УДК 517.9

Н.Задоянчук, асп. П.Касьянов, канд.фіз.-мат.наук
e-mail: ninelll@ukr.net e-mail:kasyanov@univ.kiev.ua

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З M-ПСЕВДОМОНОТОННИМИ НЕКОЕРЦИТИВНИМИ ВІДОБРАЖЕННЯМИ

Ми розглядаємо диференціально-операторні рівняння першого порядку з некоерцитивними відображеннями M-псевдомонотонного типу, зокрема, для некоерцитивних операторів варіаційного числення. Ми довели розв'язність методом Фаедо-Гальоркіна і одержали апріорні оцінки для наближених розв'зків.

We consider the first order differential-operators equations with non-coercive maps of M-pseudomonotone type, in particular, for non-coercive operators of variational calculus. We proved the solvability by using of Faedo-Galerkin method and obtained a priory estimations for approximate solutions.

1.Вступ

В останні роки активізувались дослідження нелінійних некоерцитивних граничних задач в частинних похідних, які породжують еволюційні рівняння та включення з некоерцитивними відображеннями псевдомонотонного типу [1-15]. Так, в роботах [1; 7] досліджено випадок монотонних некоерцитивних операторів. В роботах [4; 5] описані некоерцитивні задачі з операторами, які мають напівобмежену варіацію. Мета даної роботи полягає у тому, щоб узагальнити ці результати на випадок M-псевдомонотонних некоерцитивних відображень. Це дозволить досліджувати ряд задач гідродинамічного типу, що породжують нелінійні диференціально-операторні рівняння з некоерцитивними операторами варіаційного числення [7; 8], з сумою некоерцитивного по старшим похідним та демінеперервного некоерцитивного по похідним нижчого порядку операторів.

2.Постановка задачі

Нехай V_i, $i=1,2$ - рефлексивні банахові простори; H - гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$, ототожнений зі спряженим простором H^*, V_σ - сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_{V_\sigma}$ і $V_\sigma \subset V_i \subset H$, де кожне вкладення неперервне і щільне. Тоді маємо такий ланцюжок неперервних та щільних вкладень $V_\sigma \subset V_i \subset H \subset V_i^* \subset V_\sigma^*$, де V_i^* - спряжений простір до V_i, V_σ^* - спряжений до V_σ відносно $(\cdot,\cdot)$.

Введемо позначення $S=[0,T]$ - скінченний інтервал часу,

$$X = L_{p_0}(S;H)\bigcap L_{p_1}(S;V_1)\bigcap L_{p_2}(S;V_2), \quad X_\sigma = L_{p_0}(S;H)\bigcap L_{\max\{p_1,p_2\}}(S;V_\sigma),$$

$$X^* = L_{q_0}(S;H)+L_{q_1}(S;V_1^*)+L_{q_2}(S;V_2^*), \quad X_\sigma^* = L_{q_0}(S;H)+L_{\min\{q_1,q_2\}}(S;V_\sigma^*), ,$$

де $\frac{1}{p_0}+\frac{1}{q_0}=\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}=1$, $1<p_i<\infty$, $p_i \le p_0 < \infty$, $i=1,2.$

Лінійний простір $W=\{y\in X \mid y' \in X^*\}$ (відповідно $W_\sigma=\{y\in X \mid y' \in X_\sigma^*\}$) є рефлексивним банаховим простором відносно норми $\|y\|_W = \|y\|_X + \|y'\|_{X^*}$ (відповідно $\|y\|_{W_\sigma} = \|y\|_X + \|y'\|_{X_\sigma^*}$), де y' - похідна від елемента $y\in X$ в сенсі простору скалярних розподілів $D^*(S,V_\sigma^*)=L(D(S);V_\sigma^*)$ [1].

Для довільних $v\in X$ та $f\in X^*$: $f=f_0+f_1+f_2$, $f_0\in L_{q_0}(S;H)$, $f_1\in L_{q_1}(S;V_1^*)$, $f_2\in L_{q_2}(S;V_2^*)$, розглянемо

$$\langle f,v\rangle_X = \int_S (f_0(t),v(t))dt + \int_S \langle f_1(t),v(t)\rangle_{V_1} dt + \int_S \langle f_2(t),v(t)\rangle_{V_2} dt = \int_S (f(t),v(t))dt.$$

Тут $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_i}: V_i^*\times V_i \to R$ - канонічне спарювання, що співпадає на $H\times V_i$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ в H.

