай $X = (X(t), t \in T)$ є передгауссовим випадковим процесом. Позначимо

$$\theta_1(t) \equiv \Theta(X(t)), \quad \theta(t, s) \equiv \Theta(X(t) - X(s)), \quad t, s \in T.$$

Означення 2 [2]. Характеристики передгауссового процесу X підпорядковані переднормі Θ , якщо існують такі константи $\gamma > 0$ й $a \geq 1$, що для $|\lambda| < \gamma\theta_1^{-a}(t)$:

$$E \exp\{\lambda X(t)\} \leq \exp\left\{\frac{\lambda^2 \theta_1^2(t)}{2}\right\}, \quad (1) \text{ а для } |\lambda| < \gamma\theta^{-a}(t, s): E \exp\{\lambda(X(t) - X(s))\} \leq \exp\left\{\frac{\lambda^2 \theta^2(t, s)}{2}\right\}, \quad t, s \in T. \quad (2)$$

Такі процеси називають Θ -передгауссовими.

Наступні дві теореми, які містять умови вибіркової неперервності процесу X в сенсі означень 3.1.11, 3.1.12 в [2], використовуються для доведення основної теореми 4 про рівномірну збіжність вейвлет розкладів випадкових процесів.

Теорема 2. Нехай $X(t)$, $t \in T$, - сепарабельний Θ -передгауссовий випадковий процес, $H(u)$ - u -ентропія на (T, θ) , $a \geq 1$, $\delta \equiv \min(a, 2)$. Якщо для всіх $\varepsilon > 0$ виконується умова

$$\int_0^\varepsilon H^{\frac{1}{\delta}}(u) du < +\infty, \quad (3)$$

то процес $X(t)$, $t \in T$, є вибірково неперервним з імовірністю 1 на (T, θ) .

Теорема 2 є частинним випадком леми 2 та теореми 2 зі статті [4].

Теорема 3. Нехай $T = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, а $X = (X(t), t \in T)$ - сепарабельний Θ -передгауссовий випадковий процес. Якщо існує неспадна функція $\sigma(h)$, $h > 0$, $\sigma(0) = 0$, така, що

$$\sup_{\{t, s \in T: |t-s| \leq h\}} \Theta(X(t) - X(s)) \leq \sigma(h), \quad (4)$$

$$\int_0^\varepsilon \ln^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) du < +\infty \quad (5)$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$, де $\delta \equiv \min(a, 2)$, $a \geq 1$, то траєкторії процесу X є неперервними з імовірністю 1 в просторі (T, θ) .

Доведення. Якщо процес X є сепарабельним на $[a, b]$, то з (4) випливає, що він є сепарабельним на (T, θ) .

Для u -ентропії $H(u) = \ln N(u)$ маємо таку нерівність на $[a, b]$

$$N(u) \leq \frac{b-a}{2u} + 1, \quad (6)$$

тому виконання умови (3) випливає з виконання умови (5).

4. Збіжність вейвлет розкладів

Використовуючи теорему 1 про збіжність вейвлет розкладів детермінованих функцій та теорему 3 про вибірково неперервність випадкових процесів, можна довести теореми про рівномірну збіжність з імовірністю 1 вейвлет розкладів Θ -передгауссових випадкових процесів.

Теорема 4. Нехай $X \equiv (X(t), t \in \mathbb{R})$ - Θ -передгауссовий випадковий процес, $\mathbb{R} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} B_k$ - розбиття числової прямої, де $B_k = [a_k, a_{k+1})$, $a_{k+1} - a_k \geq s_1$, $k \in \mathbb{Z}$, $s_1 > 0$ - деяка константа, і крім того виконуються такі умови:

1) існують такі неперервні зростаючі функції $\sigma_k(x)$, $x > 0$, $\sigma_k(0) = 0$, що на кожному B_k

$$\sup_{\{t, s \in B_k: |t-s| \leq h\}} \Theta(X(t) - X(s)) \leq \sigma_k(h);$$

2) існують числа $\delta = \min(a, 2)$, $a \geq 1$ (див. озн. 2), $w_{0k} \equiv \sigma_k(\sup_{t \in B_k} |t_{0k} - t|)$, $t_{0k} \in B_k$ такі, що збігається ентропійний інтеграл

$$\int_0^\varepsilon H^{\frac{1}{\delta}}(\sigma_k^{(-1)}(u)) du < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0; \quad (7)$$

3) існує додатна опукла функція $c(t)$, $t \in \mathbb{R}$, що для досить великих x : $c(kx) \leq c(x)y(k)$, де $y(x)$, $x > 0$ - деяка невід'ємна функція, $k > 0$ - деяка стала, і крім того існують такі числа $0 < A_k < \min(1, w_{0k}^{2(2-a)})$, $p_k \in (0, 1)$, $\kappa \in (0, 1)$, що збігаються такі ряди:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\theta_1(t_{0k})}{c^\kappa(a_k)}, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{w_{0k}}{c^\kappa(a_k)(1-p_k)}, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\psi_k(p_k)}{c(a_k)(1-p_k)}, \quad (8)$$

$$\text{де } \psi_k(p_k) \equiv \frac{w_{0k}}{(1-p_k)R_k} \max \left(w_{0k} J_{\frac{1}{\delta}}(w_{0k} p_k); \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A_k} \gamma} \frac{(1-p_k)R_k}{w_{0k}} \left[w_{0k} J_{\frac{1}{\delta}}(w_{0k} p_k) \right]^\delta \right) +$$

$$+(1-p_k)R_k J_{1-\frac{1}{\delta}}(w_{0k}P_k), \quad J_r(\varepsilon) \equiv \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon [H^r(\sigma_k^{(-1)}(u))] du, \quad R_k \equiv \theta_1(t_{0k}) + \frac{w_{0k}}{1-p_k}; \tag{9}$$

3) на інтервалі $I \equiv [a, b]$ існує така неспадна функція $\sigma_I(x)$, $x > 0$, $\sigma_I(0) = 0$, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\{t,s \in I: |t-s| \leq h\}} \Theta(X(t) - X(s)) \leq \sigma_I(h), \quad \int_0^\varepsilon \ln^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{b-a}{2\sigma_I^{(-1)}(u)} + 1 \right) du < +\infty; \tag{10}$$

4) $\phi \in f$ -вейвлетом, а ψ - m -вейвлетом, що відповідає ϕ , для яких виконується умова S та $\int_{\mathbb{R}} c(x)\Phi(|x|)dx < +\infty$.

Тоді з імовірністю 1 існують величини $\alpha_{0k} = \int_{\mathbb{R}} X(t)\overline{\phi_{0k}(t)}dt$, $\beta_{jk} = \int_{\mathbb{R}} X(t)\overline{\psi_{jk}(t)}dt$ і має місце збіжність

$$X_m(x) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{0k} \phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{jk} \psi_{jk}(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} X(x)$$

рівномірно на кожному інтервалі $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

Доведення. З теореми 3 та припущення (10) випливає, що траєкторії процесу X є неперервними з імовірністю 1. З теореми 3.1 [3] та умов (7), (8) випливає, що з імовірністю 1 $|X(t)| < \xi c(t)$, (11) де $\xi > 0$ і $P\{\xi < \infty\} = 1$. Таким чином, твердження теореми 4 випливає з (11) та теореми 1.

Розглянемо тепер квазістаціонарний (стаціонарний) випадковий процес. Очевидно, що умови теореми 4 повинні значно спроститися, що і буде показано в наступній теоремі 5, яка є дуже важливим частинним випадком для застосування.

Теорема 5. Нехай $\mathbb{R} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} B_k$ - розбиття числової прямої з теореми 4, причому $|B_k| \leq |B_{k+1}|$,

$X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ - квазістаціонарний (стаціонарний) сепарабельний Θ -передгауссовий випадковий процес, для якого існує неперервна зростаюча функція $\sigma(x)$, $x > 0$, $\sigma(0) = 0$ та константа w , що

$$\sup_{|t-s| \leq h} \Theta(X(t) - X(s)) = \sup_{|t-s| \leq h} \theta(t, s) \leq \sigma(h), \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \theta_1(t) \leq \tau < +\infty, \tag{12}$$

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \sigma \left(\sup_{t,s \in B_k} |t-s| \right) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sigma(|a_{k+1} - a_k|) \leq w < +\infty,$$

і, крім того, виконується умова 4) теореми 4, існують числа $\delta = \min(a, 2)$, $1 \leq a \leq 2$ (див. озн. 2) $p \in (0, 1)$, $\kappa \in (0, 1)$ такі, що збігається інтеграл

$$\int_0^\varepsilon \ln^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) du < +\infty, \quad \varepsilon > 0, \tag{13}$$

та така додатна зростаюча функція $c(t)$, $t \in \mathbb{R}$, що для достатньо великих x : $c(kx) \leq c(x)y(k)$, де $y(t)$, $t > 0$ - деяка додатна функція така, що збігаються ряди

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c^{-\kappa}(a_k); \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} c^{-1}(a_k) \ln(a_{k+1} - a_k + 1). \tag{14}$$

Тоді з імовірністю 1 існують величини $\alpha_{0k} = \int_{\mathbb{R}} X(t)\overline{\phi_{0k}(t)}dt$, $\beta_{jk} = \int_{\mathbb{R}} X(t)\overline{\psi_{jk}(t)}dt$ і має місце збіжність

$$X_m(x) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{0k} \phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{jk} \psi_{jk}(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} X(x)$$

рівномірно на кожному інтервалі $[\alpha, \beta]$.

Доведення. Теорема 5 випливає з теореми 4. Дійсно, оскільки при $a \geq 1$ і $\delta = \min(a, 2)$ маємо $1 \leq \delta \leq 2$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\delta} \leq 1$, $0 \leq 1 - \frac{1}{\delta} \leq \frac{1}{2}$, $N(\varepsilon) > 1$ для всіх $\varepsilon > 0$ і $N(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$, то $H(\varepsilon) = \ln(N(\varepsilon)) > 0$ і $H(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$.

Використаємо теорему 2 та 3. Якщо виконується умова (13), то також виконується і (7). Більше того, з (6) можна отримати, що $\varepsilon J_r(\varepsilon) \leq \int_0^\varepsilon \ln^r \left(\frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) du$ та $\varepsilon J_{1-\frac{1}{\delta}}(\varepsilon) \leq \varepsilon J_1(\varepsilon) \leq \varepsilon J_{\frac{1}{\delta}}(\varepsilon)$ для будь-яких $\varepsilon > 0$.

З (12) випливає

$$w_{0k} \equiv \sigma_k \left(\sup_{t \in B_k} |t_{0k} - t| \right) \leq w. \tag{15}$$

Оскільки випадковий процес $X(t)$ є квазістаціонарним (стаціонарним), то при $1 \leq a \leq 2$ можна замість A_k , w_{0k} в (9) вибрати константи $A_0 > 0$ та $\hat{w} > 0$ (див. (12), (15)). Тоді отримаємо

$$\psi_k(p) \leq \frac{\hat{w}}{(1-p)} \max \left(\hat{w} J_{\frac{1}{\delta}}(\hat{w}p); \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A_0} \gamma} \frac{(1-p)R_k}{\hat{w}} \left[\hat{w} J_{\frac{1}{\delta}}(\hat{w}p) \right]^\delta \right) + (1-p)R_k J_{1-\frac{1}{\delta}}(\hat{w}p), \text{ де}$$

$R_k \equiv \theta_1(t_{0k}) + \frac{w_{0k}}{1-p_k} \leq \tau + \frac{\hat{w}}{1-p}$. Справді, оскільки $|B_k| \leq |B_{k+1}|$, то $|w_{0k}^{2(2-a)}| \leq |w_{0k+1}^{2(2-a)}|$ і $A_k \geq A_0 \neq 0$. Тому $\frac{1}{A_k} \leq \frac{1}{A_0}$.

Таким чином

$$\psi_k(p) \leq \max \left(\frac{\hat{w}}{\tau p(1-p) + p\hat{w}} \int_0^{\hat{w}p} H^{\frac{1}{\delta}}(\sigma^{(-1)}(u)) du; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A_0} \gamma p^\delta} \left[\int_0^{\hat{w}p} H^{\frac{1}{\delta}}(\sigma^{(-1)}(u)) du \right]^\delta + \frac{\tau(1-p) + \hat{w}}{\hat{w}p} \int_0^{\hat{w}p} H^{1-\frac{1}{\delta}}(\sigma^{(-1)}(u)) du \right),$$

за умови, що збігаються інтеграли $\int_0^\varepsilon H^{\frac{1}{\delta}}(\sigma^{(-1)}(u)) du$, $\left[\int_0^\varepsilon H^{\frac{1}{\delta}}(\sigma^{(-1)}(u)) du \right]^\delta$, $\int_0^\varepsilon H^{1-\frac{1}{\delta}}(\sigma^{(-1)}(u)) du$.

Дійсно, з (13) випливає, що

$$\begin{aligned} \left[\int_0^\varepsilon H^{\frac{1}{\delta}}(\sigma^{(-1)}(u)) du \right]^\delta &\leq \left[\int_0^\varepsilon \left[\ln \left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right]^\frac{1}{\delta} du \right]^\delta \leq \left[\int_0^\varepsilon \left[\ln(a_{k+1}-a_k+1) + \ln \left(\frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right]^\frac{1}{\delta} du \right]^\delta \leq \\ &\leq \left[\int_0^\varepsilon \left[\ln(a_{k+1}-a_k+1) \right]^\frac{1}{\delta} du + \int_0^\varepsilon \left[\ln \left(\frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right]^\frac{1}{\delta} du \right]^\delta = \left[\varepsilon \left[\ln(a_{k+1}-a_k+1) \right]^\frac{1}{\delta} + \int_0^\varepsilon \left[\ln \left(\frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right]^\frac{1}{\delta} du \right]^\delta \leq \\ &\leq C_\delta \left[\varepsilon^\delta \ln(a_{k+1}-a_k+1) + \left(\int_0^\varepsilon \ln^\frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) du \right)^\delta \right] < +\infty, (16) \end{aligned}$$

де $C_\delta > 0$ - деяка константа. Отже, умова (7) виконується.

Слід зауважити, що $a_{k+1}-a_k \geq s_1$ і $0 < \ln(s_1+1) \leq \ln(a_{k+1}-a_k+1)$. З (16) та (14) випливає, що

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ c^{-1}(a_k) \left[\int_0^\varepsilon H^{\frac{1}{\delta}}(\sigma^{(-1)}(u)) du \right]^\delta \right\} \leq C_\delta \varepsilon^\delta \sum_{k \in \mathbb{Z}} c^{-1}(a_k) \ln(a_{k+1}-a_k+1) + C_\delta \sum_{k \in \mathbb{Z}} c^{-1}(a_k) \left(\int_0^\varepsilon \ln^\frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) du \right)^\delta < +\infty,$$

тобто виконуються і умови (8).

Очевидно, що (10) також виконується. Таким чином, всі умови теореми 4 виконуються і теорема 5 доведена.

Приклад. Нехай $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ - сепарабельний Θ -передгауссовий випадковий процес;

$$\sigma(h) = \frac{b_1}{\left(\ln \left(b_2 + \frac{1}{h} \right) \right)^\beta}, \text{ де } b_1 > 0, b_2 \geq 2, \beta > \frac{1}{\delta}; c(t) = \ln^d(|t|), d > \frac{1}{\kappa}. \text{ Визначимо відрізки } B_k \text{ так: } a_k = \text{sign}(k) e^{|k|},$$

$k \in \mathbb{Z}$. Тоді виконуються всі умови теореми 5 і справедливий її висновок, тобто з імовірністю 1 існують величини α_{0k}, β_{jk} і має місце збіжність $X_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} X(x)$ рівномірно на кожному інтервалі $[\alpha, \beta]$.

$$\text{Справді, обернена до } \sigma(h) \text{ функція має вигляд } \sigma^{(-1)}(h) = \frac{1}{\exp \left\{ \left(\frac{b_1}{h} \right)^\frac{1}{\beta} \right\} - b_2}.$$

Оскільки $\frac{1}{2} \left(\exp \left\{ \left(\frac{b_1}{h} \right)^\frac{1}{\beta} \right\} - b_2 \right) + 1 = \frac{1}{2} \exp \left\{ \left(\frac{b_1}{h} \right)^\frac{1}{\beta} \right\} - \frac{1}{2} b_2 + 1 \leq \frac{1}{2} \exp \left\{ \left(\frac{b_1}{h} \right)^\frac{1}{\beta} \right\}$ для $b_2 \geq 2$, то умова (13) має вигляд

$$\int_0^\varepsilon \left[\ln \left(\frac{1}{2} \left(\exp \left\{ \left(\frac{b_1}{u} \right)^\frac{1}{\beta} \right\} - b_2 \right) + 1 \right) \right]^\frac{1}{\delta} du \leq \int_0^\varepsilon \left(\ln \frac{1}{2} + \left(\frac{b_1}{u} \right)^\frac{1}{\beta} \right)^\frac{1}{\delta} du \leq \int_0^\varepsilon \left(\ln \frac{1}{2} \right)^\frac{1}{\delta} du + \int_0^\varepsilon \left(\frac{b_1}{u} \right)^\frac{1}{\beta\delta} du = \varepsilon \left(\ln \frac{1}{2} \right)^\frac{1}{\delta} + \frac{\beta\delta}{\beta\delta-1} b_1^\frac{1}{\beta\delta} \varepsilon^\frac{\beta\delta-1}{\beta\delta} < +\infty.$$

Очевидно, що $\frac{1}{c(a_k)} = \frac{1}{|k|^d}$ і $\ln(a_{k+1}-a_k+1) = \ln(e^{k+1}-e^k+1) \leq \ln(2e^k(e-1)) = k + C_1$, де $C_1 > 0$ - деяка константа.

Розглянемо перший ряд в (14): $\sum_{k \in Z \setminus \{0\}} c^{-k}(a_k) = \sum_{k \in Z \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|^{k^d}}$, який збігається для $\kappa d > 1 + \delta_1$, де $\kappa \in (0,1)$, а

$\delta_1 > 0$ - деяка константа. Тоді другий ряд в (14), тобто ряд $\sum_{k \in Z \setminus \{0\}} c^{-1}(a_k) \ln(a_{k+1} - a_k + 1) \leq \sum_{k \in Z \setminus \{0\}} \frac{k}{|k|^d} = \sum_{k \in Z \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|^{d-1}}$ збігається для $d - 1 > 1 + \delta_2$, де $\delta_2 > 0$ - деяка константа.

Отже, умова (14) виконується для $d > \frac{1}{\kappa} + \frac{\delta_1}{\kappa}$, $\kappa \in (0,1)$, що і слід було показати.

5. Висновки

В даній статті отримано умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів Θ -передгауссових випадкових процесів на скінчених інтервалах. В подальших дослідженнях становить інтерес уточнення теореми 4 та доведення відповідних теорем про збіжність вейвлет розкладів Θ -передгауссових випадкових процесів. Слід зазначити, що важливим буде отримання подібних результатів для інших класів випадкових процесів.

