УДК 517.9

О. Кічмаренко, канд.фіз.-мат.наук, Н. Скрипник, канд.фіз.-мат.наук
E-mail: k-olga@paco.net E-mail: talie@ukr.net

НЕЧІТКІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЗАПІЗНЕННЯМ

Для нечітких диференціальних рівнянь з запізненням доведено теореми існування та єдиності розв'язку, неперервної залежності від початкових функцій. Розглянуто питання обґрунтування схеми часткового усереднення на скінченому проміжку для систем з постійним та асимптотично великим запізненням.

For the fuzzy differential equations with delay theorems of existence and uniqueness of the solution, continuous dependence on initial functions are proved. The question of a substantiation of the scheme of partial averaging on a final interval for systems with constant and asymptotically big delay is considered.

1.Вступ.

Стаття L.A. Zadeh [16] в 1965 р. започаткувала розвиток теорії нечітких множин. В 1983 р. M.L. Puri та D.A. Ralescu [12] ввели поняття H–похідної та інтегралу від нечітких відображень, в якому використовувався підхід M. Hukuhara [6]. В 1987 р. O. Kaleva [7] розглянув нечіткі диференціальні рівняння та довів теорему існування та єдиності для випадку, коли права частина задовольняє умові Ліпшиця. В подальшому нечіткі диференціальні рівняння розглядались в роботах [2,8 - 11,14,15].

2. Основні означення і поняття.

Нехай $conv(R^n)$ – метричний простір непустих компактних опуклих підмножин R^n. Метрика в цьому просторі визначається за допомогою відстані Хаусдорфа

$$h(F,G)=\max\{\sup_{f\in F}\inf_{g\in G}\|f-g\|,\sup_{g\in G}\inf_{f\in F}\|f-g\|\},$$

де під $\|\cdot\|$ розуміється норма в просторі R^n.

Введемо до розгляду простір E^n відображень $u: R^n \to [0,1]$, що задовольняють наступним умовам:

1) u - модальне відображення, тобто існує вектор $x_0 \in R^n$ такий, що $u(x_0)=1$;

2) u - нечітко опукле відображення, тобто для довільних $x, y \in R^n$ та довільного $\lambda \in [0,1]$ виконується нерівність $u(\lambda x+(1-\lambda)y) \ge \min\{u(x),u(y)\}$;

3) u - відображення, напівнеперервне зверху;

4) замикання множини $\{x \in R^n : u(x) > 0\}$ є компактним.

Означення 1. α–зрізкою $[u]^\alpha$ відображення $u \in E^n$ при $0<\alpha\le 1$ назвемо множину $\{x\in R^n : u(x)\ge\alpha\}$. Нульовою зрізкою відображення $u \in E^n$ назвемо замикання множини $\{x \in R^n : u(x) > 0\}$.

Теорема 1 [11]. Якщо $u \in E^n$, то

1^0 $[u]^\alpha \in conv(R^n)$ для всіх $0\le\alpha\le 1$;

2^0 $[u]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1}$ для всіх $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le 1$;

3^0 якщо $\{\alpha_k\}\subset[0,1]$ – неспадна послідовність, що збігається до $\alpha>0$, то $[u]^\alpha = \bigcap_{k\ge1}[u]^{\alpha_k}$.

Навпаки, якщо $\{A^\alpha : 0\le\alpha\le1\}$ – сімейство підмножин R^n, що задовольняють умовам 1^0 - 3^0, то існує $u\in E^n$ таке, що $[u]^\alpha = A^\alpha$ для $0<\alpha\le1$ та $[u]^0 = \overline{\bigcup_{0<\alpha\le1} A^\alpha} \subset A^0$.

Визначимо в просторі E^n метрику $D: E^n\times E^n \to [0,+\infty)$, покладаючи $D(u,v)=\sup_{0\le\alpha\le1} h([u]^\alpha,[v]^\alpha)$.

Нехай I – проміжок в R.