Розглянемо диференціально-операторне рівняння вигляду

$$y' + A(y) + B(y) = f \qquad (1)$$

$$y(0) = y_0 \qquad (2)$$

де $A,B: X\to X^*$, $f\in X^*$, $y_0\in H$.

Основною метою даної роботи є встановлення властивостей розв'язуючого оператора для некоерцитивної задачі (1)-(2) за умов узагальненої M-псевдомонотонності та обмеженості на відображень A та B.

3.Основні класи відображень.

Означення 1. Оператор $A: X\to X^*$ називається коерцитивним, якщо існує визначена на $[0,\infty)$ дійсна функція γ з $\lim_{s\to\infty}\gamma(s)=+\infty$ така, що $\langle Au,u\rangle_X \ge \gamma(\|u\|_X)\|u\|_X \quad \forall u\in X.$

Означення 2. Оператор $A: X\to X^*$ називається демінеперервним, якщо з $u_n \to u$ в X випливає, що Au_n слабко збігається до Au в X^*.

Означення 3. Оператор $A: X\to X^*$ називається:

1) M -псевдомонотонним на W (на W_σ), якщо для довільної послідовності $\{y_n\}_{n\ge1}$, слабко збіжної до y в X, $y'_n \to y'$ слабко в X^* (в X^*_σ) і нерівності

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\langle A(y_n), y_n - y\rangle_X \le 0 \tag{3}$$

можна виділити таку підпослідовність $\{y_{n_k}\}$, що

$$\underline{\lim_{n_k\to\infty}}\left\langle A(y_{n_k}), y_{n_k} - w\right\rangle_X \ge \langle A(y), y - w\rangle_X \quad \forall\, w\in W \quad (w\in W_\sigma); \tag{4}$$

2) M_0 -псевдомонотонним на W (на W_σ), якщо з того, що $y_n \to y$ слабко в X, $A(y_n)\to d$ слабко в X^*, $y'_n \to y'$ слабко в X^* (в X^*_σ) і нерівності (3) випливає нерівність (4).

Зауваження 1. Оператори M -псевдомонотонного типу на W в значно більш загальній ситуації були введені в роботах [7] (означення 4.3.2), а також [4]. Перехід в (4) до підпослідовностей має тут принципове значення, і ця ідея запозичена нами з [2]. Очевидно також, що кожний M - псевдомонотонний на W (на W_σ) оператор є M_0-псевдомонотонним на W (на W_σ).

Пропозиція 1. [13] Нехай $A, B : X \to X^*$ - M -псевдомонотонні на W (на W_σ) оператори. Тоді оператор $\mathrm{A} = A + B$ ($\mathrm{A}(y) = A(y) + B(y), \quad y\in X$) є M -псевдомонотонним на W (на W_σ).

Зауваження 2. Для M_0-псевдомонотонних відображень аналогічне твердження справедливе, якщо один з операторів обмежений.

Пропозиція 2. [13] Справедливі імплікації:

" A - радіально неперервний оператор з $(X;W_\sigma)$-напівобмеженою варіацією "$\Rightarrow$" $A - M_0$ -псевдомонотонний на W_σ оператор "$\Rightarrow$" A задовольняє властивість (M) на W_σ".

4.Основні результати.

Нехай $A : X \to X^*$. Розглянемо задачу Коші для нелінійного диференціально-операторного рівняння I - го порядку

$$y' + A(y) = f \tag{5}$$

$$y(0) = y_0, \tag{6}$$

де $f\in X^*$, $y_0 \in H$.

Зауваження 3. Рівняння (5) можна розуміти як рівність в $D^*(S;V^*)$, а оскільки $y' = f - A(y) \in X^*$, то в силу неперервності вкладення $W^*_\sigma \subset C(S;V^*_\sigma)$ рівність (6) має сенс (наприклад, в V^*_σ).