1. Козаченко Ю. В. Лекції з вейвлет аналізу. -К., 2004. 2. Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V. Metric characterization of random variables and random processes, AMS, Providence, RI., 2000. 3. Dariyчук I.V., Kozachenko Yu. V. Estimates for the distribution of the supremum of a Θ -pre-Gaussian random processes // Random Oper. and Stoch. Equ., Vol. 15, No. 2, 2008. 4. Kozachenko Yu. V., Livins'ka O.I. Analytic properties of certain classes of stochastic processes from the space $Pred_{\varphi}(\Omega)$ // Theor. Probability and Math. Statist., No. 51, 1995. 5. Kozachenko Yu. V., Perestyuk M. M., Vasylyk O. I. On uniform convergence of wavelet expansions of φ -sub-Gaussian random processes // Random Oper. and Stoch. Equ., Vol. 14, No. 3, 2005.

Надійшла до редколегії 19.11.2007.

УДК 519.21

М.Моклячук, докт.фіз.-мат.н., Н.Щестюк канд. фіз.-мат наук
e-mail: mmp@univ.kiev.ua

РОБАСТНА ФІЛЬТРАЦІЯ ОДНОРІДНИХ ТА ОДНОРІДНО ЗВ'ЯЗАНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ ДИСКРЕТНОГО АРГУМЕНТУ

Досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала від невідомих значень однорідного випадкового поля за спостереженнями поля на фоні корельованого шуму. Знайдені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальних оцінок функціонала для різних класів випадкових полів.

Problem of estimation of the functional on the unknown values of a random field from observations of the homogeneous and correlated random fields is investigated. The least favourable spectral densities and the minimax-robust spectral characteristics of the optimal linear estimates of the linear functional are found for various classes of random fields.

1. Вступ

Задачі оцінювання випадкових полів мають широке застосування при розгляді проблем кодування та обробки сигналів, проблем розпізнавання образів зображень, у задачах теорії автоматичного регулювання, метеорології, океанографії, статистичної гідромеханіки та економетрики. Теорію прогнозування стаціонарних процесів та випадкових полів досліджено у роботах Н. Вінера, Ю.А. Розанова, М. Г. Крейна, А. М. Яглома, М.П. Ядренка. Але запропоновані у тих роботах методи оцінювання стохастичних процесів та випадкових полів можна використовувати лише за умови відомої спектральної щільності. В більшості практичних задач точної інформації про спектральні щільності випадкових процесів (полів) немає, а є лише деякі статистичні характеристики процесів (полів). Тоді, в умовах спектральної невизначеності доцільно застосовувати підхід, за яким шукають оцінки, які є оптимальними одночасно для всіх щільностей з деякого класу можливих спектральних щільностей. Такий метод набув терміну мінімаксного. Огляд результатів з мінімаксної (робастної) обробки інформації можна знайти у С.А.Кассам та Г.В.Пур [1]. У статті Ю.Франка [5] проблема мінімаксної екстраполяції випадкової стаціонарної послідовності досліджена за допомогою методів субдиференціального числення. У роботах [2,3] досліджувались задачі оцінювання функціоналів від невідомих значень дискретних та неперервних випадкових полів за даними спостережень поля у спеціальних областях з шумом. Для знаходження мінімаксних оцінок було зроблено припущення про некорельованість полів, що спостерігаються. Проте в більшості випадків результати спостережень утворюють однорідне поле $\xi(u, v)$, що є корельованим з $\eta(u, v)$.

У даній роботі досліджується задача мінімаксної фільтрації лінійного функціоналу $A\xi = \sum_{k,j \in E} a(k, j)\xi(k, j)$ від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(s, t)$, за даними спостережень поля $\xi(u, v) + \eta(u, v)$ при $(u, v) \in Z^2$, $\xi(u, v)$ та $\eta(u, v)$ – однорідні та однорідно зв'язані випадкові поля. За допомогою методів субдиференціального числення знайдені формули для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних (робастних) спектральних характеристик для певних класів спектральних щільностей.

2. Оптимальні лінійні оцінки функціоналів за умови відомої матриці спектральних щільностей.

Нехай спостерігається випадкове поле $\zeta(u, v) = \xi(u, v) + \eta(u, v)$ при $(u, v) \in Z^2$, де $\xi(u, v)$ та $\eta(u, v)$ – однорідні та однорідно зв'язані (у широкому розумінні) випадкові поля. Кореляційна структура таких полів визначається додатньо визначеною матрицею спектральних щільностей

$$W(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) & f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) \\ f_{\eta\xi}(\lambda, \mu) & f_{\eta\eta}(\lambda, \mu) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціоналу $A\xi = \sum_{k,j \in E} a(k,j)\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v) + \eta(u,v)$ при $(u,v) \in Z^2$ має вигляд $\hat{A}\xi = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda, \mu) Z_{\zeta}(d\lambda, d\mu)$, де $Z_{\zeta}(\Delta_1, \Delta_2)$ - ортогональна випадкова міра, $h(\lambda, \mu)$ - спектральна характеристика оцінки $\hat{A}\xi$. Функція $h(\lambda, \mu)$ належить підпростору $L_2(f_{\zeta\zeta})$, породженому функціями $e^{i(u\lambda+v\mu)}$ при $(u,v) \in Z^2$, $h(\lambda, \mu) = \sum_{(u,v) \in E} \sum h(u,v) e^{-i(u\lambda+v\mu)}$. З умов ортогонального проектування, яким має задовольняти оптимальна функція $h(\lambda, \mu)$ випливає, що

$$h(\lambda, \mu) = \frac{A(\lambda, \mu) f_{\zeta\xi}(\lambda, \mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu)} \quad (2)$$

Спектральна характеристика $h(\lambda, \mu)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ мінімізує величину середньоквадратичної похибки

$$\Delta(W, h(W)) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|A(\lambda, \mu)|^2 (f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) f_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu) - |f_{\xi\zeta}(\lambda, \mu)|^2)}{f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) + f_{\eta\eta}(\lambda, \mu) + 2 \operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu \quad (3)$$

3. Мінімаксний підхід до задач лінійної оцінки функціоналів.

Якщо матриця спектральних щільностей $W(\lambda, \mu)$ (1) точно не відома, але відомо, що вона належить до деякого класу D_W матриць спектральних щільностей, то доцільно знаходити мінімаксні (робастні) оцінки, що дають найменшу похибку для всіх матриць з деякого класу D_W матриць можливих спектральних щільностей [5].

Для заданої множини матриць спектральних щільностей D_W матрицю $W_0(\lambda, \mu)$ будемо називати найменш сприятливою для оптимального оцінювання функціоналу $A\xi$, якщо $\Delta(W_0) = \Delta(h(W_0); W_0) = \max_{W_0 \in D_W} \Delta(h(W); W)$. Спектральну характеристику $h^0(\lambda, \mu)$ оптимальної оцінки функціоналу $A\xi$ будемо називати мінімаксною (робастною), якщо $\min_{h \in H_D} \sup_{W \in D_W} \Delta(h; W) = \sup_{W \in D_W} \Delta(h^0; W)$.

Найменш сприятлива матриця W_0 з опуклої множини матриць спектральних щільностей D_W та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(W_0)$ утворюють сідлову точку (h^0, W_0) функції $\Delta(h; W)$ на множині $H_D \times D_W$. Нерівності сідлової точки $\Delta(h^0; W) \leq \Delta(h^0; W_0) \leq \Delta(h; W_0)$ для $\forall h \in H_D \quad \forall W \in D_W$ виконуються тоді і тільки тоді, коли

$$\Delta(h(W_0); W_0) = \sup_{W \in D_W} \Delta(h(W_0); W). \quad (4)$$

Задача на умовний екстремум (4) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [5]

$$\Delta_D(W) = -\Delta(h(W_0); W) + \delta(W|D_W) \rightarrow \inf,$$

де $\delta((W)|D_W)$ - індикаторна функція множини D_W . Розв'язок цієї задачі визначається умовою $0 \in \partial\Delta_D(W_0)$, де $\partial\Delta_D(W_0)$ - субдиференціал опуклого функціоналу $\partial\Delta_D(W)$ в точці W_0 . Ця умова є необхідною та достатньою для того, щоб точка (W_0) належала множині мінімумів опуклої функції

4. Мінімаксні оцінки для фіксованих $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)$, $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$.

Нехай щільності $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)$, $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$ фіксовані, а щільність $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)$ - невизначена. Розглядаючи (3) можна прийти до висновку, що $\forall \lambda \in [-\pi, \pi]$, $\forall \mu \in [-\pi, \pi]$ найменш сприятливою $\operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)$ буде $\operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) = -|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|$. Зрозуміло, що в цьому випадку $\operatorname{Im} f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) = 0$. Тоді розглянемо

$$\Delta(h(W_0); W) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|A(\lambda, \mu)|^2 (f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) f_{\eta\eta}(\lambda, \mu) - |f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|^2)}{f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) + f_{\eta\eta}(\lambda, \mu) - 2|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|} d\lambda d\mu \quad (7)$$

як функцію від $|f_{\xi\eta}|$. Позначимо $f(\lambda, \mu) = |f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|$, $c_0(f_{\xi\xi}^0, f_{\eta\eta}^0) = f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$,

$$c_1(f_{\xi\xi}^0, f_{\eta\eta}^0) = f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) + f_{\eta\eta}(\lambda, \mu).$$

Отже, (7) матиме вигляд $\Delta(h(f_0), f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|A(\lambda, \mu)|^2 (c_0(f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}) - f(\lambda, \mu)^2)}{c_1(f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}) - 2f(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu$.

4.1 Найменш сприятливі щільності в класі $D_{2\varepsilon}(\lambda)$.

Нехай відомо, що $f = |f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|$ належить моделі ε – околу в просторі L_2 , тобто $f \in D_{2\varepsilon}$,

$$D_{2\varepsilon} = \left\{ f(\lambda, \mu) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda, \mu) - u(\lambda, \mu))^2 d\mu \leq \varepsilon(\lambda), \forall \lambda \in [-\pi, \pi] \right\},$$

де $u(\lambda, \mu)$ — невід’ємна функція на $L^\infty(\mu)$ для всіх $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $\varepsilon > 0$.

Відомо, що субдиференціал індикаторної функції $\delta(f|D_{2\varepsilon})$ у точці f_0 має вигляд [5]

$$\partial\delta(f_0|D_{2\varepsilon}) = \begin{cases} \{0\}, & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_0(\lambda, \mu) - u(\lambda, \mu))^2 d\mu < \varepsilon(\lambda) \\ \{\gamma(\lambda)\phi_0\}, & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_0(\lambda, \mu) - u(\lambda, \mu))^2 d\mu = \varepsilon(\lambda) \end{cases}, \tag{8}$$

де $\phi_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_0(\lambda, \mu) - u(\lambda, \mu))f(\lambda, \mu) d\mu$, $\gamma(\lambda)$ — невід’ємна вимірна функція Лагранжа..

За умови, що маємо фіксовані $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)$, $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$, а отже обмежені $c_0(f_{\xi\xi}^0, f_{\eta\eta}^0)$, $c_1(f_{\xi\xi}^0, f_{\eta\eta}^0)$, функціонал $\Delta(h(f_0); f)$ є неперервним лінійним функціоналом у просторі L_2 . Задача визначення найменш сприятливої в $D_{2\varepsilon}(\lambda)$ спектральної щільності f_0 при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A\xi$ зводиться до знаходження мінімального значення функціоналу

$$\tilde{\Delta}(h(f_0); f) = -\Delta(h(f_0); f) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|A(\lambda, \mu)|^2 (c_0(f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}) - f(\lambda, \mu)^2)}{c_1(f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}) - 2f(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu.$$

на множині спектральних щільностей $D_{2\varepsilon}(\lambda)$. Для цього можна знайти мінімальне значення $\Delta(h(f_0); f)$ для кожного $\lambda \in [-\pi, \pi]$ в кожній точці множини $D_{2\varepsilon}(\lambda)$. Для всіх $\lambda \in [-\pi, \pi]$ маємо

$$\tilde{\Delta}'(h(f_0); f) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(\lambda, \mu)|^2 \frac{f_0^2(\lambda, \mu) - c_1(f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta})f_0(\lambda, \mu) + c_0(f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta})}{(c_1(f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}) - 2f_0(\lambda, \mu))^2} f(\lambda, \mu) d\mu.$$

Враховуючи (8) одержуємо, що $f_0(\lambda, \mu) \in D_{2\varepsilon}$ є найменш сприятливою щільністю, якщо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_0(\lambda, \mu) - u_1(\lambda, \mu))^2 d\mu = \varepsilon_1(\lambda) \quad \forall \lambda \in [-\pi, \pi],$$

та існує така $\gamma_1(\lambda) \geq 0$, що для всіх варіацій $f(\lambda, \mu)$ щільності $f_0(\lambda, \mu)$ та для $\forall \lambda \in [-\pi, \pi]$ виконується рівняння

$$\int_{-\pi}^{\pi} |A(\lambda, \mu)|^2 \frac{f_0^2(\lambda, \mu) - c_1 f_0(\lambda, \mu) + c_0}{(c_1 - 2f_0(\lambda, \mu))^2} f(\lambda, \mu) d\mu = \gamma_1(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} (f_0(\lambda, \mu) - u_1(\lambda, \mu)) f(\lambda, \mu) d\mu.$$

Звідси

$$|A(\lambda, \mu)|^2 \frac{f_0^2(\lambda, \mu) - c_1 f_0(\lambda, \mu) + c_0}{(c_1 - 2f_0(\lambda, \mu))^2} = \gamma_1(\lambda) (f_0(\lambda, \mu) - u_1(\lambda, \mu)) \tag{9}$$

Отже, справджується наступна теорема.

Теорема 1. Якщо $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)$, $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$ є фіксованими, $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) \in D_W = D_{2\varepsilon}(\lambda)$ та задовольняє умову мінімальності [4], то спектральна щільність $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) = -|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|$ є найменш сприятливою в $D_W = D_{2\varepsilon}(\lambda)$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A\xi$, якщо $f_0(\lambda, \mu) \in D_{2\varepsilon}$ є розв’язком рівняння (9),

$\gamma_1(\lambda) \neq 0$, якщо $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_0(\lambda, \mu) - u_1(\lambda, \mu))^2 d\mu = \varepsilon_1(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Функція $h(f_0)$, обчислена за формулою (2),

є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

4.2 Найменш сприятливі щільності в класі $D_u^v(W)$.

Розглянемо задачу в класі спектральних щільностей $D_W = D_u^v(W)$.

$D_v^u(W) = \left\{ f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) \mid v(\lambda, \mu) \leq |f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)| \leq u(\lambda, \mu) \right\}$, для фіксованих $f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}$.

Якщо дослідити функцію, визначену (7) на монотонність, то маємо, що підінтегральна функція $\frac{|A(\lambda, \mu)|^2 (f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)f_{\eta\eta}(\lambda, \mu) - |f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|^2)}{f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) + f_{\eta\eta}(\lambda, \mu) - 2|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|}$ як функція від $|f_{\xi\eta}|$ досягає екстремуму при $|f_{\xi\eta}| = \frac{f_{\xi\xi} + f_{\eta\eta} \pm \sqrt{(f_{\xi\xi} - f_{\eta\eta})^2}}{2} = \frac{f_{\xi\xi} + f_{\eta\eta} \pm |f_{\xi\xi} - f_{\eta\eta}|}{2}$.

Зрозуміло, що супремум для підінтегральної функції буде досягатися для $\min(f_{\xi\xi}(\lambda, \mu), f_{\eta\eta}(\lambda, \mu))$. Отже, функція, визначена (7) буде зростати при $|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)| \leq \min(f_{\xi\xi}(\lambda, \mu), f_{\eta\eta}(\lambda, \mu))$ і спадати при $|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)| \geq \min(f_{\xi\xi}(\lambda, \mu), f_{\eta\eta}(\lambda, \mu))$. Нерівність $|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)| \leq \sqrt{f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)}$ впливає з додатної визначеності матриці D_W .

Якщо позначити $L(\lambda, \mu) = \min(f_{\xi\xi}(\lambda, \mu), f_{\eta\eta}(\lambda, \mu))$, то найменш сприятливою буде щільність $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) = -|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|$, де

$$|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)| = \begin{cases} v(\lambda, \mu), & L(\lambda, \mu) \leq v(\lambda, \mu) \\ L(\lambda, \mu), & v(\lambda, \mu) \leq L(\lambda, \mu) \leq u(\lambda, \mu) \\ u(\lambda, \mu), & u(\lambda, \mu) \leq L(\lambda, \mu) \end{cases} \quad (10)$$

Отже, справджується наступна теорема.

Теорема 2. Якщо $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu), f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$ є фіксованими, а $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) \in D_W = D_v^u(W)$, то спектральна щільність $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) = -|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|$, де $|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|$ задовольняє (10) буде найменш сприятливою в класі $D_W = D_v^u(W)$. Мінімаксну спектральну характеристику та середньоквадратичну похибку можна обчислити за формулами (2), (3) відповідно.

5. ВИСНОВКИ

У статті досліджується задача мінімаксного оцінювання функціонала $A\xi$ від невідомих значень однорідного випадкового поля за спостереженнями поля на фоні корельованого шуму. За умови, що щільності $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu), f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$ фіксовані, а щільність $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)$ належить моделі ε – околу в L_2 або класу $D_v^u(W)$ знайдені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальних оцінок функціонала $A\xi$. Надалі бажано дослідити випадок, коли точні значення щільностей $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu), f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$ також невідомо, але відомо деякі обмеження на ці щільності.

1. Кассам С.А., Пур Г.В. Робастные методы обработки сигналов: Обзор // Труды института инженеров по электронике и радиоэлектронике.- 1985.- Т.73. № 3.- С. 54-110. 2. Моклячук М.П., Шестюк Н.Ю. Про задачу фільтрації випадкових полів// Вісник Київського університету, серія фіз.- мат. науки, – 2002, вип. № 5, с. 116– 126. 3. Моклячук М.П., Шестюк Н.Ю. Про фільтрацію випадкових полів дискретного аргументу // Вісник. Математика. Механіка., – 2003, вип. № 9-10, с. 117– 123. 4. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы.- М.: Наука, 1990.- 272 с. 5. Franke J. Minimax robust prediction of discrete time series// Z. Wahr. Verw. Geb.- 1985.- Vol. 68.- P. 337-364.

Надійшла до редколегії 24.01.2008

УДК 539.3

В. Андрущенко, пров. інж., Д. Лібов, студ., М. Якименко, асп.
andron@univ.kiev.ua, yanko@univ.kiev.ua

ДОСЛІДЖЕННЯ СПЕКТРІВ ПРУЖНИХ КОЛИВАНЬ КОРОТКИХ СУЦІЛЬНИХ ЦИЛІНДРІВ

Запропоновано методику визначення частотних характеристик пружних циліндрів. Збудження коливань та знімання резонансних характеристик здійснюється за допомогою заклеваних на торцях циліндра п'єзокерамічних дисків. Узгодження результатів експериментів із даними розрахунків, широко відомих в літературі, підтверджує ефективність експериментального та теоретичного підходу.

Technique for determining of frequency spectra elastic cylinders is proposed. Vibrations excitation and resonance characteristics taking is accomplished by means of glued piezoceramic disks. Concordance between experimental results and widely known in literature data of calculations confirm effectiveness of experimental and theoretical approaches.