Означення 2 [11]. Відображення $F: I\to E^n$ називається сильно вимірним на I, якщо для всіх $\alpha\in[0,1]$ многозначне відображення $F_\alpha(t)=[F(t)]^\alpha$ вимірне.

Означення 3 [11]. Відображення $F: I\to E^n$ називається інтегрально обмеженим на I, якщо існує інтегрована за Лебегом функція $k(t)$ така, що $\|x\|\le k(t)$ для всіх $x\in F_0(t)$.

Означення 4 [11]. Інтегралом від відображення $F: I\to E^n$ по множині I називається елемент $G\in E^n$ такий, що $[G]^\alpha=\int_I F_\alpha(t)dt$ для всіх $0<\alpha\le1$, де інтеграл від многозначного відображення $F_\alpha(t)$ є інтегралом Ауманна [5].

Теорема 2 [11]. Якщо відображення $F: I\to E^n$ сильно вимірне та інтегрально обмежене, то F інтегроване на I.

Теорема 3 [11]. Нехай $F,G: I\to E^n$ інтегровані на I та $\lambda\in R$. Тоді

1) $\int_I (F(t)+G(t))dt = \int_I F(t)dt + \int_I G(t)dt$;

2) $\int_I \lambda F(t)dt = \lambda\int_I F(t)dt$;

3) функція $D(F(t),G(t))$ інтегрована за Лебегом на I;

4) $D\left(\int_I F(t)dt, \int_I G(t)dt\right) \le \int_I D(F(t),G(t))dt$.

Означення 5 [11]. Відображення $F: I \to E^n$ називається диференційованим в точці $t_0 \in I$, якщо для всіх $\alpha \in [0,1]$ многозначне відображення $F_\alpha(t)$ диференційоване за Хукухарою [6] в точці t_0, його похідна дорівнює $D_H F_\alpha(t_0)$ та сімейство множин $\{D_H F_\alpha(t_0) : \alpha \in [0,1]\}$ визначає елемент $F'(t_0) \in E^n$.

Якщо відображення $F: I \to E^n$ диференційоване в точці $t_0 \in I$, то $F'(t_0)$ називається нечіткою похідною відображення $F(t)$ в точці t_0.

Теорема 4 [11]. Нехай відображення $F: I \to E^n$ диференційоване та припустимо, що його нечітка похідна $F': I \to E^n$ інтегрована на I. Тоді для довільного $t \in I$ маємо $F(t) = F(t_0) + \int_{t_0}^{t} F'(s)ds$.

Означення 5 [11]. Відображення $F: I \to E^n$ називається слабо неперервним в точці $t_0 \in I$, якщо для довільного фіксованого $\alpha \in [0,1]$ та довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon,\alpha) > 0$ таке, що $h(F_\alpha(t), F_\alpha(t_0)) < \varepsilon$ для всіх $t \in I$ таких, що $|t - t_0| < \delta(\varepsilon,\alpha)$.

Означення 6. Відображення $F: I \times E^n \times \ldots \times E^n \to E^n$ називається слабо неперервним в точці $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{m0}) \in I \times E^n \times \ldots \times E^n$, якщо для довільного фіксованого $\alpha \in [0,1]$ та довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon,\alpha) > 0$ таке, що $h([F(t,x_1,\ldots,x_m)]^\alpha, [F(t_0, x_{10}, \ldots, x_{m0})]^\alpha) < \varepsilon$ для всіх $t \in I$, $x_i \in E^n$ таких, що $|t - t_0| < \delta(\varepsilon,\alpha)$ та $h([x_i]^\alpha, [x_{i0}]^\alpha) < \delta(\varepsilon,\alpha)$, $i = \overline{1,m}$.