Нехай $\lambda > 0, \quad p_0 \ge 2,$ тобто $X \subset X^*$, $I : X \to X \subset X^*$ - тотожнє відображення. Накладемо на A наступні умови:

α_1 *) оператор* $A : X \to X^*$ - λ_0 *-псевдомонотонний на* W_σ *і обмежений;*

α_2 *) оператор* $A : C(S;V^*_\sigma) \to X^*$ *- демінеперервний;*

α_3 *) оператор* $A + \lambda I$ *- коерцитивний.*

Нехай також виконується умова

$P)$ простір V_σ (а, тому і V) сепарабельний (ця вимога не є суттєвою, проте вона спрощує доведення), і нехай $\{h_1,...,h_n,...\}$ - повна система лінійно незалежних елементів; H_n - лінійна оболонка сукупності $\{h_1, h_2,..., h_n\}$, наділена скалярним добутком із H . Припустимо, що система $\{h_1, h_2,...\}$ така, що $\forall n$ *оператор ортогонального проектування* $\pi_n : H \to H_n$ *рівномірно обмежений одиницею в* $L(H;H)$, $L(V_\sigma;V_\sigma)$ і $L(V^*_\sigma;V^*_\sigma)$.

Теорема 1. Нехай $p_0 \ge 2$ і виконуються умови $\alpha_1)$ - $\alpha_3)$ і $P)$. Тоді при кожному $f \in X^*$ і $y_0 \in H$ задача Коші (5), (6) має, принаймні, один розв'язок $y \in W$.

Доведення. Доведення проведемо, слідуючи [1]. Для кожного $t\in S$ покладемо

$$X(t) = L_{p_1}\left([0,t];V_1\right)\cap L_{p_2}\left([0,t];V_2\right)\cap L_{p_0}\left([0,t];H\right),$$

$$X_\sigma(t) = L_{p_0}([0,t];H)\cap L_p([0,t];V_\sigma), \quad p = \max\{p_1, p_2\};$$

$$X^*_\sigma(t) = L_{q_0}([0,t];H) + L_q([0,t];V^*_\sigma), \quad q = \min\{q_1, q_2\};$$

Лема 1. Якщо $p_0 \ge 2$ та для деякого $\lambda \ge 0$ $A + \lambda I : X \to X^*$ є коерцитивним оператором типу Вольтерра, то справджується наступна нерівність

$$\int_S e^{-2\lambda t}(A(y)(t) + \lambda y(t), y(t))dt \ge \tilde{\gamma}(\|y\|_X)\|y\|_X \quad \forall y\in X, \tag{7}$$

де $\tilde{\gamma}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ - обмежена знизу на обмежених в $\mathbb{R}_+$ множинах неперервна функція така, що $\tilde{\gamma}(r)\to+\infty$ при $r\to\infty$.

Доведення. Перевіримо (7). Із коерцитивності і обмеженості A випливає, що для $\gamma:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ - обмеженої знизу на обмежених в $\mathbb{R}_+$ множинах функції такої, що $\gamma(r)\to+\infty$ при $r\to\infty$

$$\langle (A+\lambda I)y,y\rangle\ge\gamma(\|y\|_X)\|y\|_X \quad \forall y\in X.$$

Звідси, $\inf\limits_{s\ge0}\gamma(s)=a>-\infty$. Для довільного $b>a$ розглянемо непорожню обмежену в $\mathbb{R}_+$ множину $A_b=\{c\ge0\mid\gamma(c)\le b\}$. Нехай $c_b=\sup A_b$ для довільного $b>a$. Зауважимо, що $\forall b_1>b_2>a \quad +\infty>c_{b_1}\ge c_{b_2}$ і $c_b\to+\infty$ при $b\to+\infty$. Покладемо $\hat{\gamma}(t)=\begin{cases}a, & t\in[0,c_{a+1}],\\ a+k-1+\dfrac{t-c_{a+k}}{c_{a+k+1}-c_{a+k}}, & t\in(c_{a+k},c_{a+k+1}],\ k\ge1.\end{cases}$