1. Вступ

При проектуванні технічних пристроїв регулярно виникають задачі, пов'язані із застосуванням коротких циліндрів. Прикладами таких приладів є, наприклад, гравітаційні антени [4], п'єзокерамічні резонатори та випромінювачі ультразвукових хвиль [11], резонансні перетворювачі для деформування поверхні адаптивних дзеркал оптичних систем [8], п'єзоелектричні генератори (струму та напруги) [2], модулятори лазерного випромінювання та інше.

Залежно від задач, що розв'язуються, виникають ті чи інші практичні проблеми. Так, наприклад, при конструюванні гравітаційних антен виникають задачі вибору оптимальної геометрії не тільки із умов мінімального впливу дисипації енергії у вузлах її кріплення, але й забезпечення моночастотності. В якості чутливого елемента гравітаційної антени часто використовується багатотонний суцільний циліндр із спеціального алюмінієвого сплаву, в якого меха-

нічна добротність досягає тисяч одиниць. Переміщення обох торців циліндра реєструються за допомогою ємнісних датчиків, чутливість котрих може досягати реєстрації зміщення при броунівському русі молекул повітря на частоті першої поздовжньої форми коливань циліндра.

Знання власних частот циліндричних зразків може бути використано для визначення пружних сталих металевих зразків у формі скінчених циліндрів. Методики визначення модуля зсуву G та коефіцієнта Пуассона ν за відношенням декількох власних частот подаються, наприклад, в роботі [14].

У всіх вище наведених прикладах циліндричне тіло здійснює коливальні рухи і знання їх характеристик (як на поверхні так і в об'ємі) надзвичайно важливе. Необхідно відмітити, що виникнення та визначення точок (областей), де виникають максимальні нормальні та дотичні напруження можливе в більшості практичних випадках тільки за умови проведення теоретичних розрахунків. Питання про те, наскільки точними можуть бути такі розрахунки, які математичні моделі найкращим чином описують фізичний процес деформування суцільних циліндрів із різними співвідношеннями діаметра до довжини є актуальними на сьогоднішній день.

В даній роботі пропонується теоретичний розв'язок задачі про вимушені коливання ізотропного циліндра скінченої довжини та експериментальна методика визначення власних частот коливань.

2. Об'єкт дослідження, цілі та задачі

Об'єктом дослідження був обраний суцільний циліндр із співвідношенням діаметра до довжини 1:2.812. На перший погляд, хоча такий циліндр не підходить для описання одновимірною моделлю, тим не менше навіть при таких співвідношеннях перша поздовжня форма коливань (стрижнева) визначається відомою формулою [7] з точністю до декількох відсотків. Другою причиною вибору такого співвідношення є те, що краєві форми коливань на обох торцях вже чітко проявляються і не являються сильно зв'язаними між собою, так як вони є

експоненціально згасаючими вздовж довжини циліндра. Їх вивчення представляє для нас неабиякий інтерес.

З такою метою досліджуваний циліндр мав розміри 35,95 мм (діаметр):101,1 мм (довжина) і був виготовлений із алюмінієвого сплаву типу Д16Т. Цей сплав був вибраний внаслідок його високої механічної добротності Q_{mex} , що складає тисячі одиниць. Досліджуваний циліндр був виготовлений із брусу діаметром 50 мм на токарному станку підвищеної точності, з похибкою не більше 0,01 мм. Неплощинність торців відносно поздовжньої осі не гірше ± 30 кутових секунд. Клас чистоти поверхні – не гірше восьмого. На даному етапі досліджень, коли не ставилася задача отримання граничних характеристик по збереженню максимально можливої добротності замість ємнісних датчиків [4, 10] для електричного збудження і прийому були використані дві тонкі п'єзокерамічні пластини складу «НБС-3» (діаметр 39.8 мм, товщина 1.0 мм, поляризовані по товщині), які були наклеєні на торці епоксидною смолою. З метою зменшення товщини епоксидного клею, пластини під час заклеювання притискувалися вантажем вагою 5 кг. По нашим підрахункам товщина епоксидного клею не перевищила 0.05 мм, а на більшій площі була меншою. Після підсушування і витримки для стабілізації властивостей протягом декількох діб циліндричний зразок був готовий для проведення дослідів (рис.1). Необхідно було зняти резонансний спектр пружних коливань, провести його аналіз і виділити основні резонанси (тони), а також порівняти з результатами теоретичних дослідів.

3. Експериментальна установка і методика досліджень

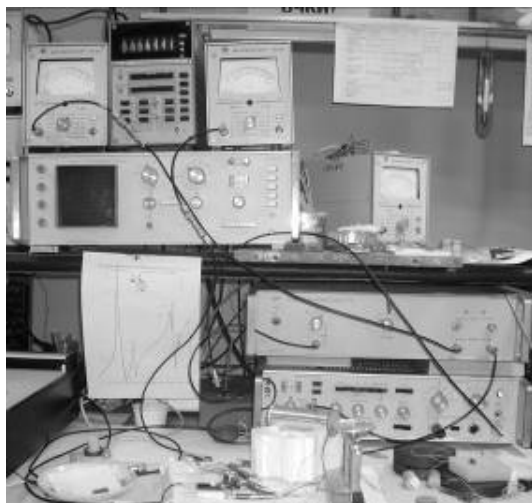


Рис.2. Експериментальна установка з генератором Х1-46

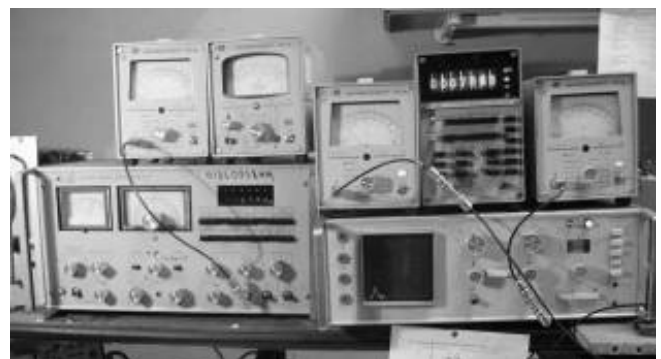


Рис.3. Експериментальна установка з генератором Г3 – 117

Експериментальна установка (рис.2) подібна до тієї, що описана в [1]. На рис.4 зображено блок-схему експериментальної установки для зняття амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) та форм коливань. Зокрема зображено: генератор змінної частоти (ГКЧ-46), індикатор (Х1-46), підсилювач потужності (У7-3), частотомір (Ч3-57), вольтметр (В3-38), двокоординатний самопис (Н-306), $R_{ш}$ – струмовий резистор величиною 15 Ом, ПЕ1 та ПЕ2 – п'єзоелементи на торцях досліджуваного циліндра із дюралюмінію, Вк1 – тумблер для шунтування струмового резистора, Вк2 – тумблер для підключення на вимірювання або вхідної напруги (із ПЕ2) або вхідного струму (через ПЕ1).

При перемиканні із вимірювання по напрузі на вимірювання по струму вимикачі Вк1 та Вк2 перемикаються синхронно. Положення на рисунку відповідає вимірюванню на АЧХ при реєстрації струму

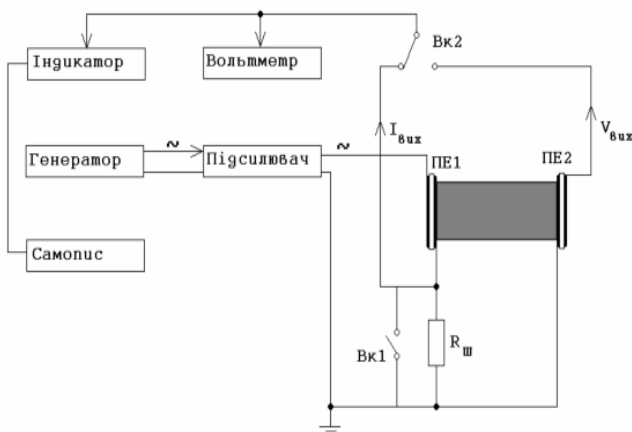


Рис.4 Блок-схема експериментальної установки

Цікаво відмітити, що добротність циліндричного резонатора з алюмінієвого сплаву така, що при подачі напруги 1 В на один із п'єзоелементів, інтенсивність збудження буде такою, що вихідна напруга на іншому п'єзоелементі буде досягати 4 В – на крайовій моді 77,34 кГц, а на першій поздовжній, для порівняння, тільки 0,4 В. Основна частина цієї напруги створюється радіальною компонентою деформації наклеєної круглої п'єзокерамічної пластини і в першому наближенні можна підрахувати рівень переміщень (в мікронах), а також еквівалентні механічні радіальні напруження, які необхідно було б прикласти до п'єзодиску для створення потенціалу рівного 4 В.

Щодо оцінки механічної добротності досліджуваного циліндру з алюмінієвого сплаву на першій поздовжній моді коливань слід зауважити, що під час проведення експериментальних досліджень було виявлено, що коректне визначення форми резонансного піку, і відповідно, визначення частот, на яких рівень сигналу зменшується в $1/\sqrt{2}$ рази відносно максимального, викликає труднощі. Це пов'язано зі стабільністю генератора (пристрій Х1–46). Більш чітко вид АЧХ і добротність були визначені за допомогою генератора ГЗ–117 (рис.3). Безсумнівно, що механічна добротність алюмінієвого сплаву і, відповідно, циліндру із нього виготовленого буде ще вище (у декілька разів), якщо торці не будуть задемпфовані п'єзокерамікою і тонким шаром епоксидної смоли. П'єзоелементи виконують роль приєднаної маси і приєднаної жорсткості. Оскільки маса пластинок значно менша, ніж маса циліндру, пониження першої поздовжньої моди буде якісно не суттєвим, тим більше це майже не впливає на форми коливань.

4. Результати експериментальних досліджень.

В результаті експериментів було отримано АЧХ суцільного алюмінієвого циліндра, збуджуваного за допомогою приклеєних на торцях тонких п'єзокерамічних дисків. Перед заклеюванням п'єзодисків було отримано також їх власні частоти, що склали 57,49 кГц, 151,49 кГц, 240,70 кГц, 328,59 кГц, 415,57 кГц (також див. [12]). По співвідношенню цих частот можна розрахувати при необхідності модуль пружності та коефіцієнт Пуассона, що є важливим для врахування жорсткостей приєднаних мас та їх впливу на частоти власних коливань системи циліндр – п'єзодиски.

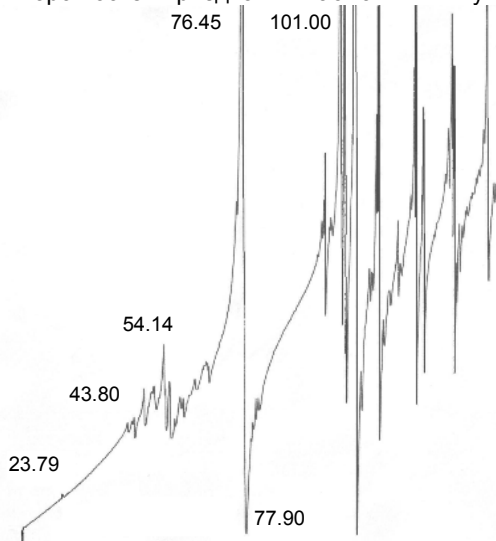


Рис.5. АЧХ суцільного циліндра із алюмінієвого сплаву (Д16Т), реєстрація струму

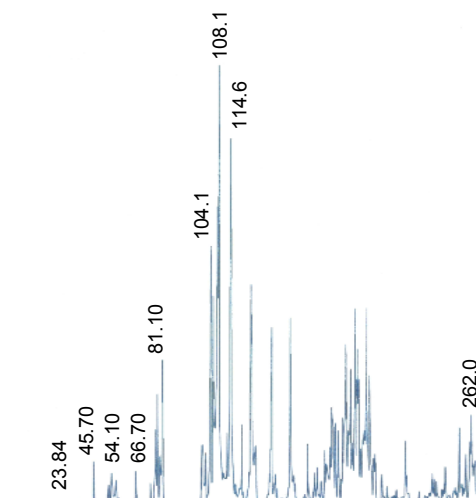


Рис.6. АЧХ, знята при збудженні одного п'єзоелемента (ПЕ1) і реєстрації сигналу з іншого п'єзоелементу (ПЕ2)

Спершу АЧХ була знята по струму через резистор $R=15$ Ом. Рис.5. видно, що частотний спектр дуже щільний (багато резонансів), а перші інтенсивні резонанси можна побачити з частоти 76 кГц. В районі 23 кГц спостерігається невеликий сплеск, а на частотах 43 – 54 кГц менш високодобротні резонанси.

Подібна АЧХ отримується при подачі живлення на один п'єзоелемент (рис.6), а сигнал з іншого п'єзоелемента при цьому використовується для реєстрації вихідної напруги.

Із рис.5 та 6 видно, що резонанс на частоті 23 кГц проявляється не чітко і не досягає свого максимуму. Більш якісно цей резонанс був зафіксований окремо, у вузькій смузі змінення частоти за той же проміжок часу, коли коливна система у вигляді циліндричного резонатора встигала виходити на встановлений режим. Амплітудно-частотна характеристика першої поздовжньої моди коливань приведена на рис.7. Зашумування сигналу пов'язане з перешкодами, що виникають від генератора розгортки. У ручному режимі налаштування на частоту таких кидків сигналу не спостерігається, що дозволяє впевнено визначити резонансну частоту з точністю ± 1 Гц та знаходити точки f_a і f_b

на рис.7, де рівень сигналу зменшується в $1/\sqrt{2}$ рази для знаходження механічної добротності. У нашому випадку резонансна частота рівна $f_{рез} = 23,792$ кГц і $Q_{мех} = \frac{f_{рез}}{\Delta f} = \frac{23792}{11} = 2163$, де $\Delta f = f_b - f_a = 23798 - 23787 = 11$ Гц.

В нашому випадку можуть збуджуватися також парні і непарні гармоніки основного тону, тобто $f_2 = f_{рез}^1 * 2 = 2 * 23792$ кГц = 47,584 кГц, а $f_3 = f_{рез}^1 * 3 = 71,376$ кГц. Нам не вдалося виявити першої крутильної та першої згинної форми коливань циліндру, котрі можуть збуджуватися внаслідок несиметрії властивостей алюмінієвого сплаву, спотворення викривленої форми циліндра, недосконалого підклеєння п'єзоелементів, що каже про якісне виготовлення зразка. Була отримана оцінка ступеня пропорційності між вхідними напругами та вихідними. При подачі на п'єзоелемент ПЕ1 напруги величиною 1 В, на виході ПЕ2 напруга дорівнювала 0,36 В (резонансна частота підтримувалася постійною), при подачі 2 В ми маємо 0,72 В і при подачі 3 В – 1,1 В, що вказує на лінійну залежність, яка забезпечує монотонність.

5. Теоретичне дослідження власних форм та частот осесиметричних коливань пружного циліндра

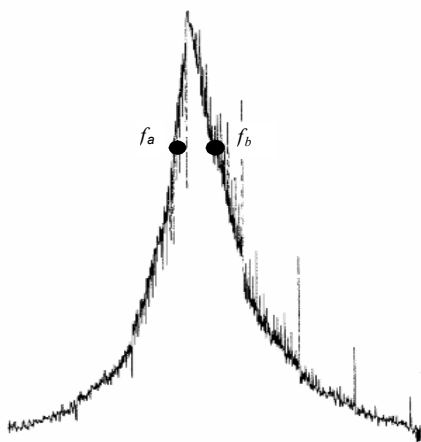


Рис.7. АЧХ першої поздовжньої моди коливань на частоті 23,79 кГц

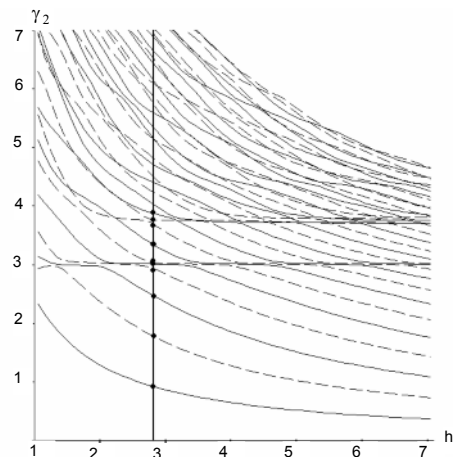


Рис.8. Частотний спектр

Спектр та власні форми коливань циліндра $0 \leq r \leq a$, $|z| \leq H$ вивчалися різними методами (чисельними та аналітичними) в багатьох публікаціях. Огляд майже необмеженої кількості робіт можна знайти в роботах [3; 5; 14]. Нижче ми наводимо лише основні формули методу суперпозиції. Детальні викладки містяться в роботах [5, 6].

Рівняння Ламе для амплітуд (множник $\exp(-i\omega t)$ опущено) вектора переміщень $\vec{u}(r, z)$ має відомий вигляд

$$2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u} + \frac{\rho}{G} \omega^2 \vec{u} = 0 \tag{1}$$

Згідно методу суперпозиції розв'язок цього векторного рівняння для граничних умов в навантаженнях (тут подано вираз лише для симетричного відносно серединної площини циліндра руху) має вигляд

$$u_r(r, z) = A_0 J_0(\gamma_1 r) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n I_1(q_1 r) + B_n I_1(q_2 r)] \cos(k_n z) - \sum_{j=1}^{\infty} \left[C_j \frac{\lambda_j}{p_1} \text{ch}(p_1 z) + D_j \frac{p_2}{\lambda_j} \text{ch}(p_2 z) \right] J_1(\lambda_j r),$$

$$u_z(r, z) = C_0 \sin(\gamma_1 z) + \sum_{j=1}^{\infty} [C_j \text{sh}(p_1 z) + D_j \text{ch}(p_2 z)] J_0(\lambda_j r) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \frac{k_n}{q_1} I_0(q_1 r) + B_n \frac{q_2}{k_n} I_0(q_2 r) \right] \sin(k_n z), \tag{2}$$

де $q_i^2 = k_n^2 - \gamma_i^2$, $p_i^2 = \lambda_j^2 - \gamma_i^2$, $i = 1, 2$; $k_n = \frac{\pi n}{h}$, $J_1(\lambda_j) = 0$

Через J_0, J_1 позначено функції Бесселя першого роду, відповідно нульового та першого порядків, через I_0, I_1 – модифіковані функції Бесселя.

Подальше виконання граничних умов призводить до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів A_n, B_n ($n=1,2,\dots$) та C_j, D_j ($j=1,2,\dots$). Умова рівності нулю визначника цієї системи дає резонансні частоти для циліндра скінченної довжини.

На рис. 8 зображено результати обрахунків частотного спектру для ізотропного циліндра із коефіцієнтом Пуассона $\nu = 1/3$, що відповідає коефіцієнту Пуассона для сплаву Д16Т [13].

Вздовж осі абсцис відкладено безрозмірну довжину $h = H/a$, вздовж осі ординат – безрозмірну частоту $\gamma_2 = \omega a / c_2$.

Суцільні лінії зображують вітки, що відповідають симетричній задачі, пунктирні – антисиметричній. Вертикальна пряма показує довжину циліндра, що досліджувався в експерименті.