Означення 7. Кажуть, що відображення $F: I \times E^n \times \ldots \times E^n \to E^n$ задовольняє умові Ліпшиця за змінними $x_1, \ldots, x_m$, якщо існує стала $L > 0$ така, що для довільної пари $(t, x_1, \ldots, x_m), (t, y_1, \ldots, y_m) \in I \times E^n \times \ldots \times E^n$ та всіх $\alpha \in [0,1]$ виконується нерівність $h\left([F(t,x_1,\ldots,x_m)]^\alpha, [F(t,y_1,\ldots,y_m)]^\alpha\right) \le L \sum_{i=1}^{m} h\left([x_i]^\alpha, [y_i]^\alpha\right)$.

Зрозуміло, що якщо відображення $F: I \times E^n \times \ldots \times E^n \to E^n$ задовольняє умові Ліпшиця за змінними $x_1, \ldots, x_m$ зі сталою $L > 0$, то для довільної пари $(t, x_1, \ldots, x_m), (t, y_1, \ldots, y_m) \in I \times E^n \times \ldots \times E^n$ виконується нерівність

$$D(F(t,x_1,\ldots,x_m), F(t,y_1,\ldots,y_m)) \le L \sum_{i=1}^{m} D(x_i, y_i).$$

Позначимо через

$$I_0 = [t_0, T],\ B(x_0, b) = \{x \in E^n : D(x, x_0) \le b\},\ J_0 = I_0 \times B(x_0, b).$$

Розглянемо нечітке диференціальне рівняння

$$x' = f(t,x), x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

де $f: J_0 \to E^n$ – слабо неперервне відображення.

Означення 8 [11]. Відображення $x: [t_0, t_1] \to E^n, t_1 \le T$ називається розв'язком задачі (1), якщо воно є слабо неперервним та для всіх $t \in [t_0, t_1]$ задовольняє інтегральному рівнянню $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$.

Теорема 5 [9]. Припустимо, що відображення $f: J_0 \to E^n$ є слабо неперервним та задовольняє умові Ліпшиця по x. Тоді існує єдиний розв'язок $x = x(t)$ задачі (1), визначений на проміжку $[t_0, t_0 + \delta]$, де

$$\delta = \min\left\{T - t_0, \frac{b}{M}\right\},\ M = \sup_{(t,x)\in J_0} D(f(t,x), \hat{0}),\ \hat{0} \in E^n \text{ таке, що } \hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in R^n \setminus 0\ . \end{cases}$$

3 Тереми існування, єдиности та неперервної залежності від початкових функцій розв'язку нечіткого диференціального рівняння із запізненням.

Розглянемо нечітке диференціальне рівняння із запізненням

$$x'(t) = F(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \ldots, x(t - \tau_m(t))), \tag{2}$$
$$x(t) = \varphi(t), t \in E_{t_0},$$

де $E_{t_0} = \bigcup_{i=1}^{m} E_{t_0}^{(i)}$, $E_{t_0}^{(i)}$ – множини, що містять точку t_0 та ті значення $t - \tau_i(t)$, для яких $t - \tau_i(t) < t_0$ при $t \ge t_0$, $F: R \times E^n \times \ldots \times E^n \to E^n$, $\varphi: R \to E^n$.

Покажемо, що для рівняння (2) виконуються теореми існування, єдиності та неперервної залежності від початкових функцій, які є аналогічними до теорем для рівняння в просторі R^n [3, 4].

Теорема 6. Нехай F слабо неперервне відображення в околі точки $(t_0, \varphi(t_0), \varphi(t_0-\tau_1(t_0)), \ldots, \varphi(t_0-\tau_m(t_0)))$, що задовольняє умові Ліпшиця зі сталою λ по всім змінним, починаючи з другої; початкова функція $\varphi(t)$ слабо неперервна на E_{t_0}; всі функції $\tau_i(t)$ неперервні на $t_0 \le t \le t_0+L$, $L>0$ та невід'ємні. Тоді існує єдиний розв'язок $x(t)$ задачі (2) при $t_0 \le t \le t_0+\sigma$, де σ достатньо мале.