Тоді, $\hat{\gamma}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ - обмежена знизу на обмежених в $\mathbb{R}_+$ множинах неспадна неперервна функція така, що $\hat{\gamma}(r)\to+\infty$ при $r\to\infty$ та $\gamma(t)\ge\hat{\gamma}(t) \quad \forall t\ge0$. Оскільки A - оператор типу Вольтерра, то

$$\forall t\in S \qquad \int_0^t(A(y)(\tau)+\lambda y(\tau),y(\tau))d\tau=\int_0^T(A(y_t)(\tau)+\lambda y_t(\tau),y_t(\tau))d\tau\ge\hat{\gamma}(\|y_t\|_X)\|y_t\|_X=\hat{\gamma}(\|y\|_{X_t})\|y\|_{X_t},$$

де $\|y\|_{X_t}=\|y_t\|_X$, а $y_t(s)=\begin{cases}y(s), & 0\le s\le t,\\ \bar{0}, & t\le s\le T.\end{cases}$ Нехай $g(\tau)=(A(y)(\tau)+\lambda y(\tau),y(\tau)),\ \tau\in S,\ h(t)=\hat{\gamma}(\|y\|_{X_t})\|y\|_{X_t}, \quad t\in S.$

Для всіх $t\in S \quad h(t)\ge\hat{\gamma}(0)\|y\|_X$ та $\int_0^t g(\tau)d\tau\ge h(t) \quad \forall t\in S.$

Далі, $\int_0^T e^{-2\lambda\tau}(A(y)(\tau)+\lambda y(\tau),y(\tau))d\tau=e^{-2\lambda T}\int_0^T g(\tau)d\tau+\int_0^T[e^{-2\lambda\tau}-e^{-2\lambda T}]g(\tau)d\tau\ge e^{-2\lambda T}h(T)+2\lambda\int_0^T e^{-2\lambda s}\int_0^s g(\tau)d\tau ds\ge$

$$\ge e^{-2\lambda T}h(T)+2\lambda T\inf_{s\in S}e^{-2\lambda s}\int_0^s(A(y)(\tau)+\lambda y(\tau),y(\tau))d\tau\ge -c_1\|y\|_X+e^{-2\lambda T}\hat{\gamma}(\|y\|_X)\|y\|_X,$$

де $c_1=2\lambda T\,|\,\hat{\gamma}(0)|\ge0$ не залежить від $y\in X,\ \tilde{\gamma}(s)=e^{-2\lambda T}\hat{\gamma}(s)-c_1,\ s\ge0.$ Отже, властивість (7) встановлена.

Розглянемо таку задачу

$$y_n'+A_n(y_n)=f_n, \tag{8}$$

$$y_n(0)=y_{n0}, \tag{9}$$

де $X_n=L_{p_0}(S;H_n)$, $X_n^*=L_{q_0}(S;H_n)$, $y_{n0}\to y_0$ сильно в H, а оператор $A_n:X_n\to X_n^*$, і $f_n\in X_n^*$ визначаються співвідношеннями

$$\langle f_n,w_n\rangle_{X_n}=\langle f,w_n\rangle_X, \quad \langle A_n(y_n),w_n\rangle_{X_n}=\langle A(y_n),w_n\rangle_X \quad \forall\, y_n,w_n\in X_n.$$

Лема 2. При кожному $n\ge1$ задача (8), (9) має розв'язок $y_n\in W$, послідовність $\{y_n\}$ обмежена в X і в $C(S;H)$, а $\{y_n'\}$ обмежена в X_σ^*.

Доведення. Позначимо S_1 множину тих $t_1\in S$, для яких задача (8), (9) має розв'язок з $L_{p_0}([0,t_1];H_n)$ (можливо, $S_1=\{0\}$). При цьому S_1 може мати вигляд $[0,t_0)$ або $[0,t_0]$. Для кожного $t_1\in[0,t_0)$ система (8) має розв'язок $y_n\in L_{p_0}([0,t_1];H_n)$, $y_n'\in L_{q_0}([0,t_1];H_n)$, тобто

$$y_n'(t)+(A_ny_n)(t)=f_n(t) \quad \text{для м.в. } t\in[0,t_1] \tag{10}$$

$$y_n(0)=y_{n0}. \tag{11}$$

Помноживши (10) на $y_n(t)e^{-2\lambda t}$ і проінтегрувавши, внаслідок леми **1.** та Вольтеровості A, для всіх $n\ge1$ та $t\in[0,t_1)$, маємо

$$\frac12 e^{-2\lambda T}\|y_n(t)\|_H^2+\gamma(\|y_n\|_{X(t)})\|y_n\|_{X(t)}\le\|f\|_{X^*}\|y_n\|_{X(t)}+\frac12\|y_{on}\|_H^2, \tag{12}$$