Основні резонанси циліндра, які отримані при збудженні тонкою суцільною п'єзопластиною, приклеєною на його торці, наведено в Табл. 1. Там же подано результати теоретичних розрахунків. За рахунок приєднаних мас на торцях (п'єзодисків) частоти циліндра понижуються в порівнянні із розрахунковими.

Достатня точність співпадання теоретичних та експериментальних дозволяє більш точно визначати розрахунковим шляхом коефіцієнт Пуассона ізотропних суцільних циліндрів по експериментальному спектру резонансних частот.

N	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_{\text{exp}}, \text{кГц}$	23,84	45,73	66,80	77,34	78,48	81,10	91,3	99,6
$f_{\text{theor}}, \text{кГц}$	24,85	48,11	67,15	80,02	82,8	83,34	91,07	100,57

Таблиця 1 Резонансні частоти коливань суцільного алюмінієвого циліндра із п'єзоелементами на торцях

6. Висновки

Запропоновані методики експериментального та теоретичного дослідження спектра власних частот пружного циліндра скінченної довжини дають результати, що надійно узгоджуються між собою для перших восьми-десяти мод коливань, та дозволяють більш точно визначати модулі пружності матеріалу, з якого виготовлено циліндр.

1. Андрущенко В.А., Бондаренко А.А., Мелешко В.В., Никитенко В.Н. Определение упругих постоянных квадратных пьезокерамических пластин резонансным методом // Акуст. вісник. – 2006. – Т. 9, № 4. – С. 3–11. 2. Барфут Дж., Тейлор Дж. Полярные диэлектрики и их применения. – М., 1981. 3. Бергман Л. Ультразвук. – М., 1957. 4. Брагинский В.Б., Митрофанов В.П., Панов В.И. Системы с малой диссипацией. – М., 1981. 5. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К., 1981. 6. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины // Акуст. журн. – 1978. – Т. 24, Вып. 6. – С. 60-68. 7. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. – М., 1955. 8. Лукьянов Д.П., Корниенко А.А., Рудницкий Б.Е. Оптические адаптивные системы. – М., 1989. 9. Никаноров С.П., Кардашев Б.К. Упругость и дислокационная неупругость кристаллов. – М., 1985. 10. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. – М., 1972. 11. Ультразвуковые преобразователи / Под ред. Е. Кичуци. – М., 1972. 12. Физическая акустика / Под ред. У. Мэсона. Т.1, ч.А. : Методы и приборы ультразвуковых исследований – М., 1959. 13. Физические величины : Справочник / А.П. Бабичев, Н.А. Бабушкина, А.М. Братковский и др.; под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. – М., 1991. 14. Nieves F.J., Gascon F., Bayon A. Measurement of the dynamic elastic constants of short isotropic cylinders // J. Sound Vibr. – 2003. – Vol. 265. – P. 917-933.

Надійшло до редколегії 29.11.2007

УДК 532.5

В. Антонова, доцент, О. Зайцев, канд.фіз.-мат.наук
Email: alex_z_ua@ukr.net

ТРАНСПОРТУВАННЯ ЗАВИХОРЕНОЮ ТЕЧІЄЮ ЧАСТОЧОК ЗАВИСІ У КУТІ

У роботі розглянуто частинна задача про транспортування завихореною течією часточок придонної ілістої або піщаної зависі у куті.

In the article some problem about transportation by a vortex fluid flow of particles of sand or slurry suspension in area of corner.

1 Вступ

Розглядається система, у якій дисперсійним середовищем є газ або рідина, а дисперсією – тверді часточки, концентрація яких є порівняно невеликою. Такі системи відносяться до класу проточних дисперсійних систем і називаються потоками газової зависі твердих часточок. Систематичне дослідження дисперсних потоків розпочато порівняно недавно і пов'язано, в основному, з вимогами різних технологічних процесів, розвитком нової техніки, вдосконаленням ліній пневмотранспорту та газоочистки. Великий інтерес викликає рух рідини чи газу із часточками, які знаходяться у зваженому стані у потоці, у природних умовах (пилі бурі, спеціальні заметілі, повітря з часточками пилу тощо) Таким чином потоки зависей є об'єктом вивчення для технологів, інженерів-геофізиків, метеорологів, гідрологів, сантехніків та лікарів. Інтерес, який проявляється у сучасній науці і техніці до проточних наскрізних дисперсійних систем можна пояснити наступними факторами.

1. Такі системи відрізняються повною проточністю як суцільного так і дисперсійного середовищ. Тому вони дозволяють перейти до неперервних процесів, забезпечити протиток у різноманітних технологічних та теплових процесах; дисперсійні потоки можна використовувати у якості робочого тіла.

2. Потоки з часточками пилу можуть бути наслідком (у ряді випадків – небажаним) реалізації певних пехнологічних процесів. У будь-якому випадку ефективність цих процесів залежить від правильної організації та використання потоків газозависей.

3 За відсутністю обмежень з боку технології можна у певних, але достатньо широких межах, здійснювати ефективне керування властивостями газового потоку шляхом вибору якості і кількості твердих часточок, які спеціально додаються (вводяться) до потоку.

4. Дослідження та вивчення поведінки твердих часточок у потоках має важливе значення для розробки засобів попередження забруднення атмосфери

В останні десятиріччя досягнуто певного прогресу у дослідженні дисперсних потоків. У цей період з'явилися вітчизняні і зарубіжні роботи, які присвячені систематичному і спільному розгляду теоретичних уявлень, які склалися, і накопичених експериментальних даних, аналізу та узагальненню даних, які вже є, та розробці більш правильних фізичних уявлень, а також – методологічних, розрахункових та конструкторських рекомендацій.

Більш докладний розгляд вказаних проблем наведено у [3]. Часточки, які переносяться потоком, за характером їх руху розподіляються на три види [4]:

- донні, які переміщуються перекошуванням;
- придонні (сольтуючі), які переміщуються «стрибками» так, що довжина стрибка в декілька разів перевищує його висоту
- завислі, які рухаються у потоці на порівняно великі відстані у вигляді зависі.

На сьогодні найменш вивченими, з нашого погляду, є другий тип переміщення часточок. До такого типу течій відносяться течії, які розглянуто у роботі [9], де наведено результати експериментальних досліджень та запропонована математична модель для розрахунку руху вагомих часточок. Вивчення дрейфу на основі методики чисельного експерименту складає значні труднощі. Математичні моделі, на яких базується вивчення транспортування вагомих часточок у потоці рідини або газу, відносяться до так званих спряжених задач, коли одночасно необхідно розв'язувати крайову задачу для визначення поля швидкостей носія (гідродинамічна задача) та систему звичайних нелінійних рівнянь руху часточок (механічна задача).

Природно, що у загальній постановці ця задача важко розв'язується з причини нелінійності диференціальних рівнянь та наявності вільних границь.

У роботі зроблено спробу проведення чисельних розрахунків на основі спрощених математичних моделей зі збереженням головних особливостей проблеми – нелінійності та наявності вільних границь.

2. Постановка задачі та основні рівняння

Розглядається рух часточок у придонній області біля негладких утворень донного рельєфу. У цих утвореннях виникають зони, заповнені рідиною, рух якої носить вихровий характер. У певний момент часу придонні часточки починають рухатися через цю зону. В результаті взаємодії, траєкторія руху часточок зазнає змін під впливом руху завихореної рідини. За мету ставиться побудова траєкторій руху часточки з урахуванням впливу рухомого потоку.

Як і раніше [2], будемо застосовувати такі позначення: індексом " *f* " знизу будемо позначати параметри основної течії, а індексом " *p* " знизу — параметри, які відносяться до часточок зависі.

Нехай у деякій внутрішній завихореній області, яка заповнена рухомою рідиною з густиною $\rho_f = const$, починає рухатися сферична частка радіуса a_p , щільність речовини часточки — ρ_p , маса — $m_p = 4/3 \pi \rho_p a_p^3$.

Як показано у роботі [1], за умови $\rho_p/\rho_f > 1$, диференціальні рівняння руху часточки для визначення $x = x(t)$, $y = y(t)$, мають вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = -\frac{3}{4} C_f \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{1}{a_f} \Phi(u_p, v_p, u_f, v_f) (u_p - u_f), \\ \ddot{y}_p = -\frac{3}{4} C_f \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{1}{a_f} \Phi(u_p, v_p, u_f, v_f) (v_p - v_f) - g \left(1 - \frac{\rho_p}{\rho_f}\right). \end{cases} \quad (1)$$

де позначено: $u_p = \frac{dx_p}{dt}$, $v_p = \frac{dy_p}{dt} = \dot{y}_p$, $\dot{x}_p = \frac{d\dot{x}_p}{dt}$, $\dot{y}_p = \frac{d\dot{y}_p}{dt}$, C_f - коефіцієнт опору тертя; g - прискорення

вільного падіння, $\Phi(u_p, v_p, u_f, v_f) = \sqrt{(u_p - u_f)^2 + (v_p - v_f)^2}$. Система має інтегруватися з наступними початковими умовами: у момент часу $t = t_0$ задається початкове положення часточки $x(t_0), y(t_0)$ та величина компонент швидкості вильоту $\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)$:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, & \dot{x}(t_0) = u_0, \\ y(t_0) = y_0, & \dot{y}(t_0) = v_0. \end{cases} \quad (2)$$

У данному випадку до уваги взяті основні сили взаємодії - сила опору та сила ваги. У такому разі задача знаходження траєкторій часточки зводиться до інтегрування системи нелінійних диференціальних рівнянь (1) з початковими умовами (2). Наступні кроки щодо знаходження розв'язку задач залежать від конкретного вигляду функцій u_f та v_f , значення яких має визначатися з розв'язку гідродинамічної задачі.

Через те, що виникають певні складності при розв'язанні таких математичних проблем, зупинимось, як і у [2], на модельних задачах, для яких представлення компонент u_f та v_f вектора швидкості рідини, що рухається, можливі у замкнутому вигляді. В першу чергу це стосується робіт [6 - 8].

3. Внутрішня течія у гострому куті

Розглядається течія, яка утворюється у гострому куті з конфігурацією, що зображена на рис.1. У Внутрішня частина гостого кута θ заповнена завихориною рідиною з інтерсивністю вихорю ω . Захоплення часточок відбувається або з нижньої поверхні кута, або в області потоку, прилеглий до неї.

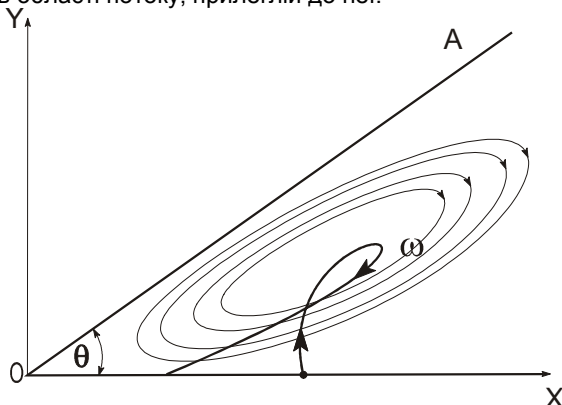


Рис 1

Виберемо початок декартової системи координат (x, y) точки O (рис 1). Одночасно з декартовою системою координат розглядається полярна система (r, θ) , початок якої збігається з початком декартової системи координат.

Для внутрішньої області, що зображена на рис 1, функція току $\psi(r, \theta)$ у полярних координатах буде мати наступний вигляд

$$\psi(r, \theta) = -\frac{\omega r^2}{2\pi} [\sin(2\theta) \ln(r^2) + 2\theta \cos(2\theta) + \pi \sin^2(\theta)], \quad (3)$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$, $x = r \sin \varphi$, $y = r \cos \varphi$. В такому разі компоненти швидкості $u_f = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v_f = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, які входять складовими до виразу (1) з урахуванням визначення функції току (3), можна записати

$$u_f = -\frac{\omega}{\pi} \left(x \ln(x^2 + y^2) - 2y \arctg \frac{y}{x} + x + \pi y \right), \quad v_f = -\frac{\omega}{\pi} \left(y \ln(x^2 + y^2) - 2x \arctg \frac{y}{x} + y \right) \quad (4)$$

Для кутової конфігурації (рис 1), компонентам швидкості потоку можна надати вигляд $u_f = \frac{\omega}{2}(x \operatorname{tg} \theta - 2y)$, $v_f = -\frac{\omega}{2}x \operatorname{tg} \theta$. У роботі [2] викладено наведено процедуру зведення математичної моделі до безрозмірного вигляду. Якщо ввести безрозмірні змінні (\tilde{x}, \tilde{y}) , $x = \tilde{x}L$, $y = \tilde{y}L$, $t = \tilde{t}T$, де через L і T позначено характерні параметри задачі, то після підстановки змінних (\tilde{x}, \tilde{y}) до рівнянь (1) отримуємо систему

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{x}} = -E^* \tilde{\Phi} (\dot{\tilde{x}} - \tilde{u}), \\ \ddot{\tilde{y}} = -E^* \tilde{\Phi} (\dot{\tilde{y}} - \tilde{v}) - G^* \end{cases} \quad (5)$$

яка інтегрується з наступними початковими умовами

$$\begin{cases} x(0) = x_n, \quad \dot{x}(0) = u_n, \\ y(0) = y_n, \quad \dot{y}(0) = v_n. \end{cases} \quad (6)$$

Коефіцієнти E^* , G^* , які входять до правої частини системи рівнянь (5), утворені з характерних масштабів

$$E^* = \frac{3}{4} C_f \frac{\rho_\infty a}{\rho_0 a_0} = \frac{18}{\operatorname{Re}}, \quad G^* = \frac{1}{\operatorname{Fr}} \left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho_0} \right), \quad \tilde{\Phi} = \left[(\dot{\tilde{x}} - \tilde{u})^2 - (\dot{\tilde{y}} - \tilde{v})^2 \right]^{1/2}, \quad \operatorname{Fr} = \frac{L}{gT^2},$$

де через Re та Fr позначено, відповідно, число Рейнольда і число Фруда. Вираз $\frac{1}{\operatorname{Fr}^2} \left(1 - \frac{1}{\tilde{\rho}^2} \right)$, з урахуванням початкового обертання частки на момент захоплення її потоком, легко перетворити до вигляду $\frac{1}{\operatorname{Fr}^2 \omega_0} \frac{1}{\tilde{\rho}} (\tilde{\rho} - 1) \tilde{\omega}^2$, де $\tilde{\omega} = \omega_0 / \omega$ - відношення кутової

швидкості обертання частки до кутової швидкості вихорю. Залежно від вибору характерного масштабу наведена система (5) може описувати або відрив часточки з поверхні дна, якщо за характерний масштаб вибрано a_0 , або унесення часточки від похилої стінки кута, якщо за характерний масштаб вибрано параметри кута. Наведена система (5) з початковими умовами (6) розв'язується чисельно. Як впливає з представлення (5), головними визначальними параметрами задачі є C_f та Fr . У роботі [3] наведені формули, які визначають залежність коефіцієнта тертя часточ-

ки від числа Рейнольда. Так при значеннях $Re_p > 500$, $c_f = 0.44$ (закон Ньютона), а при $Re_p < 2$, $c_f = \frac{24}{Re_p}$ (закон

Симпсона). За більш точне значення коефіцієнта c_f можна вважати значення $c_f = \frac{24}{Re_p} \left(1 + \frac{3}{16} Re_p \right)$

4. Результати

Чисельні розрахунки було виконано у широкому діапазоні визначальних параметрів. Досліджувався вплив основних параметрів задачі при різних початкових умовах, зокрема – при різних значеннях параметрів вертикальної швидкості, за різних кутів вильоту, початкової точки, з якої починається рух часточки та різних значеннях величини кута θ . Частина результатів наведена на рис.2 – рис.5.

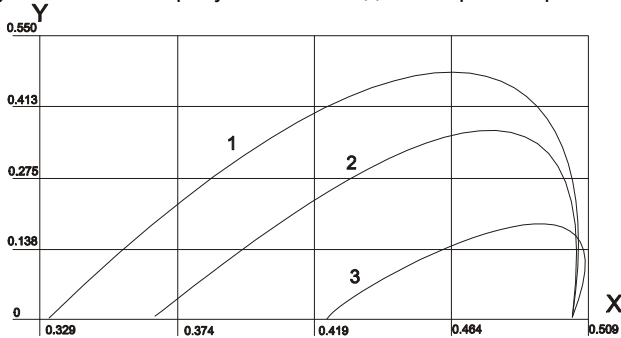


Рис. 2. Траєкторії руху за різних значень вертикальної складової початкової швидкості v_0

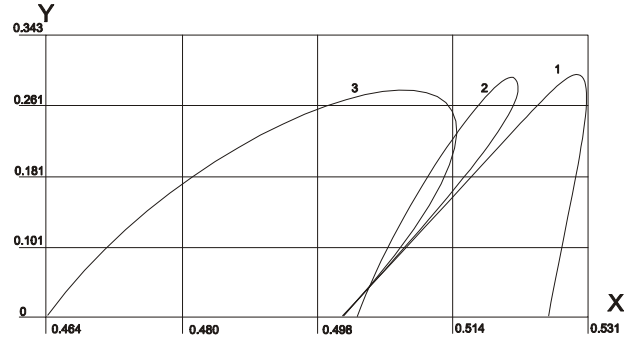


Рис.3. Вплив величини кута θ на форму траєкторії

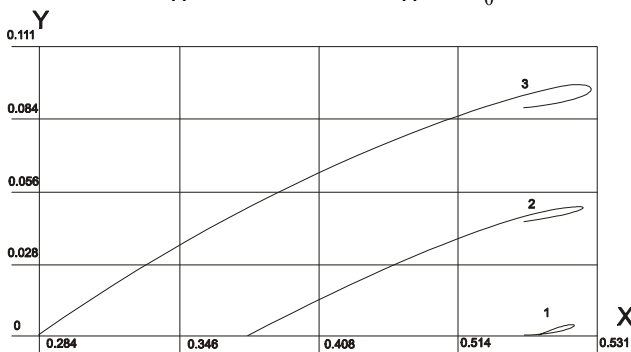


Рис. 4. Траєкторії руху за різних початкових положень $x(t_0), y(t_0)$

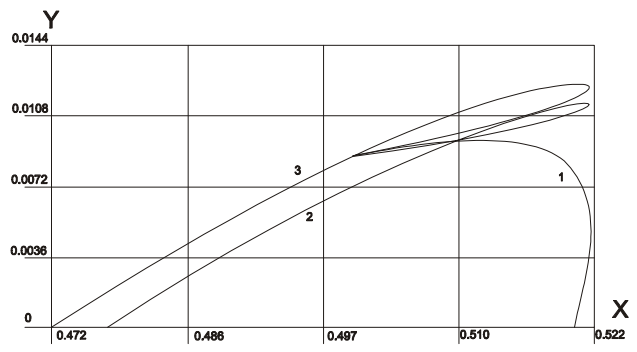


Рис. 5. Траєкторії руху за різних початкових вертикальної складової початкової швидкості v_0 для $x(t_0) = 0.5, y(t_0) = 0.2$

На рис.2 наведено траєкторії руху часточок, які мають різні значення вертикальної складової початкової швидкості при незмінній початковій позиції $x(t_0) = 0.5$. За більших значень v_0 точка падіння на дно ближче до початку кута – крива 1. Значний вплив на траєкторії руху справляє і величина кута θ (рис.3), оскільки часточка, яка потрапляє у потік, взаємодіє з різними областями завихореної течії (30° - крива 3, 45° - крива 2 та 60° – крива 1). Для $\theta = 45^\circ$ траєкторія набуває петлеподібної форми. Такі ж зміни траєкторії можуть відбуватися і для випадку, коли часточка починає рух з різних положень (рис.4 – криві 1, 2 та 3 відповідають значенням $y(t_0)$ 0, 0.05 та 0.1) або з різними значеннями початкової швидкості (рис.5 – криві 1, 2 та 3 відповідають збільшенню значення v_0 за сталого значення u_0) для часточки, яка починає рух з точки у середині потоку.