Доведення. За означенням 8 розв'язку відображення $x(t)$ задовольняє інтегральному рівнянню

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s), x(s-\tau_1(s)), \ldots, x(s-\tau_m(s)))ds, t \in [t_0, t_0+\sigma], \quad (3)$$

$$x(t) = \varphi(t),\ t \in E_{t_0}.$$

Введемо до розгляду оператор $A(x(t)) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s), x(s-\tau_1(s)), \ldots, x(s-\tau_m(s)))ds,\ t \in [t_0, t_0+\sigma],$

$$A(x(t)) = x(t) = \varphi(t),\ t \in E_{t_0},$$

визначений в повному метричному просторі C_0 всіх слабо неперервних на $E_{t_0} \bigcup [t_0, t_0+\sigma]$ функцій таких, що на E_{t_0} всі ці функції співпадають з $\varphi(t)$, а на проміжку $[t_0, t_0+\sigma]$ відрізняються від $\varphi(t_0)$ не більше, ніж на величину $\eta > 0$ в метриці $\rho(x(t), y(t)) = \sup\limits_{[t_0, t_0+\sigma]} D(x(t), y(t))$.

Нехай стала $M>0$ така, що $D(F(t, x(t), x(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_m(t))), \hat{0}) < M$ при $t \in [t_0, t_0+\sigma]$.

Функція $A(x(t))$ слабо неперервна на $E_{t_0} \bigcup [t_0, t_0+\sigma]$, так як на E_{t_0} функція $A(x(t))$ співпадає зі слабо неперервною функцією $\varphi(t)$, а на проміжку $[t_0, t_0+\sigma]$ для довільних двох точок t та t' маємо

$$D\Big(A(x(t)), A(x(t'))\Big) =$$

$$= D\Big(\varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s), x(s-\tau_1(s)), \ldots, x(s-\tau_m(s)))ds,\ \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t'} F(s, x(s), x(s-\tau_1(s)), \ldots, x(s-\tau_m(s)))ds\Big) < M\,|t-t'|.$$

На проміжку $[t_0, t_0+\sigma]$ функція $A(x(t))$ відрізняється від $\varphi(t_0)$ не більше, ніж на η в метриці $\rho(\cdot,\cdot)$, так як $D(A(x(t)), \varphi(t_0)) < M\sigma < \eta$ при $\sigma < \frac{\eta}{M}$. Таким чином, оператор A відображає простір C_0 в себе.

Крім того,

$$D(A(x(t)), A(y(t))) =$$

$$= D\Big(\varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s), x(s-\tau_1(s)), \ldots, x(s-\tau_m(s)))ds,\ \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s), y(s-\tau_1(s)), \ldots, y(s-\tau_m(s)))ds\Big) \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} D(F(s, x(s), x(s-\tau_1(s)), \ldots, x(s-\tau_m(s))), F(s, y(s), y(s-\tau_1(s)), \ldots, y(s-\tau_m(s))))ds \le$$

$$\le \lambda \int_{t_0}^{t} \left[D(x(s), y(s)) + \sum_{i=1}^{m} D(x(s-\tau_i(s)), y(s-\tau_i(s))) \right] ds \le \lambda\sigma(m+1)\rho(x(t), y(t))$$

при $t \in [t_0, t_0+\sigma]$ та $D(A(x(t)), A(y(t))) = 0$ при $t \in E_{t_0}$. Нехай $\sigma \le \frac{\beta}{(m+1)\lambda}$, де $0 < \beta < 1$, тоді оператор $A(x(t))$ є стискаючим.

Таким чином, для $\sigma \le \min\left\{\frac{\eta}{M}, \frac{\beta}{(m+1)\lambda}\right\}$ за теоремою Банаха [1] існує єдина нерухома точка оператора A, а значить і єдиний розв'язок рівняння (2), визначений на проміжку $t_0 \le t \le t_0+\sigma$.