оскільки $\int_0^t e^{-2\lambda\tau}(y_n{}'(\tau),y_n(\tau))d\tau=\int_0^t((e^{-\lambda\tau}y_n(\tau))',y_n(\tau)e^{-\lambda\tau})d\tau+\lambda\int_0^t e^{-2\lambda\tau}(y_n(\tau),y_n(\tau))d\tau$ та

$$\int_0^t((e^{-\lambda\tau}y_n(\tau))',y_n(\tau)e^{-\lambda\tau})d\tau=\frac12(\|e^{-\lambda t}y_n(t)\|_H^2-\|y_{n0}\|_H^2)=\int_0^t e^{-2\lambda\tau}\langle f(\tau),y_n(\tau)\rangle d\tau-\int_0^t e^{-2\lambda\tau}\langle Ay_n(\tau)+\lambda y_n(\tau),y_n(\tau)\rangle d\tau.$$

Зокрема із (12) випливає:

$$\gamma(\|y_n\|_{X(t_1)})\|y_n\|_{X(t_1)} \le \|f\|_{X^*} + \frac{1}{2}\|y_{n0}\|_H^2 \quad \forall n \ge 1 \tag{13}$$

та

$$\|y_n(t)\|_H^2 \le c_2(\|y_n\|_{X(t_1)} + 1), \tag{14}$$

де $c_2 \equiv const,$ яка не залежить від $n \ge 1$ та t. Звідси виводимо, що

$$\|y_n\|_{X(t_1)} \le k_1, \tag{15}$$

де стала k_1 не залежить від n та t_1. Тому, $y_n \in L_{p_0}([0,t_0];H_n)$, і можемо вважати, що $S_1 = [0,t_0]$. Доведемо, що розв'язок y_n продовжується на весь S . Покладемо $y_n(t_0) = l$ і

$$\xi(t) = \begin{cases} y_n(t), & 0 \le t \le t_0, \\ l, & t_0 < t \le T. \end{cases}$$

Оператор $A: X \to X^*$ обмежений, тому обмеженим, а тим більше, локально обмеженим, буде і відображення $A_n : X_n \to X_n^*$. Справді, якщо $\|y_n\|_{X_n} \le k_0$, то

$$\|A_n(y_n)\|_{X_n^*} = \sup_{\|w_n\|_{X_n}=1} \left|\langle A_n(y_n), w_n\rangle_{X_n}\right| \le \sup_{\|w_n\|_X=1} \left|\langle A(y_n), w_n\rangle_X\right| = \|A(y_n)\|_{X^*} \le l_0.$$

А тому локально обмеженим буде оператор $A_n : C(S;H_n) \to L_{q_0}(S;H_n).$

Таким чином, знайдуться числа $\varepsilon = \varepsilon(\xi) > 0$, $M = M(\xi) > 0$ такі, що

$$\|A_n(y) - f_n\|_{X_n^*} \le M \tag{16}$$

як тільки $\|y - \xi\|_{C(S;H_n)} \le \varepsilon.$

Нехай функція $y \in C(S;H_n)$ задається співвідношенням

$$y(t) = \begin{cases} y_n(t), & 0 \le t \le t_0, \\ \eta(t), & t_0 < t \le T, \|\eta(t) - l\|_{H_n} \le \varepsilon, \\ l + \varepsilon(\eta(t) - l)/\|\eta(t) - l\|_{H_n}, & t_0 < t \le T, \|\eta(t) - l\|_{H_n} > \varepsilon, \end{cases}$$

де $\eta \in C_l = \{ w \in C([t_0,T],H_n) | w(t_0) = l \}$.