5. Висновки

Побудована математична модель транспортування часток дає можливість з достатньою точністю отримувати результати у режимі реального часу, що дозволяє використовувати таку модель при розробці різних експертних систем швидкої оцінки, зокрема - екологічного стану на забрудненій території

1 Антонов А.М., Бурковська В.Л., Копистира М.П., Дослідження переміщення вагомих часточок у рухомій рідині., Вісник КУ, Серія фізико-математичні науки, Вип..3, 2000 р. 2 Антонов А.М., Зайцев О.В., Транспортування завихореною течією часточок зависі, Вісник КНУ, серія Математика, Механіка, випуск 15-16, 2006 3 Бусройд Р. Течение газа со взвешенными частицами. Изд. «Мир», М., 1975 с. 378 с. 4 Динамика и термика речных потоков. Изд. «Наука», М., 1972 с.143. 5 Коул Дж.Методы возмущений в прикладной математике, М., «Мир»,1972. 6 Чернышенко С.И. О приближенном способе расчета завихренности в зоне отрыва при вязкости, стремящейся к нулю // МЖГ, N1, 1982 7 Чернышенко С.И., Расчет отрывных течений маловязких жидкостей с помощью модели Бетчелора, Изв. АН СССР, МЖГ 1984 №2 с.39-45 8 Chernyshenko S., Stratfield Sadvovskii flow in a channel, J.Fluid Mech, 1993, vol.250 pp. 423-431 9 Nalpanis Philip, Hunt J.R., Barret C.F., Saltating particles over flat beds, J.Fluid Mech., 1993, vol.251 pp 661-685

УДК 539.3

Л. Мольченко, д-р. фіз.-мат. наук, проф., І. Лоос, канд. фіз.-мат. наук, С. Корнєєв, асп.
Mol_LV@univ.kiev.ua

НЕЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ В МАГНІТНОМУ ПОЛІ

Побудована нелінійна двовимірна модель магнітопружності кільцевої пластини змінної жорсткості. Отримана розв'язувальна система нелінійних диференціальних рівнянь магнітопружності пластини. Наведено числовий приклад.

The two-dimensional nonlinear problem of magnetoelasticity of circular plate is constructed. A resolving system of nonlinear differential equations of magnetoelasticity of circular plate has been obtained. Numerical example is given.

Вступ.

Важливе місце у механіці спряжених полів займають питання вивчення руху суцільного середовища з врахуванням електромагнітних ефектів. Дослідження з механіки зв'язаних полів в тілах, що деформуються, мають як фундаментальний, так і прикладний характер, що надає їм особливу актуальність. Значний розвиток отримали дослідження процесів деформації електропровідних гнучких тіл під дією силових і електромагнітних навантажень.

Нижче розглянемо задачу із цього класу – розрахунок напружено-деформованого стану гнучкої кільцевої пластини змінної жорсткості за двома напрямками, яка знаходиться в нестационарному магнітному полі та під дією нестационарного електромагнітного струму від зовнішнього джерела.

В процесі деформації пластини відбувається зміна форми її поверхні, що приводить до зміни напрямку струму, тобто змінюється електромагнітне поле пластини, виникають вихрові струми, які, взаємодіючи з зовнішнім магнітним полем, приводять до появи пондеромоторних сил Лоренца. Ці сили змінюють стан тіла і його електромагнітне поле. Тому електромагнітні і механічні поля взаємозв'язані і дія їх на пластину визначається з розв'язків системи, яка складається з рівнянь механіки і рівнянь електродинаміки. Зв'язаність полів обумовлена тензором напружень Максвелла та силою Лоренца.

Розв'язувальна система рівнянь, яка описує напружено-деформований стан пластини, визначається нелінійною системою диференціальних рівнянь гіперболо-параболічного типу десятого порядку зі змінними коефіцієнтами і представлена в нормальній формі.

Запропонований нижче підхід до чисельного розв'язання базується на послідовному застосуванні схеми Ньюмака, методу квазілінеаризації, методу прямих та методу дискретної ортогоналізації [3].

При побудові розв'язувальної системи рівнянь магнітопружності пластини віднесемо її серединну площину до полярної системи координат r, θ і скористаємося результатами робіт [1,2,3,4]. За розв'язувальні функції виберемо

зусилля N_r, S і \bar{Q}_r , де $\bar{Q}_r = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta}$, момент M_r , переміщення u, v, w , кут повороту нормалі $\vartheta_r = -\frac{\partial w}{\partial r}$, а

також напруженість електричного поля E_r та індукції магнітного поля B_z . Вибір цих функцій за розв'язувальні дає можливість розглядати широкий клас граничних умов без ускладнення розрахункової схеми. Далі вихідні рівняння [3] будуються відносно першої похідної шуканих функцій за радіальною координатою r .

Як результат отримуємо розв'язувальну систему типу Коші у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1-\nu^2}{Eh} N_r - \frac{\nu}{r} u - \frac{\nu}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\nu}{2r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{2} \vartheta_r^2; \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \nu + \frac{2(1+\nu)}{Eh} S + \frac{1}{r} \vartheta_r \frac{\partial w}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial w}{\partial r} &= -\vartheta_r; \\ & \hspace{15em} (1) \\ \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} &= \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} M_r + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\nu}{r} \vartheta_r; \\ \frac{\partial N_r}{\partial r} &= -\frac{1-\nu}{r} N_r + \frac{Eh}{r^2} \left[u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} - (P_s + \rho F_s^\wedge) + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial S}{\partial r} &= -\frac{\nu}{r} \frac{\partial N_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r} S + \frac{E}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left[u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \\ & \quad - \frac{Eh}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - (P_\theta + \rho F_\theta^\wedge) + \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \bar{Q}_r}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \bar{Q}_r - \frac{Eh^2}{2r^3(1+\nu)} \left[0,5 \frac{\partial h}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{h}{6} \left(\frac{\partial^2 \vartheta_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] - \\ & \quad - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 M_r}{\partial \theta^2} - \frac{Eh}{2r^3} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \right] \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \vartheta_r \right) - \frac{Eh^2}{2r^3} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{Eh^3}{12r^3} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 \vartheta_r}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial N_r}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{E}{r^3} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left[u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \frac{\partial w}{\partial \theta} - \\
 & -\frac{Eh}{r^3} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\nu}{r^2} N_r \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{Eh}{r^3} \left[u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \\
 & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \vartheta_r + S \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} \right) - (P_z + \rho F_z^\wedge) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\
 \frac{\partial M_r}{\partial r} = & -\frac{1-\nu}{r} M_r - \frac{Eh^2}{4r^2(1+\nu)} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{Eh^3}{12r^2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 \vartheta_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \\
 & + \frac{Eh^3}{12r^2} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \vartheta_r \right) + \hat{Q}_r + N_r \vartheta_r - \frac{1}{r} S \frac{\partial w}{\partial \theta}; \\
 \frac{\partial E_\theta}{\partial r} = & -\frac{1}{r} E_\theta - \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \theta} B_z + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \theta} (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \\
 & + \frac{1}{r^2 \sigma \mu} \frac{\partial^2 B_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r \sigma \mu} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{B_\theta^+ - B_\theta^-}{rh}; \\
 \frac{\partial B_z}{\partial r} = & -\sigma \mu E_\theta + \sigma \mu \left[-\frac{\partial u}{\partial t} B_z + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) \right] + \frac{B_r^+ - B_r^-}{h}.
 \end{aligned}$$

Тут: B_z - нормальна складова магнітної індукції; B_r^\pm, B_θ^\pm - відомі складові магнітної індукції на поверхнях пластини; σ - електрична провідність; μ - магнітна проникливість; E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуассона; $h = h(r, \theta)$ - товщина пластини.

Компоненти проекцій сили Лоренца мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \rho F_s^\wedge = & h J_{\theta CT} B_z + \sigma h \left\{ E_\theta B_z + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) B_z - \frac{\partial u}{\partial t} B_z^2 - \right. \\
 & - \frac{\partial u}{\partial t} \left[0,25 (B_\theta^+ + B_\theta^-)^2 + \frac{1}{12} (B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 \right] + \frac{\partial v}{\partial t} \left[0,25 (B_r^+ + B_r^-) (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{12} (B_r^+ - B_r^-) (B_\theta^+ - B_\theta^-) \right] \right\}; \\
 \rho F_\theta^\wedge = & -h J_{r CT} B_z + \sigma h \left\{ -E_r B_z + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) B_z - \frac{\partial v}{\partial t} B_z^2 + \right. \\
 & + \frac{\partial u}{\partial t} \left[0,25 (B_r^+ + B_r^-) (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \frac{1}{12} (B_r^+ - B_r^-) (B_\theta^+ - B_\theta^-) \right] - \frac{\partial v}{\partial t} \left[0,25 (B_\theta^+ + B_\theta^-)^2 + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{12} (B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 \right] \right\}; \\
 \rho F_z^\wedge = & 0,5 h \left[J_{r CT} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - J_{\theta CT} (B_r^+ + B_r^-) \right] + 0,5 \sigma h \left[E_r (B_\theta^+ + B_\theta^-) - E_\theta (B_r^+ + B_r^-) + \right. \\
 & + \frac{\partial u}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) B_z + \frac{\partial v}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) B_z \left. \right] - 0,25 \sigma h \frac{\partial w}{\partial t} \left[(B_\theta^+ + B_\theta^-)^2 + (B_r^+ + B_r^-)^2 \right] - \\
 & - \frac{\sigma h}{12} \frac{\partial w}{\partial t} \left[(B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 + (B_r^+ - B_r^-)^2 \right].
 \end{aligned} \tag{2}$$

Тут: $J_{r CT}, J_{\theta CT}$ - складові густини електричного струму від зовнішнього джерела.

Для визначення сталих у загальному розв'язку системи (1) необхідно задати початкові умови та по п'ять граничних умов на торцях пластини $r = r_0$ і $r = r_N$, які обмежують пластину. Для функцій, які характеризують механічну частину задачі, граничні умови задаються як у звичайній теорії пластин. Для електромагнітної групи рівнянь можуть задаватись значення для індукції магнітного поля; для напружень електричного поля або їх комбінація.

Для знаходження розв'язків крайової задачі використовується методика викладена в роботі [3]. Використовуючи запропоновану методику, дослідимо напружений стан кільцевої алюмінієвої пластини змінної жорсткості, яка знаходиться під дією сталого магнітного поля $\vec{B} = (B_{r0}, B_{\theta0}, B_{z0})$ і нормальної складової механічної сили P_z .

Нехай товщина пластини змінюється за законом

$$h = h_0 \left(1 + 0,1 \cos \theta\right) \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r}{r_N}\right).$$

Параметри пластини і матеріала вибираємо наступні:

$$h_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; r_0 = 0,49 \text{ м}; r_N = 0,86 \text{ м}; E = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \nu = 0,34; \sigma = 3,63 \cdot 10^7 \text{ (Омм)}^{-1}; \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м};$$

$$\omega = 3,1416 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}; \rho = 2670 \text{ кг/м}^3; B_i^{\pm} = 0,1 \text{ Т}; P_z = 10 \text{ Н/м}^2.$$

Граничні умови задаємо у вигляді:

$$u = v = 0, M_r = 0; \hat{Q}_r = 0, B_z = 0,5 \sin \omega t, \quad \text{при} \quad r = r_0;$$

$$u = v = w = 0, M_r = 0, B_z = 0, \quad \text{при} \quad r = r_N;$$

Початкові умови:

$$\vec{N}(r, \theta, t)|_{t=0} = 0; \dot{\vec{N}}(r, \theta, t)|_{t=0} = 0,$$

$$\text{де } \vec{N} = \{u, v, w, \vartheta_r, N_r, S, \hat{Q}_r, M_r, E_\theta, B_z\}^T.$$

Розв'язки задачі визначались на інтервалі часу $t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$, шаг інтегрування за часом вибирався рівним $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}$. В силу симетрії по θ граничних умов та параметрів пластини, задача розв'язувалась на інтервалі $[0, \pi]$.

При розв'язанні нелінійних задач магнітопружності на першому кроці за часом за початкове наближення в ітераційному процесі розв'язується стаціонарна лінеаризована крайова задача. На наступних кроках – за початковий вибирається розв'язок, отриманий на попередньому кроці, що є розв'язком уже нелінійної крайової задачі. Вибір такої системи істотно зменшує кількість ітерацій, необхідних для розв'язання задачі.

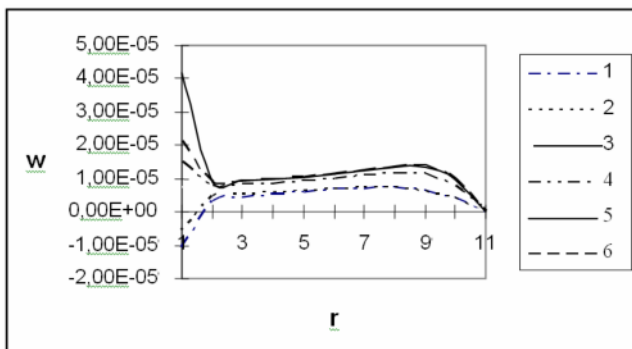


Рис.1. Лінійний розподіл $w(r, \theta)$

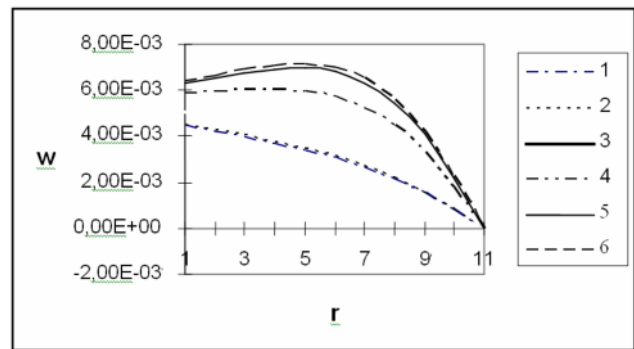


Рис.2. Нелінійний розподіл $w(r, \theta)$

На рис. 1 та рис. 2 показано розподіл прогину $w(r, \theta)$ у відповідні моменти часу. На рисунках крок по осі абсцис $\Delta r = 0,037 \text{ м}$; лінія 1 - відповідає значенню кута $\theta = 0$; лінія 2 - $\theta = \pi/10$; лінія 3 - $\theta = 2\pi/5$; лінія 4 - $\theta = 7\pi/10$; лінія 5 - $\theta = 9\pi/10$; лінія 6 - $\theta = \pi$.

На рис. 1 наведено розподіл $w(r, \theta)$ для лінеаризованої стаціонарної задачі при $t = 0$ та при дії на пластину магнітної індукції $B_i^{\pm} = 0,1 \text{ Т}$, визначеної із розв'язання зовнішньої стаціонарної задачі магнітопружності.

На рис. 2 наведено розв'язок нелінійної крайової задачі для прогину $w(r, \theta)$ в момент часу $t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$ при дії зовнішньої магнітної індукції $B_i^{\pm} = 0,1 \text{ Т}$. Цей розв'язок отриманий з шостої ітерації.

Висновки.

Наведені результати дозволяють оцінити напружено-деформований стан гнучкої кільцевої пластини, яка знаходиться в магнітному полі. Отримані результати підтверджують гіпотези магнітопружності, які використані при побудові нелінійної системи магнітопружності оболонки, і говорять про можливість застосування використаної методики для розв'язання такого класу задач.

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнітоупругость тонких оболочек и пластин. - М., 1977. 2. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основы теории пластин та оболонок. -К.: Либідь, 1993. - 231 с. 3. Molchenko L.V. A method for solving two-dimensional nonlinear boundary-value problems of magnetoelasticity for thin shells // Int. Appl. Mech. -2005. -41, № 5. -Р. 490-495. 4. Улітко А.Т., Мольченко Л.В., Ковальчук В.Ф. Магнітопружність при динамічному навантаженні. - К., 1994.

УДК 519.63

В. Наквасюк, студ.
djtheme@univ.kiev.ua

ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОПЕРЕНОСУ З РОЗРИВНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ

Запропоновано узагальнений підхід до постановки задачі електропереносу з розривним розв'язком. Показано ефективність та зручність для чисельного розв'язання такого узагальнення.

V. Nakvasyuk . Charge transfer problems with discontinuous solutions. General problems statement of charge transfer with discontinuous solutions proposed. Effectiveness and convenience for numerical solution is demonstrated.

1. Вступ.

Розриви розподілених характеристик полів (температури, концентрації, електричного потенціалу, тиску й ін.) у математичних описах різноманітних фізичних процесів можуть бути обумовлені різними причинами. Найпоширеніший варіант розривного розв'язку виникає при побудові математичних моделей процесів переносу в шарувато-неоднорідних середовищах, що мають на межі контакту середовищ тонкий (у порівнянні з характерними геометричними розмірами середовищ) слабо проникний прошарок. При чисельному розв'язанні такого роду контактних задач врахування в області розв'язку тонких прошарків вимагає невиправданого подрібнення сітки, тому зазвичай в таких випадках будується спрощена модель прошарку, використання якої дозволяє виключити цей прошарок з області розв'язку диференціальної задачі. Наявність у класичній постановці задач тепло-, масо- і електропереносу умов спряження розв'язку на межі контакту шарувато-неоднорідних середовищ вимагає при чисельному розв'язанні апроксимації нормальних компонент векторів питомих потоків субстанції, що викликає певні труднощі при побудові й реалізації обчислювальних алгоритмів. З цього погляду доцільно переформулювати класичні постановки відповідних задач так, щоб однаковим чином описати процеси переносу у всій багатозаровій системі в цілому, виключивши при цьому умови спряження як атрибут математичної постановки задачі. Дана робота присвячена побудові узагальненої моделі для задачі електропереносу з розривним розв'язком.

2. Моделі розривного розв'язку.

Для побудови моделей прошарку, як правило, використовується гіпотеза про квазіодноримірний характер протікання процесу переносу субстанції через прошарок. Характерним прикладом моделі прошарку є задача розрахунку скалярного потенціалу φ електромагнітного поля в системі «анод - дугова плазма». На межі між металевим анодом і плазмою електричної дуги існує тонкий прианодний прошарок, у якому, відповідно до узагальненого закону Ома, електричний струм може бути направлений проти вектора напруженості електричного поля [4].