Теорема 7. Нехай виконані всі умови теореми 1 та початкові функції $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ такі, що $D(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \le \delta$, $\delta > 0$ для всіх $t \in E_{t_0}$. Тоді справедлива оцінка

$$D(x_1(t), x_2(t)) \le \delta e^{\lambda(m+1)(t-t_0)}, \quad t \ge t_0, \quad (4)$$

де $x_1(t)$ та $x_2(t)$ – розв'язки рівняння (2) з початковими функціями $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ відповідно, тобто розв'язки рівняння (2) неперервно залежать від початкових функцій.

Доведення. За означенням 8 розв'язку функції $x_1(t)$ та $x_2(t)$ задовольняють інтегральним рівнянням вигляду (3) з початковими функціями $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ відповідно. Тоді

$$D(x_1(t), x_2(t)) =$$

$$= D\Big(\varphi_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_1(s), x_1(s-\tau_1(s)), \ldots, x_1(s-\tau_m(s)))ds,\ \varphi_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_2(s), x_2(s-\tau_1(s)), \ldots, x_2(s-\tau_m(s)))ds\Big) \le$$

$$\le D(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) + D\Big(\int_{t_0}^{t} F(s, x_1(s), x_1(s-\tau_1(s)), \ldots, x_1(s-\tau_m(s)))ds,\ \int_{t_0}^{t} F(s, x_2(s), x_2(s-\tau_1(s)), \ldots, x_2(s-\tau_m(s)))ds\Big) \le$$

$$\le D(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) + \int_{t_0}^{t} D(F(s, x_1(s), x_1(s-\tau_1(s)), \ldots, x_1(s-\tau_m(s))), F(s, x_2(s), x_2(s-\tau_1(s)), \ldots, x_2(s-\tau_m(s))))ds \le$$

$$\le D(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[D(x_1(s), x_2(s)) + \sum_{i=1}^{m} D(x_1(s-\tau_i(s)), x_2(s-\tau_i(s))) \right] ds. \quad (5)$$

Позначимо $z(t)=\max\left\{\delta,\max_{[t_0,t]} D(x_1(s),x_2(s))\right\}$. Тоді з (5) отримаємо

$$z(t)\le\delta+\lambda(m+1)\int_{t_0}^{t} z(s)ds. \tag{6}$$

З (6), використовуючи лему Гронуола - Белмана, отримуємо необхідну нерівність (4).

4. Усереднення нечітких диференціальних рівнянь з запізненням.

Розглянемо тепер питання обґрунтування схеми часткового усереднення для нечітких диференціальних рівнянь з запізненням вигляду

$$x'(t,\varepsilon)=\varepsilon F\left(t,x(t,\varepsilon),x(t-\tau,\varepsilon)\right), \tag{7}$$

$$x(s,\varepsilon)=\varphi(s,\varepsilon),\quad -\tau\le s\le 0,$$

де $\varepsilon>0-$ малий параметр, $t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$, $L-$ стала.

У відповідність рівнянню (7) поставимо наступне частково усереднене рівняння

$$y'(t,\varepsilon)=\varepsilon F^0\left(t,y(t,\varepsilon),y(t-\tau,\varepsilon)\right), \tag{8}$$

$$y(s,\varepsilon)=\varphi(s,\varepsilon), -\tau\le s\le 0,$$

де

$$\lim_{T\to\infty} D\left(\frac{1}{T}\int_0^T F^0(s,x,z)ds,\frac{1}{T}\int_0^T F(s,x,z)ds\right)=0\,. \tag{9}$$

Теорема 8. Нехай в області $Q=\{t\ge 0; x,z\in Q'\subset E^n\}$ виконані наступні умови:

1) функції $F(t,x,z), F^0(t,x,z)$ та $\varphi(s,\varepsilon)$ задовольняють умовам теореми 6 та існує стала M така, що

$$D(F(t,x,z),\hat{0})\le M, D(F^0(t,x,z),\hat{0})\le M;$$

2) рівномірно відносно $x,z\in Q'$ існує границя (9);

3) розв'язок рівняння (8) існує при $0<\varepsilon\le\sigma$ та належить Q' разом з деяким $\delta-$ околом для $t\in[0,L^*\varepsilon^{-1}]$, де L^*- додатна стала.