Визначимо оператор $G: C_l \to L_{q_0}(S;H_n)$ рівністю

$$(G\eta)(t) = \left(A_n(y) - f_n\right)(t), \quad t_0 \le t \le T.$$

Очевидно, відповідність $C_l \ni \eta \to y \in C(S;H_n)$ неперервна, а із умови $\alpha_2)$ випливає демінеперервність відображення $A_n: C(S;H_n) \to X_n^*$. А тому демінеперервним буде і відображення $G: C_l \to X_n^*$. Крім того, завдяки (16), $\|G(\eta)\|_{X_n^*} = \|A_n(y) - f\|_{X_n^*} \le M \quad \forall \eta \in C_l$.

Таким чином, ми потрапляємо в умови узагальненої теореми Каратеодорі, доведення якої приведено, наприклад, у роботі [1].

Лема 3. Нехай $G: C_l \to X_n^*$ - демінеперервний оператор і справедлива оцінка $\|G(\eta)\|_{X_n^*} \le M \quad \forall \eta \in C_l$. Тоді рівняння $\eta(t) = l - \int_{t_0}^t (G\eta)(\tau)d\tau \quad \forall t \in [t_0,T]$ розв'язне в C_l .

Звідси випливає, що для достатньо малого $\delta > 0$ справедлива оцінка $\|\eta(t) - l\|_{X_n} \le \varepsilon$, $t_0 \le t \le t_0 + \delta.$ Функцію $y_n(t)$, визначену на $[0,t_0]$, продовжимо на інтервал $[0,t_0+\delta]$: $y_n(t) = \eta(t)$, $t_0 < t \le t_0 + \delta.$ Тоді

$$(G\eta)(t) = \left(A_n(y_n) - f_n\right)(t), \quad t \in [t_0, t_0+\delta]$$

і

$$y_n(t) = l - \int_{t_0}^t (G\eta)(\tau)d\tau = y_n(t_0) - \int_{t_0}^t \left(A_n(y_n) - f_n\right)(\tau)d\tau = y_{n0} - \int_0^t \left(A_n(y_n) - f_n\right)(\tau)d\tau,$$

оскільки $y_n(t_0) = y_{n0} - \int_0^{t_0} \left(A_n(y_n) - f_n\right)(\tau)d\tau.$

А це означає, що розв'язок задачі (10), (11) існує на $[0,t_0+\delta]$, належить $L_{p_0}([0,t_0+\delta];H_n)$ і, таким чином, продовжуючи цей процес, приходимо до $S_1 = S$, тобто y_n із $L_{p_0}(S;H_n)$.

Обмеженість послідовності $\{y_n\}$ в просторі X негайно випливає із оцінки (15), а оцінка $\|y_n\|_{C(S;H_n)} \le k_0$ випливає із (14), обмеженість $\{A(y_n)\}$ в X^* очевидна.

Доведемо обмеженість послідовності $\{y_n'\}$ в X_σ^* . Нехай $\pi_n : H \to H_n$ - оператор ортогонального проектування, що задовольняє умову P). Тоді з того, що $\langle y_n'(t), h_i\rangle_V + \langle (Ay_n)(t), h_i\rangle_V = \langle f(t), h_i\rangle_V$, $\quad i = \overline{1,n}$, одержуємо

$$y_n' + \pi_n A(y_n) = \pi_n f.$$

З умови $\alpha_1)$ випливає, що послідовність $\{A(y_n)\}$ обмежена в X^* і відповідно в X_σ^* , а, це означає, шо $\{\pi_n A(y_n)\}$ обмежена в X_σ^* в силу властивостей оператора π_n . Також обмежена в X_σ^* і послідовність $\{\pi_n f\}$. Таким чином, робимо висновок, що $\{y_n'\}$ обмежена в X_σ^* .

Лема 2 доведена.

Отже, завдяки рефлексивності $W_\sigma,\ X,\ H$, теоремі Банаха-Алаоглу існує підпослідовність $\{y_m\} \subset \{y_n\}$, існують $y \in W_\sigma,\ z \in H$ та $d \in X^*$, для яких мають місце збіжності:

$i_1)$ $y_m \to y$ слабко в W_σ;

$i_2)$ $y_m(T) \to z(T)$ слабко в H;

$i_3)$ $A(y_m) \to d$ слабко в X^*.