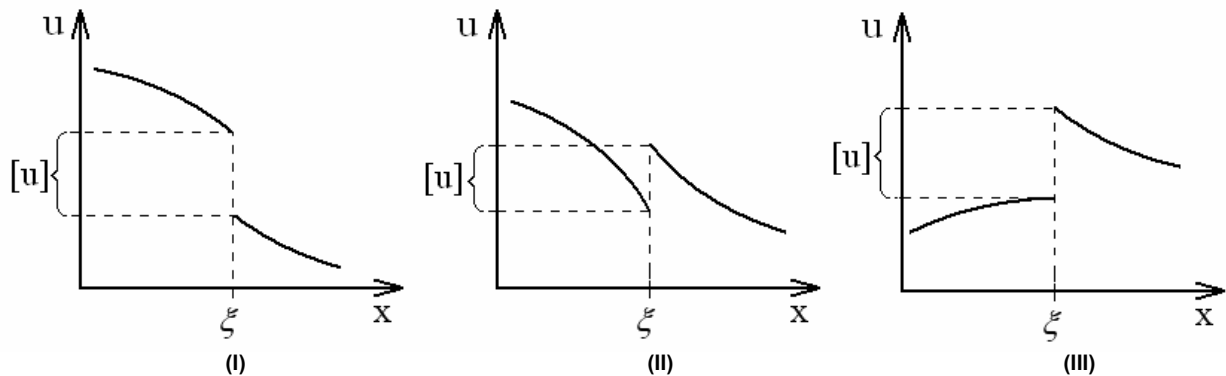


Рис. 1. Схеми розриву розв'язку в точці $x = \xi$ (I - прямий стрибок; II - зворотний стрибок; III - комбінований стрибок).

В [1] запропоновано спрощену модель прианодного прошарку, відповідно до якої стрибок $[\varphi]_{\Gamma}$ (тут і далі стрибок функції $f(\bar{x})$ на межі Γ позначається через $[f]_{\Gamma}$) потенціалу електричного поля в цьому прошарку нелінійно залежить від величини нормальної до межі анода компоненти $j_n|_{\Gamma}$ вектора щільності електричного струму $\vec{j} = -\sigma \text{grad} \varphi$, де σ - питома електрична провідність, тобто

$$[\varphi]_{\Gamma} = G(j_n|_{\Gamma}). \tag{1}$$

При цьому припускається, що $j_n|_{\Gamma}$ є неперервним на межі Γ контакту анода із плазмою. Модель анодного шару (1) робить задачу розрахунку потенціалу φ нелінійною, і приводить до так званого зворотного стрибка, одновимірний варіант якого схематично зображено на Рис. 1 (II). Між знаками $[\varphi]_{\Gamma}$ й $(\text{grad} \varphi)_n|_{\Gamma}$ у цьому випадку виконується наступне співвідношення: $\text{sign}[\varphi]_{\Gamma} = -\text{sign}(\text{grad} \varphi)_n|_{\Gamma}$, що й виправдовує назву «зворотний стрибок».

Варто також зазначити, що у випадку задач для рівнянь з частинними похідними з розривними розв'язками можливі також і інші види стрибка: прямий стрибок (Рис. 1 (I)), такий стрибок виникає, наприклад, у задачі про неідеальний контакт двох теплопровідних тіл; ще один приклад стрибка розв'язку, назовемо його комбінованим (Рис. 1 (III)), дає, наприклад, задача розподільної дифузії, що виникає при описі сегрегації розчинних включень у процесі кристалізації сплавів.

3. Узагальнені постановки задач з розривними розв'язками.

Нехай R_n - n -вимірний евклідів простір, $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - декартові координати, $\Omega \subset R_n$ - область розв'язку задачі, яку не обмежуючи загальності можемо вважати двошаровою: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, через Γ позначимо межу розділу підобластей Ω_1, Ω_2 . Всім ідентифікаторам змінних, що стосуються підобластей Ω_1, Ω_2 , присвоїмо індекси 1 і 2 відповідно. Позначимо через $u(\bar{x})$ шуканий розв'язок задачі, а через $\vec{q}(\bar{x})$ - питомий потік субстанції. Будемо вважати функцію $u(\bar{x})$ досить гладкою всюди в Ω , за винятком можливо межі Γ , на якій вона має стрибок $[u(\bar{x})]_\Gamma$, при цьому припускається, що $[u(\bar{x})]_\Gamma$ як функція координат межі Γ є неперервною. У кожній з підобластей Ω_1, Ω_2 визначимо питомий потік у такий спосіб $\vec{q}_m = -k_m \text{grad } u_m$, $m = 1, 2$, вважаючи при цьому, що оператор grad визначений у класичному розумінні як функція точки $\bar{x} \in \Omega_1, \Omega_2$. Коефіцієнти $k_m(\bar{x})$, $m = 1, 2$, також вважаємо досить гладкими й такими, що $k_m(\bar{x}) \geq C > 0$. Нехай у кожній з підобластей Ω_m функції $u_m(\bar{x})$ (потенціал електричного поля) задовольняють рівнянням

$$\text{div}(k_m \text{grad } u_m) = f_m(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega_m, \quad m = 1, 2. \quad (2)$$

На межі Γ покладемо неперервність нормальної до Γ компоненти вектора питомого потоку, тобто

$$q_{1n} \Big|_{\Gamma_+} = q_{2n} \Big|_{\Gamma_-}. \quad (3)$$

У лінійній постановці задачі для розрахунку потенціалу електричного поля на відміну від (1) будемо вважати, що на межі Γ задана різниця потенціалів $[u]_\Gamma$ як функція координат межі Γ

$$[u]_\Gamma = g(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Gamma. \quad (4)$$

На зовнішній границі $\partial\Omega$ області Ω будемо вимагати виконання деяких граничних умов, конкретний вид яких для подальшого викладу не має значення; при цьому передбачається, що розв'язок задачі в класичній постановці існує і єдиний.

Введемо у Ω функції $u(\bar{x})$, $\vec{q}(\bar{x})$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $k(\bar{x})$, які існують у Ω як функції точки всюди, за винятком межі Γ , у та-

кий спосіб: $\psi(\bar{x}) = \psi_m(\bar{x})$, $\bar{x} \in \Omega_m$, де $\psi(\bar{x})$ - одна з перерахованих вище функцій. Узагальнені частинні похідні $\frac{D}{Dx_i}$

функції $u(\bar{x})$ в області Ω визначаються в такий спосіб [5]:

$$\frac{Du}{Dx_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + [u]_\Gamma^{(i)} \gamma_i \delta(\Gamma), \quad \bar{x} \in \Omega, \quad (5)$$

де $[u]_\Gamma^{(i)}$ - стрибок розв'язку функції $u(\bar{x})$ у напрямку осі Ox_i (надалі будемо вважати $[u]_\Gamma^{(i)} = [u]_\Gamma$, $i = \overline{1, n}$), $\gamma_i = \cos(\vec{n}, \vec{x}_i)$ - напрямні косинуси нормалі до Γ , $\delta(\Gamma)$ - δ функція Дірака, зосереджена на гіперповерхні Γ $(n-1)$ -го виміру. Користуючись (5), уведемо в Ω узагальнений градієнт $GRAD_-$ розривної функції $u(\bar{x})$

$$GRAD_- u = \text{grad } u + \vec{n} [u]_\Gamma \delta(\Gamma). \quad (6)$$

Так як $-k \text{grad } u = \vec{q}(\bar{x})$, то з (6) випливає

$$GRAD_- u = -\rho \vec{q} + \vec{n} [u]_\Gamma \delta(\Gamma), \quad (7)$$

де $\rho(\bar{x}) = k^{-1}(\bar{x})$ має сенс питомого опору середовища.

Отже, узагальнені рівняння в лінійній постановці, що описують розподіл потенціалу електричного поля у двошаровому середовищі «анод - дугова плазма», можна записати у вигляді

$$\begin{cases} -DIV \vec{q} = f, \\ GRAD_- u = -\rho \vec{q} + \vec{n} [u]_\Gamma \delta(\Gamma), \end{cases} \quad (8)$$

використовуючи при цьому як узагальнений закон Ома вираз (7). Під узагальненим розв'язком системи рівнянь (8) будемо розуміти вектор щільності струму $\vec{q}(\bar{x})$ та скалярний потенціал електромагнітного поля $u(\bar{x})$, які задовольняють в сенсі теорії узагальнених функцій рівнянням (8) і граничним умовам, заданим на $\partial\Omega$. Вважається, що $[u]_\Gamma$, як функція координат межі Γ , є неперервною на Γ . При розв'язуванні реальних задач електропереносу в системі «анод - дугова плазма» потрібно враховувати нелінійну залежність (1) стрибка потенціалу від щільності струму. Ітераційний процес по нелінійності передбачає на кожній ітерації розв'язання лінійних рівнянь виду (8).

4. Однорідні різницеві схеми на узагальнених розв'язках.

У цьому розділі ми обмежимося побудовою різницевої схеми для досить простої одновимірної тестової задачі, однак основні підходи до розробки методів чисельного розв'язку переносяться також і на випадок більш складних багатовимірних задач. Для оцінки фактичної точності такої схеми розглянемо характерну тестову задачу, що має точний розв'язок.

Розглянемо одновимірний варіант узагальненої постановки (8) задачі про розподіл потенціалу u електричного поля в системі «анод - дугова плазма»

$$-\frac{dq}{dx} = 0; \frac{D_- u}{Dx} = -\rho q + [u]_{\xi} \delta(x - \xi), \quad 0 < x < l; \quad u(0) = 0, \quad u(l) = u_0, \quad (9)$$

де $\frac{D_- u}{Dx}$ - узагальнена похідна, q - щільність струму, u - потенціал електричного поля, $\rho = \rho(x)$ - питомий електричний опір середовища, $\xi \in (0, l)$ - положення межі розділу метал - плазма, $[u]_{\xi}$ - стрибок потенціалу на цій межі (анодний бар'єр). У випадку $\rho(x) = \rho_1 = \text{const}, 0 < x < \xi, \rho(x) = \rho_2 = \text{const}, \xi < x < l$ задача (9) має простий аналітичний розв'язок:

$$u(x) = \begin{cases} -q\rho_1 x, & 0 < x < \xi, \\ -q(\rho_1 \xi + \rho_2(x - \xi)) + [u]_{\xi}, & \xi < x < l, \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{де } q = \frac{[u]_{\xi} - u_0}{\rho_1 \xi + \rho_2(l - \xi)}.$$

На відрізку $[0, 1]$ введемо сітку $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, N, Nh = 1\}$. Інтегруючи перше з рівнянь (9) на відрізку $[x_i - 0.5h, x_i + 0.5h]$, отримаємо сітковий аналог закону збереження у вигляді

$$\frac{q(x_i + 0.5h) - q(x_i - 0.5h)}{h} = 0. \quad (11)$$

З другого рівняння випливають наближені рівності

$$q(x_i + 0.5h) \approx -a_{i+\frac{1}{2}} \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} + a_{i+\frac{1}{2}} \frac{[u]_{\xi}}{h} \beta_i, \quad (12)$$

$$\text{де } a_{i+\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho(x) dx \right]^{-1}, \quad \beta_i = 1 \text{ якщо } \xi \in (x_i, x_{i+1}), \quad \beta_i = 0 \text{ якщо } \xi \notin (x_i, x_{i+1}).$$

З (11), (12) і граничних умов отримаємо різницеву схему

$$\frac{1}{h} \left[a_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] = \varphi_i, \quad i = \overline{1, N-1}; \quad y_0 = 0, y_N = 0. \quad (13)$$

Нехай $x_m < \xi < x_{m+1}$, тоді права частина сіткового рівняння (13) обчислюється в такий спосіб: $\varphi_i = 0$ якщо $i \neq m, m+1, \varphi_m = \phi_m, \varphi_{m+1} = -\phi_m$, де $\phi_m = a_{m+\frac{1}{2}} \frac{[u]_{\xi}}{h^2}$.

На Рис. 2 порівнюється аналітичний й чисельний розв'язок одновимірної задачі (9) при заданій величині стрибка електричного потенціалу на межі метал - плазма $[u]_{\xi} = 2 \text{ V}$ та наступних значеннях параметрів задачі:

$$\rho_1 = 0,0025 \Omega \cdot \text{cm}, \quad \rho_2 = 0,0333 \Omega \cdot \text{cm}, \quad u_0 = -5 \text{ V}, \quad l = 1 \text{ cm}, \quad \xi = 0.5 \text{ cm}.$$

Нехай $u_i^{(h)} = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x) dx$ - проекція

розв'язку диференціальної задачі на сітку, $z_i = y_i - u_i^{(h)}$ - похибка чисельного розв'язку. Можна показати, що в визначеному вище класі коефіцієнтів має місце нерівність $\|z\|_C \leq Mh$, де $M = \text{const}$. Отже, різницева схема (13) рівномірно сходиться на узагальненому розв'язку задачі (9) і має перший порядок точності. Для доведення цієї нерівності похибка апроксимації оцінюється в слабкій суматорній метриці [3], залучення якої пов'язане з тим, що локальна похибка апроксимації в околі розриву розв'язку становить $O\left(\frac{1}{h}\right)$. Наведена вище оцінка точності різницевої схеми

утворюється з урахуванням того, що кількість точок сітки з аномальною похибкою апроксимації залишається кінцевою при $h \rightarrow 0$. У випадку $f(x) \equiv 0$ різницева схема (13) у класі кусково-сталих коефіцієнтів є точною. У загальному випадку $\rho(x) \in W_2^{-1}(0,1), f(x) \in L_2(0,1), u(x) \in L_2(0,1), q(x) \in W_2^1(0,1)$ вдається довести лише збіжність різницевої схеми (без встановлення порядку точності).

На Рис. 2 також представлено чисельний розв'язок задачі (9) з урахуванням нелінійної залежності (1) стрибка потенціалу від щільності електричного струму q , функціональний вид якої наведений в [1], а використовувані чисельні значення показані на Рис. 4.

Розв'язок нелінійної сіткової задачі було отримано методом ітерацій, при цьому на кожному кроці ітераційного процесу розв'язувалась лінійна задача (13).

При чисельному моделюванні фізичних процесів, що протікають, наприклад, в умовах дугового зварювання металів, задача про розподіл потенціалу в системі «анод - дугова плазма» стає багатомірною і вимагає врахування складної геометрії межі розділу провідних середовищ. Зокрема, моделювання процесу електропереносу в системі «електродний дріт - плазма електричної дуги» при зварюванні електродом, що плавиться, може бути проведене на основі рівнянь (8), які у випадку осьової симетрії задачі можуть бути записані в циліндричній системі координат, по-

казаної на Рис. 3 (при записі першого рівняння (8) ураховується, що $f \equiv 0$). На цьому ж рисунку відображені використовувані граничні умови.

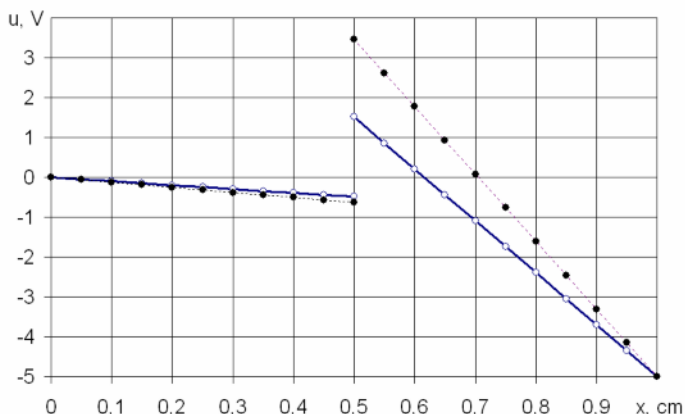


Рис. 2. Розподіл потенціалу в системі «анод - дугова плазма» (суцільна лінія - точний розв'язок лінійної задачі, \circ - чисельний розв'язок лінійної задачі; \bullet - чисельний розв'язок нелінійної задачі).

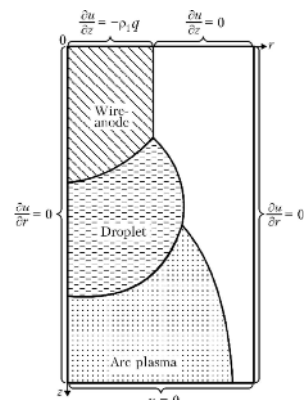


Рис. 3. Схематичне зображення системи «електродний дріт - крапля - плазма електричної дуги» при зварюванні електродом, що плавиться.

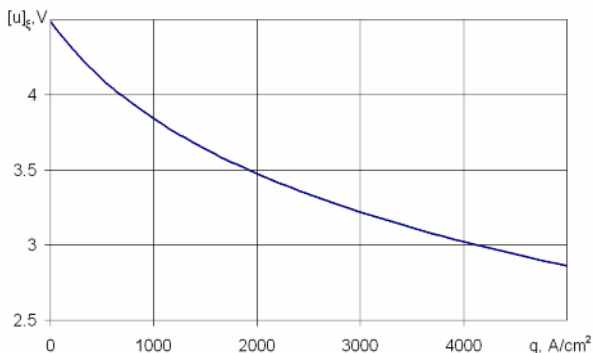


Рис. 4. Залежність анодного падіння потенціалу від щільності електричного струму.

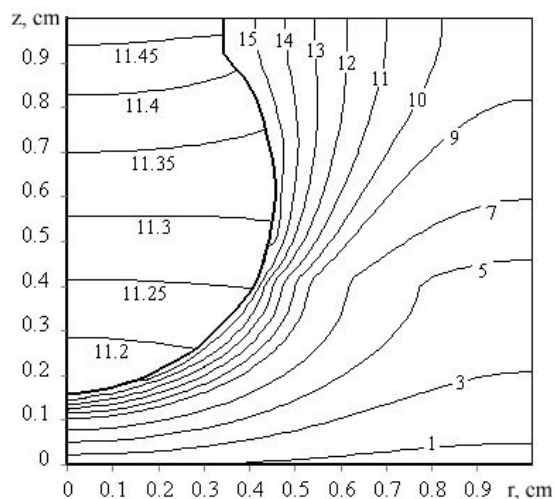


Рис. 5. Поле потенціалу в системі «електродний дріт - крапля - плазма електричної дуги» при зварюванні електродом, що плавиться.

Результати чисельного розв'язання двовимірної задачі про розподіл потенціалу в розглянутій системі з урахуванням нелінійної залежності анодного падіння від щільності струму на аноді (див. Рис. 4) проілюстровані на Рис. 5 у вигляді ізоліній потенціалу електричного поля.

5. Висновки та завдання подальших досліджень.

Запропонована в даній статті узагальнена задача електропереносу в шарувато-неоднорідному середовищі з розривним розв'язком базується на природному з фізичної точки зору описі процесів переносу субстанції за допомогою системи рівнянь першого порядку, одне з яких (скалярне) являє собою закон збереження субстанції, а друге (векторне) - узагальнений феноменологічний закон Ома. Феноменологічний закон, записаний для розривного потенціалу в термінах питомих опорів, враховує на межі розділу середовищ наявність зосереджених факторів (наприклад, зосередженого опору). Саме такий опис дозволяє істотно розширити клас допустимих вхідних даних задач електропереносу, і, відповідно, клас допустимих рішень.