Тоді для довільних $\eta>0$ та $0<L\le L^*$ існує $0<\varepsilon^0\le\sigma$ таке, що для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon^0]$ та $t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$ справедлива оцінка

$$D(x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon))\le\eta. \tag{10}$$

Доведення. Розглянемо допоміжне диференціальне рівняння

$$z'(t,\varepsilon)=\varepsilon F\left(t,z(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon)\right),\quad z(0,\varepsilon)=\varphi(0,\varepsilon). \tag{11}$$

За означенням 8 функції $x(t,\varepsilon)$ та $z(t,\varepsilon)$ при $t\ge 0$ задовольняють інтегральним рівнянням

$$x(t,\varepsilon)=\varphi(0,\varepsilon)+\int_0^t F(s,x(s,\varepsilon),x(s-\tau,\varepsilon))ds,$$

$$z(t,\varepsilon)=\varphi(0,\varepsilon)+\int_0^t F(s,z(s,\varepsilon),z(s,\varepsilon))ds.$$

Тоді

$$D\left(x(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon)\right)\le\varepsilon D\left(\int_0^t F\left(s,x(s,\varepsilon),x(s-\tau,\varepsilon)\right)ds,\int_0^t F\left(s,z(s,\varepsilon),z(s,\varepsilon)\right)ds\right). \tag{12}$$

При $t\in[0,\tau]$ приймаючи до уваги обмеженість функції $F(s,x,z)$, отримаємо

$$D\left(x(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon)\right)\le\varepsilon\left[D\left(\int_0^t F(s,x(s,\varepsilon),x(s-\tau,\varepsilon))ds,\hat{0}\right)+D\left(\int_0^t F(s,z(s,\varepsilon),z(s,\varepsilon))ds,\hat{0}\right)\right]\le 2\varepsilon M\tau. \tag{13}$$

При $t\in\left(\tau,L\varepsilon^{-1}\right]$ з (12) маємо

$$D\left(x(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon)\right)\le$$

$$\le\varepsilon D\left(\int_0^t F\left(s,x(s,\varepsilon),x(s-\tau,\varepsilon)\right)ds,\int_0^t F\left(s,x(s,\varepsilon),x(s,\varepsilon)\right)ds\right)+\varepsilon D\left(\int_0^t F\left(s,x(s,\varepsilon),x(s,\varepsilon)\right)ds,\int_0^t F\left(s,z(s,\varepsilon),z(s,\varepsilon)\right)ds\right)\le$$

$$\le\varepsilon\lambda\int_0^t D\left(x(s-\tau,\varepsilon),x(s,\varepsilon)\right)ds+2\varepsilon\lambda\int_0^t D\left(x(s,\varepsilon),z(s,\varepsilon)\right)ds. \tag{14}$$

Очевидно, що

$$\int_0^t D\left(x(s-\tau,\varepsilon),x(s,\varepsilon)\right)ds=$$

$$=\int_0^t D\left(x(s-\tau,\varepsilon),x(s-\tau,\varepsilon)+\varepsilon\int_{s-\tau}^{s} F(s_1,x(s_1,\varepsilon),x(s_1-\tau,\varepsilon))ds_1\right)ds\le\int_0^t\varepsilon M\tau ds\le M\tau L. \tag{15}$$

Тоді, використовуючи лему Гронуола - Белмана, з (14) отримуємо

$$D\left(x(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon)\right)\le\varepsilon\lambda M\tau Le^{2\varepsilon\lambda t}. \tag{16}$$

Аналогічно для розв’язків рівняння (8) та рівняння

$$w'(t,\varepsilon)=\varepsilon F^0\left(t,w(t,\varepsilon),w(t,\varepsilon)\right),\quad w(0,\varepsilon)=\varphi(0,\varepsilon) \tag{17}$$

отримуємо

$$D\left(y(t,\varepsilon),w(t,\varepsilon)\right)\le\varepsilon\lambda M\tau Le^{2\varepsilon\lambda t}. \tag{18}$$

Рівняння (17) є частково усередненим для рівняння (11).