Тоді для довільних $\varphi \in D(S)$ і $h \in H_n$, використовуючи властивості інтеграла Бохнера, одержуємо при $n_k \ge n$

$$\left\langle \int_S \varphi(t)\Big(y_{n_k}'(t) + (A_{n_k} y_{n_k}(t)\Big)dt, h\right\rangle_V = \left\langle y_{n_k}' + A_{n_k}(y_{n_k}), \varphi h\right\rangle_X = \left\langle f, \varphi h\right\rangle_X = \left\langle \int_S \varphi(t) f(t) dt, h\right\rangle_V .$$

Перейшовши до границі в останній рівності, знаходимо $\left\langle y', \varphi x\right\rangle_X = \left\langle \int_S \varphi(t)\big(f(t) - d(t)\big)dt, x\right\rangle_{V_\sigma}$ $\forall x \in \bigcup_n H_n$, а оскільки $\bigcup_n H_n$ щільна в V_σ (і в V), то

$$y' + d = f \tag{17}$$

як рівність в X_σ^*. Звідси, зокрема, випливає, що $y \in W$.

Доведемо, що $y(0) = y_0$, $y(T) = z$. Для довільного $h \in \bigcup_n H_n$, згідно (17), маємо

$$\int_S \left\langle y'(t), (T-t)h\right\rangle_{V_\sigma} dt = \int_S \left\langle f(t) - d(t), (T-t)h\right\rangle_{V_\sigma} dt = \lim_{n_k \to \infty} \int_S \left\langle f(t) - (Ay_{n_k})(t), (T-t)h\right\rangle_{V_\sigma} dt =$$

$$= \lim_{n_k \to \infty} \int_S \left\langle f(t) - (Ay_{n_k})(t), (T-t)h\right\rangle_{V_\sigma} dt = \lim_{n_k \to \infty} \int_S \left\langle y_{n_k}'(t), (T-t)h\right\rangle_{V_\sigma} dt = \lim_{n_k \to \infty} \left\{\int_S \Big(y_{n_k}(t), h\Big)dt - \Big(y_{n_k}(0), Th\Big)\right\} =$$

$$= \int_S \big(y(t), h\big)dt - \big(y_0, Th\big) = \int_S \left\langle y'(t), (T-t)h\right\rangle_{V_\sigma} dt - \big(y(0) - y_0, Th\big).$$

Але, оскільки $\bigcup_n H_n$ щільна V_σ , то звідси одержуємо ss Аналогічно для $h \in \bigcup_n H_n$ маємо

$$\big(y(T) - y_0, h\big) = \int_S \left\langle y'(t), h\right\rangle_{V_\sigma} dt = \lim_{n_k \to \infty} \int_S \left\langle y_{n_k}'(t), h\right\rangle_{V_\sigma} dt = \lim_{n_k \to \infty} \Big(y_{n_k}(T) - y_{n_k}(0), h\Big) = (z - y_0, h)$$

і, таким чином, $y(T) = z$.

Нам залишається довести, що $d = A(y)$. Скористаємось для цього умовою $\alpha_1)$. Перейшовши, при необхідності, до підпослідовності, із (10), (11) і (17), одержуємо

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left\langle A(y_{n_k}), y_{n_k}\right\rangle_X \le \overline{\lim_{n \to \infty}} \left\langle f - y_{n_k}', y_{n_k}\right\rangle_X \le \overline{\lim_{n \to \infty}} \left\{\left\langle f, y_{n_k}\right\rangle_X + \frac{1}{2}\left(\left\|y_{n_k} 0\right\|_H^2 - \left\|y_{n_k}(T)\right\|_H^2\right)\right\} \le$$

$$\le \overline{\lim_{n \to \infty}} \left\{\left\langle f, y_{n_k}\right\rangle_X + \frac{1}{2}\left(\left\|y_{n_k} 0\right\|_H^2 - \left\|y_{n_k}(T)\right\|_H^2\right)\right\} \le \left\langle f, y\right\rangle_X + \frac{1}{2}\left(\|y_0\|_H^2 - \|y(T)\|_H^2\right) =$$

$$= \int_S \left\langle f(t), y(t)\right\rangle_V dt - \int_S \left\langle y'(t), y(t)\right\rangle_V dt = \int_S \left\langle \mathrm{d}(t), y(t)\right\rangle_V dt = \left\langle \mathrm{d}, \mathrm{y}\right\rangle_X .$$

Проте кожний M_0-псевдомонотонний на W оператор має властивість (M) на W (пропозиція 2), звідки $\mathrm{d} = A(y)$. Таким чином, $y' + A(y) = f$, $y \in W$, $y(0) = y_0$. Теорема доведена.