Відмінною рисою запропонованої узагальненої постановки є наскрізний (однорідний) опис процесів переносу у всій багатoshаровій системі в цілому, без використання в явному вигляді умов сполучення на межі розриву розв'язку. Завдяки цьому вдається будувати однорідні обчислювальні алгоритми чисельного розв'язку (методом кінцевих різниць або методом кінцевих елементів). Точність різницьових схем наскрізного рахунку, побудованих на цій основі перевірено на характерній тестовій задачі, що має точний розв'язок.

1. Кривцун И. В. Модель испарения металла при дуговой, лазерной и лазерно-дуговой сварке // Автоматическая сварка. – 2001. – № 3. – С. 2-9.
 2. Номировский Д. А. Обобщенная разрешимость параболических систем с неоднородными условиями сопряжения типа неидеального контакта // Дифференц. ур-ния. 2004. Т. 40. № 10. С. 1390–1399. 3. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М., 1977. 4. Dinulescu, H. A. & Pfender, E. Analysis of the anode boundary layer of high intensity arcs. // Appl. Phys. – 1980. – № 51. – P. 3149-3157. 5. Schwartz, L. Théorie des distributions. – Paris, 1950. – Т.

УДК 539.3

О. П'ятецька, канд. фіз.-мат. наук
E-mail: pyatetska@univ.kiev.ua

ВПЛИВ ТЕПЛОВИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ЕФЕКТИВНІСТЬ АКТИВНОГО ДЕМПФІРУВАННЯ КОЛИВАНЬ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ З ЖОРСТКИМ ЗАКРІПЛЕННЯМ ТОРЦІВ

У даній роботі досліджується вплив теплових граничних умов на ефективність активного демпфірування вимушених коливань круглої пластини з жорстким закріпленням торців. З використанням класичних варіаційних методів одержано формули для амплітуди коливань пластини та різниці потенціалів, що підводиться до актуатора для компенсації рівномірного поверхневого тиску.

The influence of temperature boundary conditions on efficiency of active damping of forced vibrations of circular plate is investigated. Applying the classical variation methods, the simple formulas for the amplitude of this plate and the difference of potentials of actuator to compensate for harmonic surface pressure is obtained.

1. Вступ.

У сучасній техніці для обмеження амплітуд вимушених коливань тонкостінних елементів конструкцій ефективно використовуються активні методи, коли в структуру пасивного (без п'єзо ефекту) тонкостінного елемента з металічного, полімерного чи композитного матеріалу вводяться п'єзоактивні включення. Одні з них виконують функції сенсора, що дають інформацію про механічний стан елемента, а інші – функції так званих актуаторів. Існує два основних методи активного демпфірування стаціонарних і нестаціонарних коливань тонкостінних елементів. Один із них полягає у сумісному використанні сенсорів та актуаторів. При цьому до актуатора підводиться різниця потенціалів, пропорційна першій похідній від різниці потенціалів сенсора або струму. Тоді змінюються дисипативні характеристики тонкої пластини, в результаті чого зменшується амплітуда коливань. Керуючи амплітудою та фазою електричного збудження, можна підсилювати або зменшувати амплітуду механічних коливань найбільш енергоємних мод. Одним із важливих факторів, який може суттєво вплинути на ефективність демпфірування механічних коливань тонкостінного елемента, являються температурні ефекти. Зміна температури може бути обумовлена взаємодією елемента із зовнішнім середовищем і дисипативним розігрівом через внутрішні втрати в матеріалах. Слід зауважити, що тонкостінні елементи із полімерних матеріалів та композити на їх основі, дуже чутливі до зміни температури. Важливість впливу температури пов'язана з тим, що при досягненні температурою точки Кюрі п'єзоматеріал втрачає своє функціональне призначення, так що сенсор не дає інформацію про механічний стан пластини, а актуатор не може компенсувати механічне навантаження за допомогою підведеної до нього різниці потенціалів.

У даній статті розглядається задача про активне демпфірування вимушених гармонічних резонансних коливань суцільної круглої в'язкопружної пластини з жорстким закріпленням торців. Розв'язок задачі одержано варіаційним методом. На основі аналізу результатів розв'язку конкретної задачі досліджено вплив теплових граничних умов на ефективність активного демпфірування коливань за допомогою розподілених сенсорів та актуаторів.

2. Постановка задачі.

Загальна теорія активного демпфірування вимушених коливань тонких пластин за допомогою сумісного використання п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів подана в статті [3]. Пасивний шар вважаємо орто-тропним металічним, полімерним або композитним, а п'єзоактивні – трансверсально-ізотропними і полярно-зованими по товщині пластини. Деформації та кути повороту вважаються настільки малими, що кінематичні співвідношення між деформаціями і переміщеннями – лінійні. При цьому лійними є й рівняння руху. Приймаються ті ж позначення та гіпотези, що й в [1].

Обмежимося випадком згинних коливань круглої пластини, що складається з пасивного середнього шару товщиною h_0 , і верхнього та нижнього протилежно поляризованих п'єзоактивних шарів однакової товщини h_1 . Властивості цих п'єзошарів відрізняються тільки знаками п'єзоконстанти. На пластину діє рівномірно розподілений поверхневий тиск, який змінюється з часом за гармонічним законом. Матеріал пластини вважається в'язкопружним з комплексними характеристиками, які залежать від температури.

Термомеханічна поведінка пластини описується такою нелінійною системою диференціальних рівнянь в полярній системі координат:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} \left[D \left(\rho \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \nu \frac{dw}{d\rho} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[D \left(\nu \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \right] - (\tilde{\rho} h) a^4 \omega^2 w + a^4 p_0(\rho) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 T}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dT}{d\rho} - \frac{2\alpha a^2}{\lambda h} (T - T_C) + \frac{\omega E^*(T) h^3}{24 a^2 (1 - \nu^2) (\lambda h)} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 w^*}{d\rho^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw^*}{d\rho} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw^*}{d\rho} \frac{d^2 w^*}{d\rho^2} \right) \right] = 0. \quad (2)$$

Тут w - поперечний прогин, $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ - згинна жорсткість, γ - густина матеріалу, ω - частота коливань, E, ν - комплексний модуль та коефіцієнт Пуасона, T - температура дисипативного розігріву, α - коефіцієнт теплообміну із зовнішнім середовищем з температурою T_C , λ - коефіцієнт теплопровідності, a - радіус пластини.

Нехай контур пластини жорстко закріплений, а температура на ньому дорівнює T_C . Тоді механічні й теплові граничні умови матимуть вигляд:

$$w = 0, \quad \frac{d w}{d \rho} = 0 \quad (\rho = 1), \quad (3)$$

$$T = T_C. \quad (4)$$

Будемо вважати, що нанесені на сенсор нескінченно тонкі електроди розімкнуті. Тоді різниця потенціалів, яку покаже сенсор при коливаннях пластини, матиме вигляд:

$$V_S = - \frac{h_1 (h_0 + h_1) \int_0^{\rho_1} \frac{d_{31}}{S_{11}(1-\nu)} \left(\frac{d^2 w}{d \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d w}{d \rho} \right) \rho d \rho}{2 \int_0^{\rho_1} \varepsilon_{33} (1 - k_p^2) \rho d \rho}. \quad (5)$$

Тут використані позначення монографії [2].

3. Аналітичний розв'язок задачі.

Для розв'язку системи (1)-(2) можна використати варіаційні методи, задавши відповідні вирази для прогину і для температури з деякими невідомими параметрами, для яких шляхом мінімізації функціоналів знаходяться нелінійні алгебраїчні рівняння.

Так, при коливаннях круглої пластини на першій резонансній частоті вираз для прогину вибираємо у стандартному для такої пластини вигляді:

$$w = A (1 - \rho^2)^2. \quad (6)$$

Тоді температурне поле дисипативного розігріву знаходиться з такого рівняння:

$$\frac{d^2 T}{d \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d T}{d \rho} - \frac{2 \alpha a^2}{(\lambda h)} (T - T_C) + \frac{4 \omega h^2 |A|^2}{3(1-\nu) a^2 \lambda} (G_0'' - G_1'' T) f(\rho) = 0. \quad (7)$$

Тут

$$f(\rho) = (2 + 2\nu) - (8 + 8\nu) \rho^2 + (10 + 6\nu) \rho^4. \quad (8)$$

До нього слід додати граничні умови (4).

Розв'язок такої крайової задачі зводиться до мінімізації функціоналу:

$$F = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{d \theta}{d \rho} \right)^2 + \Psi_2(\rho) \theta^2 - 2 \Psi_3(\rho) \theta \right] \rho d \rho, \quad (9)$$

$$\text{де } \theta = T - T_C, \quad (10)$$

$$\text{а } \Psi_2(\rho) = \Psi_4 + \Psi_1 f(\rho), \quad \Psi_3(\rho) = \Psi_0 f(\rho), \quad \Psi_4 = \frac{2 \alpha a^2}{(\lambda h)},$$

$$\Psi_1 = \frac{4 \omega h^2 G_1''}{3(1-\nu) a^2 \lambda} |A|^2, \quad \Psi_0 = \frac{4 \omega h^2}{3(1-\nu) a^2 \lambda} \tilde{G}_0'', \quad \tilde{G}_0'' = G_0'' - G_1'' T_C \quad (11)$$

Задамо температуру у вигляді:

$$\theta = T_1 (1 - \rho^2). \quad (12)$$

Тоді для параметра T_1 одержимо вираз:

$$T_1 = \frac{C_1 \tilde{x}}{C_0 + C_2 \tilde{x}}, \quad \tilde{x} = |A|^2, \quad (13)$$

де

$$C_0 = 1 + \frac{1}{6} \Psi_4, \quad C_1 = \left(1 + \frac{\nu}{12} \right) \Psi_0, \quad C_2 = \left(\frac{1}{6} + \frac{\nu}{10} \right) \Psi_1. \quad (14)$$

Тут введено позначення:

$$\Psi_0 = \frac{8 \omega}{\lambda h a^2} D_0'', \quad \Psi_1 = \frac{8 \omega}{\lambda h a^2} D_1'', \quad \Psi_4 = \frac{2 \alpha a^2}{\lambda h}. \quad (15)$$

Крайова задача механіки зводиться до варіаційної задачі:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ (D' + iD'') \left[\left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right)^2 + \frac{2\nu}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \frac{d^2 w}{d\rho^2} \right] - (\tilde{\rho} h) a^4 \omega^2 w^2 - \right. \\ \left. - 2p_0(\rho) a^4 w - 2M_0 a^2 \nabla^2 w \right\} \rho d\rho. \end{aligned} \quad (16)$$

За допомогою стандартної варіаційної техніки знайдемо вираз для комплексної амплітуди коливань:

$$A = \frac{P_0}{A_1 + i A_2}, \quad (17)$$

де $A_1 = B_1 - b_1 T_1$, $A_2 = B_2 - b_2 T_1$, $B_1 = \frac{64 D_0'}{a^4} - \frac{3}{5} (\gamma h) \omega^2$,

$$B_2 = \frac{64 D_0''}{a^4}, \quad b_1 = \frac{96 D_1'}{a^4} \left(\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} \right), \quad b_2 = \frac{96 D_1''}{a^4} \left(\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} \right). \quad (18)$$

Як видно з функціоналу (16), для компенсації механічного навантаження до актуатора необхідно підвести різницю потенціалів:

$$V_A = - \frac{a^2 \int_0^1 p_0(\rho) w \rho d\rho}{\frac{1}{2} (h_0 + h_1) \int_0^1 \gamma_{31}(\rho) \nabla^2 w \rho d\rho}. \quad (19)$$

Для розрахунку різниці потенціалів актуатора потрібно використати наведені вище формули, в які не обхідно підставити знайдені вирази для амплітуди й температури.

4. Додаткове демпфірування.

Для введення додаткового демпфірування вимушених коливань використовується описана вище технологія, коли прикладена до актуатора різниця потенціалів V_A пропорційна швидкості зміни різниці потенціалів сенсора \dot{V}_S :

$$V_A = -G_S \dot{V}_S, \quad G_S = G G_e. \quad (20)$$

При цьому в рівнянні руху з'являється член, пропорційний швидкості зміни амплітуди зміщення. В (20) G_e - опір підсилювача, а G вибирається з умови найбільш швидкого затухання вільних коливань або суттєвого зменшення вимушених коливань.

У варіаційному принципі (16) фігурує величина M_0 :

$$M_0 = B V_A, \quad B = (h_0 + h_1) \gamma_{31}. \quad (21)$$

Для нестационарних коливань $w = A(t) \tilde{w}(x, y)$. Для стаціонарних коливань $A(t) = A e^{i\omega t}$. При цьому для нестационарних і стаціонарних коливань відповідно матимемо формули:

$$M_0 = -m_0 F \dot{A}(t), \quad M_0 = -m_0 i \omega F A e^{i\omega t}. \quad (22)$$

Тут $m_0 = G_S \gamma_{31}^2 (h_0 + h_1)^2$, (23)

$$F = \iint_{(S_1)} \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} \right) dx dy. \quad (24)$$

Для визначення M_0 потрібно обчислити інтеграл F по площі сенсора, який залежить від граничних умов і апроксимації прогину.

Для круглої пластини з жорстким закріпленням торців: $\tilde{w}(\rho) = (1 - \rho^2)^2$. А тому

$$F = 8 \pi \rho_1^2 (1 - \rho_1^2). \quad (25)$$

Для дослідження впливу додаткового затухання на демпфірування вимушених коливань пластини в одержаних вище співвідношеннях (18) потрібно замінити величину B_2 на величину

$$\tilde{B}_2 = B_2 + G_2. \quad (26)$$

Додаткове затухання характеризується величиною G_2 , яка розраховується або з варіаційного принципу (16) або методом Бубнова-Гальоркіна з використанням наведених вище виразів для M_0 .

Застосовуючи ці методи, для круглої пластини з жорстким закріпленням торця знаходимо

$$G_2 = \frac{24}{a^2} G_S \gamma_{31}^2 \omega (h_0 + h_1)^2 \rho_1^2 (1 - \rho_1^2) F. \quad (27)$$

Таким чином, крім затухання, яке породжується гістерезисними втратами в матеріалах, за рахунок G_2 з'являється додаткове затухання, яким можна керувати у досить широких межах.

Для прикладу розглянемо тришарову пластину з поліетиленовим середнім шаром і двома зовнішніми шарами протилежної поляризації з п'єзокераміки ЦТС_ТБС-2. У випадку круглої пластини з жорстким закріпленням торців, коли на контурі пластини задана постійна температура, взято такі характеристики: радіус пластини $a = 0.0536$ м, товщина пластини $h = 0.01$ м, з температурою $T_C = 20^0$ С, нормальний поверхневий тиск $p_0 = 2500$ Па.

При врахуванні впливу температури дисипативного розігріву й залежності властивостей матеріалу від температури в околі частоти лінійного резонансу $\omega_p = 4109$ с⁻¹, маємо амплітудно-частотні характеристики (Рис. 1) для різних значень параметра G_2 (верхня крива – $G_2 = 0$, середня крива – $G_2 = 0,5 B_2$, нижня крива – $G_2 = 1,5 B_2$). Аналізуючи ці графіки, слід відмітити наявність впливу нелінійності із-за термомеханічної спряженості, хоча ця нелінійність практично не приводить до появи областей неоднозначності. При цьому амплітуда коливань пластини на частоті лінійного резонансу значно зменшується, хоча максимальні значення амплітуди коливань залишаються майже незмінними, але досягаються вони при менших частотах. Рис.1 відповідає амплітудно-частотній характеристиці для коефіцієнту теплообміну із зовнішнім середовищем $\alpha = 0.5$ Вт/м²·град з температурою $T_C = 20^0$ С. Якщо взяти $\alpha = 2.5$ Вт/м²·град (Рис.2), то спостерігається зменшення модуля амплітуди коливань на частоті лінійного резонансу.

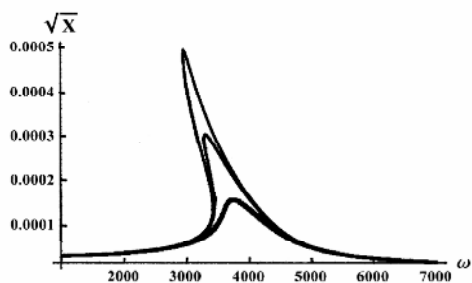


Рис.1. Амплітудно-частотна характеристика при $\alpha = 0.5$ Вт/м²·град, $a = 0,1072$ м

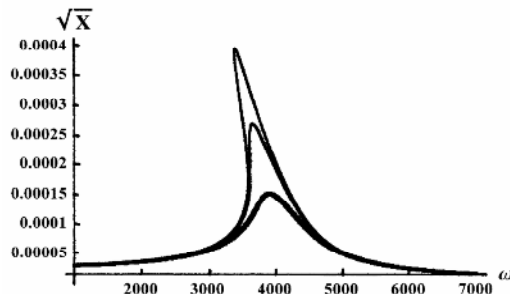


Рис. 2. Амплітудно-частотна характеристика при $\alpha = 2.5$ Вт/м²·град, $a = 0,1072$ м

5. Висновки.

Введення додаткового затухання суттєво зменшує амплітуду коливань. Як видно з наведених графіків, врахування термомеханічної спряженості приводить до помітного впливу нелінійності, так, що з'являються області неоднозначності в амплітудно-частотних характеристиках. При цьому збільшення коефіцієнта теплообміну приводить до зменшення впливу не лінійності та амплітуди коливань.

1. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Электротермовязкоупругость. - К., 1988. 2. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. - К., 1986. 3. Карнаухов В.Г., Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В. Основные соотношения термомеханики неупругих тонких пластин с распределенными сенсорами и актуаторами при моногар-моническом нагружении // Прикладная механика.- 2008. – 44, № 6.

ДО 70-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ АНАТОЛІЯ МИХАЙЛОВИЧА САМОЙЛЕНКА



2 січня 2008 року виповнилося 70 років від дня народження видатного українського математика, дійсного члена Національної академії наук України та Європейської академії наук, академіка-секретаря Відділення математики НАН України, директора Інституту математики НАН України Анатолія Михайловича Самойленка.

Ювіляр народився в селі Потіївка Радомишльського району на Житомирщині. Закінчивши малинську середню школу, він вступає на геологічний факультет Київського державного університету імені Т.Г.Шевченка. Однак невдовзі, прослухавши курс вищої математики, юнак переглядає свої погляди щодо майбутньої професії і переводиться на механіко-математичний факультет. Тут він знайомиться з академіком Ю.О. Митропольським і під його керівництвом робить перші кроки у велику науку.

У 1960 році після закінчення університету з відзнакою Анатолій Михайлович вступає до аспірантури Інституту математики АН УРСР, за три роки успішно захищає кандидатську дисертацію, а ще за чотири стає одним із наймолодших докторів наук на теренах колишнього Радянського Союзу.

З 1963 по 1974 рік А.М. Самойленко працює в Інституті математики. Тут за короткий час він стає одним із лідерів всесвітньо відомої наукової школи Крилова-Боголюбова-Митропольського.