Покладемо $X_1 = L_{p_1}(S;V_1), \quad X_2 = L_{p_2}(S;V_2) \bigcap L_{p_0}(S;H).$

Наслідок 1. Нехай оператори $A : X_1 \to X_1^*$ та $B : X_2 \to X_2^*$ задовольняють умови $\alpha_1) - \alpha_3)$. Нехай також виконується умова $P)$. Тоді для кожного $f \in X^*$ та $y_0 \in H$ задача (1), (2) має принаймні один розв'язок $y \in W_\sigma$.

Зауваження 4. Для доведення даного твердження досить розглянути оператор $C = A + B$. Тоді задача (1), (2) набуде вигляду (5)-(6).

Далі застосовуємо теорему 1 до цієї задачі з оператором $C : X \to X^*$, де $X = X_1 \bigcap X_2$, $X^* = X_1^* + X_2^*$.

Наслідок 2. Нехай або V_1, або V_2 компактно вкладений в H. Оператор $A : X \to X^*$ задовольняє умови $\alpha_2), \alpha_3)$, обмежений та $A + \lambda I : X \to X^*$ - M_0-псевдомонотонний на W_σ і виконується умова P). Тоді при кожному $f \in X^*$ і $y_0 \in H$ задача (5),(6) має принаймні один розв'язок $y \in W_\sigma$.

5.Висновок

За допомогою методу Фаедо-Гальоркіна можна довести розв'язність диференціально-операторних рівнянь з некоерцитивними нелінійними відображеннями псевдомонотонного типу. Таким чином, для широкого класу еволюційних задач, зокрема, для рівнянь гідродинамічного типу, можна встановити розв'язність та апріорні оцінки для розв'язків.

1. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. - М., 1978 2. *Дубинский Ю.А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения// Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. - М.:ВИНИТИ. - 1976. - №9. - С. 5-130. 3. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. - К., 1999. 4. *Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н.*Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. - К., 2004. 5. *Иваненко В.И., Мельник В.С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. – К., 1988. 6. *Капустян А.В.* Глобальные аттракторы неавтономного уравнения реакции-диффузии // Дифференциальные уравнения. - 2002. - Vol. 38, № 10. - С. 1378-1382. 7. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. - М., 1972. 8. *Мельник В.С.* Об операторных включениях в банаховых пространствах с плотно определенными операторами // Системні дослідження та інформаційні технології. - 2003. - № 3. - С. 120-126. 9. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. - М., 1990. 10. *Brezis H.* Perturbation non lineaire d'operateurs maximaux monotones // C.R. Acad. Sci. Paris. – 1969. – Vol. 269. - P. 566-569. 11. *Groger K.* Zum Galerkin. Verfanhren fur Evolutions qleichungen. Theory of Nonlinear operators . - Proceedings of a summer-school, held in October 1972 at Neuendorf (Hiddensee). - GDR. Berlin: Akademie - Verlag, 1974. - P. 85-104. 12. *Kapustyan A.V., Melnik V.S., Valero J.* Attractors of multivalued dynamical processes generated by phase-field equations // International Journal of Bifurcation and Chaos. - 2003. - Vol. 13, № 7. - P. 1969-1983. 13. *Kasyanov P.O., Melnik V.S., Yasinsky V.V.* Evolution inclusions and inequalities in Banach spaces with W_λ -pseudomonotone maps. – K., 2007. 14. *Kartsatos A.G., Scrypnik I.V.* Topological degree theories for densely defined mappings involving operator of type // Adv. Differential Equations. - 1999. - № 4. - P. 413-456. 15. *Melnik V. S.,Vakulenko A.N.* Topological methods in the theory of operator inclusions with densely defined mappings in Banach spaces // Nonlinear Boundary Valued Problems. - 1999. - Vol. 10 . - P. 132-145.

Надійшла до редколегії 01.10.2007