У 1974 році учений переходить з Інституту математики на постійну роботу до Київського державного університету імені Т.Г. Шевченка і протягом подальших 13 років очолює кафедру інтегральних та диференціальних рівнянь. З його приходом розпочався новий, чи не найяскравіший етап розвитку кафедри. Під керівництвом А.М. Самойленка стрімко активізується наукова робота, діяльність аспірантури; інтенсивно працює республіканський семінар з диференціальних рівнянь, студентські наукові гуртки; наукові роботи студентів кафедри здобувають цілу низку нагород на Всесоюзних та Республіканських конкурсах.

Займаючись розбудовою кафедри, А.М. Самойленко водночас веде інтенсивний науковий пошук, а здобуті результати невідкладно впроваджує в навчальний процес. Усі, хто мав нагоду в той час вчитися у нього, відзначають, що Самойленко-педагог володів чудовим умінням протягом кількох вступних лекцій найкоротшим шляхом підводити слухача до передових рубежів сучасної математики. Особливо яскраво цей його талант проявився у змістовних і глибоких спеціальних курсах, присвячених проблемам теорії багаточастотних коливань. Разом із тим маститий учений вважав своїм неодмінним обов'язком читати нормативний курс "Диференціальні рівняння" студентам-другокурсникам. Його енергійна й емоційна манера викладу матеріалу під час лекцій незмінно викликала справжнє захоплення аудиторії.

Плідна багатогранна науково-педагогічна діяльність А.М. Самойленка на посаді завідувача кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського університету безперечно сприяла піднесенню його авторитету в наукових колах. У 1978 році його обирають членом-кореспондентом АН УРСР, а у 1985 році він у складі авторського колективу вчених очолюваного ним підрозділу стає лауреатом Державної премії УРСР у галузі науки і техніки.

Після повернення у 1987 році до Інституту математики А.М.Самойленко вже через рік стає його директором. У 1995 році Анатолія Михайловича обирають дійсним членом Національної академії наук України, а з 2006 року він є академіком-секретарем Відділення математики НАНУ.

А.М. Самойленко збагатив математичну науку фундаментальними результатами у багатьох її розділах. Так, у 1960-х під впливом робіт А.М. Колмогорова, В.І. Арнольда, М.М. Боголюбова і Ю. Мозера він спільно з Ю.О.Митропольським провів глибокі дослідження з теорії багаточастотних нелінійних коливань скінченно диферен-

ційовних неконсервативних систем і розв'язав низку надзвичайно складних задач, пов'язаних із так званою проблемою малих знаменників. У 1965 році А.М. Самойленко запропонував чисельно-аналітичний метод відшукування періодичних розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь, який зараз носить у сучасній науковій літературі його ім'я. Обґрунтовуючи цей метод, учений отримав близькі до непокращуваних умови його збіжності, а разом і умови топологічного характеру, які гарантують існування точного періодичного розв'язку та його наближень. Згодом у великому циклі статей і монографій, написаних А.М.Самойленком та його учнями, було переконливо продемонстровано універсальність та високу ефективність чисельно-аналітичного методу як засобу розв'язання періодичних та багатоточкових крайових задач для широких класів рівнянь, зокрема, рівнянь із запізненням, різницевих, інтегродиференціальних і диференціально-функціональних рівнянь, рівнянь з імпульсним впливом, рівнянь із частинними похідними та інших.

Важливе місце у науковому доробку А.М. Самойленка посідають питання теорії інваріантних тороїдальних многовидів нелінійних динамічних систем. Йому належить розробка ефективного методу дослідження проблеми збереження інваріантних торів при збуреннях. В основу свого підходу А.М. Самойленко поклав запропоноване ним поняття функції Гріна лінійного розширення динамічної системи на торі. Апарат функцій Гріна надалі знайшов ефективне застосування в працях А.М. Самойленка та його учнів при аналізі дискретних, імпульсних, злічених динамічних систем, систем у банаховому просторі, диференціальних рівнянь із запізненням. З цього погляду можна вважати цілком виправданим використання вже усталеного в науковій літературі терміну "функція Гріна-Самойленка".

Досліджуючи поведінку траєкторій в околі інваріантного тороїдального многовиду нелінійної динамічної системи, А.М. Самойленко знайшов вельми загальні умови її зведення до канонічної форми, яка має структуру згаданого вище лінійного однорідного розширення.

Згодом А.М. Самойленком та його учнями була розроблена змістовна теорія, яка пояснює, зокрема, як пов'язані між собою такі суттєві характеристики розширення, як експоненційна дихотомія і розщеплюваність, володіння (знакозмінною) функцією Ляпунова, існування функції Гріна-Самойленка, існування інваріантного перерізу відповідного неоднорідного розширення при довільній неоднорідності.

У 1970-х у співавторстві Ю.О. Митропольским учений розробляє асимптотический метод розкладання за малим параметром формального перетворення, яке зводить слабо нелінійну багаточастотну коливну систему до нормальної форми як у нерезонансному, так і в резонансному випадках.

Ще один напрямок досліджень А.М. Самойленка у сфері нелінійних коливань стосується обґрунтування методу усереднення і вивчення резонансних явищ у багаточастотних системах, включаючи системи з повільно змінними параметрами. Тут, насамперед, привертають увагу виведені ним тонкі оцінки осцилюючих інтегралів, необхідні для вивчення процесу проходження траєкторією резонансних підмножин фазового простору. Саме з допомогою різних варіантів оцінок подібного типу А.М. Самойленком та його учнями отримано нові глибокі результати з обґрунтування методу усереднення в багаточастотних коливних системах.

З дослідженнями ученого та його учнів періоду 1970-х – 1980-х років по праву пов'язують виникнення та становлення теорії імпульсних диференціальних систем. Монографія А.М. Самойленка та М.О. Перестюка «Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием» (1987) стала першою в світовій літературі книгою, в якій було викладено основні положення теорії диференціальних рівнянь з імпульсним впливом. Пізніше у 1995 році цю монографію було доповнено новими результатами і перекладено англійською мовою.

Характерною рисою наукової творчості А.М. Самойленка є гармонійне поєднання досліджень переважно теоретичного характеру із розробкою ефективних конструктивних методів. Яскраві докази на підтвердження цієї тези можна знайти в його відомій монографії "Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы", яка побачила світ у видавництві "Наука" 1987 року (переклад англійською мовою: *Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations. – Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1991*). Так, не обмежуючись теоремами існування збурених інваріантних торів, автор розробляє й обґрунтовує наближений проекційно-ітераційний метод відшукування інваріантних торів у вигляді збіжної послідовності тригонометричних поліномів.

Талант А.М. Самойленка як ученого й організатора науки яскраво проявляється у його вмінні одночасно керувати дослідницькою роботою відразу кількох груп учених, які працюють над розв'язанням широкого кола проблем сучасної математики. Результатом цієї діяльності останніх років стали численні праці вчених школи Самойленка з таких актуальних напрямків математичної науки, як нетерові крайові задачі, якісна теорія стохастичних диференціальних рівнянь та їх інваріантних множин, інтегровні скінченно і нескінченновимірні гамільтонові системи, груповий аналіз нелінійних еволюційних рівнянь тощо.

Ми маємо змогу згадати лише деякі із наукових результатів А.М.Самойленка – адже бібліографія праць ученого перевищує 400 назв, у тому числі 30 монографій.

Проводячи активну наукову роботу в очолюваному ним інституті, науково-педагогічну діяльність у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка та Національному технічному університеті України "КПІ", Анатолій Михайлович завжди приділяв і продовжує приділяти багато уваги вихованню молодих наукових кадрів. Під його керівництвом було виконано й успішно захищено 24 докторських і 76 кандидатських дисертацій.

Багаторічна праця А.М.Самойленка на ниві освіти і науки відзначена орденом Дружби Народів (1984) та орденом "За заслуги" III ступеня (2003), Почесною Грамотою Президії Верховної Ради України (1987). Він є лауреатом Державних премій України в галузі науки й техніки (1985, 1996), Республіканської премії імені М. Островського (1968), премій Національної академії наук України: імені М. Крилова (1981), імені М. Боголюбова (1998), імені М. Лаврентьева (2000), імені М.В. Остроградського (2004). Його удостоєно звання "Заслужений діяч науки і техніки України" (1998) та звання "Соросівський професор" (1998).

Своє 70-річчя ювіляр зустрів сповнений нових творчих задумів та енергії. Ми бажаємо Анатолію Михайловичу доброго здоров'я, щастя та успіхів, і ще довгих років яскравої та плідної діяльності.

М.Ф. Городній, І.О. Парасюк, М.О. Перестюк,
В.Г. Самойленко, О.М. Станжицький

ДО 65-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ ВОЛОДИМИРА ВАСИЛЬОВИЧА КИРИЧЕНКА



17 червня 2007 року виповнилося 65 років від дня народження професора кафедри геометрії механіко-математичного факультету лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки доктора фізико-математичних наук, професора Володимира Васильовича Кириченка.

Кириченко В.В. народився в місті Пенза (Росія) в сім'ї військовослужбовця. Батько – Кириченко Василь Дмитрович (1918 – 1995), доктор технічних наук, професор, Заслужений діяч науки і техніки УРСР, генерал-лейтенант, мати – Кириченко Марія Федорівна (1920 – 1997).

У 1959 році Кириченко В.В. закінчив СШ № 107 в місті Ленінграді і в тому же році вступив на механіко-математичний факультет Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка, який закінчив з відзнакою у грудні 1964 року.

Після здобуття вищої освіти Кириченко В.В. з січня 1965 року по серпень 1967 року навчався в аспірантурі Інституту математики АН УРСР (науковий керівник – член-кореспондент АН СРСР, доктор фізико-математичних наук, професор Д.К. Фаддєєв).

З 1 вересня 1967 року Кириченко В.В. працює в Київському університеті, з вересня 1988 р. по січень 2006 р. завідував кафедрою геометрії. З січня 2006 р. – професор кафедри геометрії.

У 1968 році Кириченко В.В. успішно захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук, а в 1986 році – дисертацію на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук на тему „Модулі та структурна теорія кілець”. У 1974 році отримав вчене звання доцента, а у 1990 році – професора.

Кириченко В.В. – визначний вчений. Йому належить провідна роль в розвитку структурної теорії кілець, де він ефективно застосував методи теорії зображень. Він ввів поняття сагайдака та первинного сагайдака кільця, що дозволило йому розробити повну та завершену структурну теорію таких важливих класів кілець, як спадкові, напівланцюгові та напівдистрибутивні та розв'язати відому проблему Л.А.Скорнякова про будову нетерових кілець, над якими всі скінченнопороджені модулі є напівланцюговими. Розроблена Кириченком В.В. (спільно з Дроздом Ю.А. і Ройтером А.В.) теорія басових та квазі-басових порядків нині стала класичною та отримала подальший розвиток у закордонних алгебраїчних школах, зокрема, в Японії.

Наукові праці Кириченка В.В. широко відомі в Україні та світі. Він автор понад 200 наукових та науково-методичних праць, серед яких п'ять монографій (“Конечномерные алгебры” (у співавт., 1980), “Finite Dimensional Algebras” (у співавт., 1994), “Rings and Modules” (у співавт., 2001), “Algebras, Rings and Modules”, том 1 (у співавт., 2004), “Algebras, Rings and Modules”, том 2 (у співавт., 2007)), три з яких видано в престижному міжнародному видавництві “Springer” англійською мовою.

Кириченко В.В. створив наукову школу з застосувань геометричних методів у структурній теорії кілець. Серед його учнів 3 доктора та 23 кандидати наук

Володимир Васильович багато уваги приділяє науково-методичній роботі: він є співавтором навчального посібника з аналітичної геометрії та редактором двох видань збірника задач з аналітичної геометрії. Ці посібники видано українською мовою з грифом Міністерства освіти та науки України для математичних спеціальностей університетів. Крім цього, він видав вісім навчально-методичних посібників з різних питань алгебри та геометрії.

Професор В.В. Кириченко є одним з ініціаторів проведення Міжнародних алгебраїчних конференцій в Україні. Ці конференції користуються великою популярністю серед алгебраїстів. В останній (шостій) конференції, яка проходила в липні 2007 року в місті Кам'янець-Подільський, брали участь фахівці з 19 держав світу.

Кириченко В.В. веде активну роботу як редактор наукового журналу "Algebra and Discrete Mathematics" та член редколегій багатьох наукових журналів і видань, серед яких "Известия Гомельского университета", "Известия АН Республики Молдовы", "Математичні Студії", "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка", "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки", науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова.

Більше 30 років Кириченко В.В. член спеціалізованих наукових рад по захисту кандидатських та докторських дисертацій, у 2001 – 2006 роках він був головою спеціалізованої вченої ради при Київському національному університеті.

Володимир Васильович нагороджений двома Почесними грамотами Київського національного університету імені Тараса Шевченка, має подяку від Президії НАН України за активну участь у проведенні Першого українського математичного конгресу у 2001 році, у 2007 році у складі авторського колективу він удостоєний звання лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки.

Зичимо Володимирі Васильовичу міцного здоров'я і нових творчих успіхів у його науковій і науково-організаційній діяльності.

Редакційна колегія

ДО 80-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ АНТОНА ЮРІЙОВИЧА ЛУЧКИ



17 лютого 2008 року виповнилось 80 років від дня народження Лучці Антону Юрійовичу, доктору фізико-математичних наук, професору, провідному науковому співробітнику відділу диференціальних рівнянь і теорії коливань Інституту математики НАН України, відомому математику, учаснику Великої Вітчизняної війни.

А.Ю. Лучка народився в с. Росільна Богородчанського району Івано-Франківської області у сім'ї селянина. Любов до математики виникла в ранньому віці, коли ще навчався в Росільнянській школі (1935 – 1942).

Трудову діяльність розпочав з вересня 1944 р., працюючи інспектором відділу соціального забезпечення Солотвинського райвиконкому. В період з 1945 – 1949 р.р. працював вчителем Росільнянської семирічної школи і паралельно навчався в Станіславському педагогічному училищі. Закінчивши успішно училище у 1949 р., поступив без екзаменів на фізико-математичний факультет Станіславського учительського інституту, був сталінським стипендіатом. Після закінчення з відзнакою вчительського інституту в 1951 р., працював учителем математики в середній школі м. Івано-Франківська (1951 – 1957) і в ці ж роки навчався на заочному відділенні фізико-математичного факультету Чернівецького університету.

Після закінчення з відзнакою університету у 1957 році поступив в аспірантуру Інституту математики АН УРСР у відділ диференціальних рівнянь. Його науковим керівником був видатний вчений математик і механік член-кореспондент АН УРСР Ю.Д. Соколов, який своєю ерудицією, високою культурою, громадянською мужністю значно вплинув на формування наукового світогляду молодого науковця.

З 1957 р. все подальше життя Антона Юрійовича пов'язане з Інститутом математики. У цій славетній науковій установі А.Ю. Лучка навчався в аспірантурі (1957 – 1960), працював у відділі диференціальних рівнянь на посадах молодшого (1960 – 1962), старшого (1963 – 1986), а з 1987 по даний час – провідного наукового співробітника.

А.Ю. Лучка у 1961 р. захистив кандидатську дисертацію „О теории и применениях метода осреднения функциональных поправок”, а в 1984 р. – докторську дисертацію „Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений”. Йому присвоєно звання старшого наукового співробітника (1965) та звання професора (1991).

А.Ю. Лучка вніс помітний вклад у розвиток математики у галузях диференціальних та інтегральних рівнянь, обчислювальної математики та історії математики. Його наукові праці присвячені створенню ефективних наближених методів розв'язування широких класів лінійних та нелінійних рівнянь, зокрема диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних та функціонально-диференціальних.

А.Ю. Лучка створив загальну теорію методів проекційно-ітеративного типу для лінійних рівнянь у банаховому просторі; обґрунтував застосування цих методів до нелінійних рівнянь з повністю неперервними операторами, рів-

нянь зі слабкою нелінійністю, рівнянь з монотонними операторами; розробив обчислювальні алгоритми для диференціальних та інтегральних рівнянь і на їх базі побудував ефективні чисельні методи; створив варіаційно-ітеративні та варіаційно-градієнтні методи для операторних рівнянь в гільбертовому просторі; розробив чисельні варіанти цих методів для конкретних класів задач математичної фізики; дослідив застосування проєкційно-ітеративних методів до диференціальних рівнянь з параметрами та обмеженнями, до диференціальних рівнянь з імпульсною дією; розвинув теорію операторних рівнянь з обмеженнями та розробив методи побудови їх розв'язків.

Результати своїх наукових досліджень А.Ю. Лучка опублікував у 180 наукових працях та 4 монографіях, одна з яких перевидана англійською мовою, і висвітлював їх на багатьох різноманітних наукових конференціях, з'їздах, симпозиумах, семінарах та в наукових центрах.

Наукові результати А.Ю.Лучки одержали визнання як в Україні, так і за її межами. За цикл праць, присвячених розвитку аналітичних методів розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь А.Ю. Лучці присуджена премія імені М.М. Крилова АН УРСР за 1989 рік.

А.Ю. Лучка на протязі 35 років (1964–1998) сумлінно виконував обов'язки вченого секретаря спеціалізованих вчених рад із захисту кандидатських та докторських дисертацій у Інституті математики, а протягом 1993–1998 років був членом експертної ради з математики ВАК України.

Поряд з науковою діяльністю А.Ю. Лучка виконував значну педагогічну роботу. Він працював за сумісництвом у Київському технологічному інституті легкої промисловості (1962–1970) та Київському національному педагогічному університеті імені М.П. Драгоманова (1990–2004).

Протягом тридцяти років, з 1973 по 2003 рр. А.Ю.Лучка читав лекції зі спеціальних курсів з теорії наближених методів розв'язання інтегральних і диференціальних рівнянь, керував курсовими, бакалаврськими, дипломними та магістерськими роботами студентів механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Лекції А.Ю.Лучка завжди викликали великий інтерес слухачів, оскільки він будував їх за принципом доступності і таким чином, щоб у студентів розвивалось логічне мислення та з'являлись елементи наукової творчості, при цьому йому вдавалося порівняно просто викласти досить складні математичні результати без надмірного узагальнення матеріалу і вдало поєднати складні теоретичні факти із розв'язанням конкретних задачам практики.

А.Ю.Лучка неодноразово призначався головою Державних екзаменаційних комісій у Київському та Чернівецькому національних університетах, Івано-Франківському та Дрогобицькому педагогічних інститутах.

А.Ю.Лучка вів активну педагогічну діяльність також і у напрямку підготовки наукових кадрів вищої кваліфікації. Під його керівництвом успішно захищені 29 кандидатських дисертацій, його учні успішно працюють в наукових установах і вузах України.

В даний час Антон Юрійович продовжує плідно працювати на посаді провідного наукового співробітника відділу диференціальних рівнянь і теорії коливань Інституту математики НАН України, активно проводить наукові дослідження з теорії наближених методів розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь, щедро ділиться своїми знаннями і досвідом із молодими науковцями.

Побажаємо Антону Юрійовичу доброго здоров'я, щастя, нових творчих успіхів на науковій і педагогічній ниві і багатьох років життя.

Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.,
Самойленко В.Г., Ферук В.А.