Для довільних η та $L\in\left(0,L^*\right]$ можна підібрати [2] $\varepsilon^1\in[0,\sigma]$ таке, що для $\varepsilon\in\left(0,\varepsilon^1\right]$ та $t\in\left[0,L\varepsilon^{-1}\right]$ справедлива наступна оцінка

$$D\left(w(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon)\right)\le\frac{\eta}{2}. \tag{19}$$

З (13), (16), (18), (19) для $\varepsilon^0=\min\left\{\varepsilon^1,\frac{\eta}{4\lambda M\tau Le^{2\lambda L}},\frac{\eta}{4M\tau}\right\}$ отримуємо оцінку (10). Теорема доведена.

Розглянемо ще одну загальну схему усереднення для нечітких диференціальних рівнянь з запізненням вигляду

$$x'(t,\varepsilon)=\varepsilon F\left(t,x(t,\varepsilon),x(t-\tau_1,\varepsilon),x\left(t-\frac{\tau_2}{\varepsilon},\varepsilon\right)\right), \tag{20}$$

$$x(s,\varepsilon)=\varphi(s,\varepsilon),-\frac{\tau_2}{\varepsilon}\le s\le 0.$$

Рівнянню (20) поставимо у відповідність наступне частково усереднене рівняння

$$y'(t,\varepsilon)=\varepsilon F^0\left(t,y(t,\varepsilon),y(t-\tau_1,\varepsilon),y\left(t-\frac{\tau_2}{\varepsilon},\varepsilon\right)\right), \tag{21}$$

$$y(s,\varepsilon)=\varphi(s,\varepsilon),\ -\frac{\tau_2}{\varepsilon}\le s\le 0,$$

де

$$\lim_{T\to\infty}D\left(\frac{1}{T}\int_0^T F(t,x,y,z)\,dt,\frac{1}{T}\int_0^T F^0(t,x,y,z)\,dt\right)=0\,. \tag{22}$$

Теорема 9. Нехай в області $Q=\left\{t\ge 0;x,y,z\in Q'\subset E^n\right\}$ виконуються наступні умови:

1) функції $F(t,x,y,z),F^0(t,x,y,z)$ є слабо неперервними, рівномірно обмеженими сталою M та задовольняють умові Ліпшиця зі сталою λ за всіма змінними, починаючи з другої;

2) початкова функція $\varphi(s,\varepsilon)$ є слабо неперервною і такою, що

$$D\left(\varphi(s',\varepsilon),\varphi(s'',\varepsilon)\right)\le\varepsilon\lambda\left(s'-s''\right),\ \varphi(s,\varepsilon)\in D,\ -\frac{\tau_2}{\varepsilon}\le s\le 0;$$

3) рівномірно відносно $x,y,z\in Q'$ існує границя (22);

4) розв'язок рівняння (21) існує при $0<\varepsilon\le\sigma_1$ та належить області Q' разом з деяким $\delta-$ околом для $t\in[0,L^*\varepsilon^{-1}]$, де $L^*>0$ - стала.

Тоді для довільних $\eta>0$ та $0<L\le L^*$ існує $0<\varepsilon^0\le\sigma_1$ таке, що для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon^0]$ та $t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$ справедлива оцінка

$$D\left(x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon)\right)\le\eta. \tag{23}$$

Доведення. Розглянемо розв’язки систем (20), (21) на інтервалі $\left[0,\frac{\tau_2}{\varepsilon}\right]$:

$$x'_1(t,\varepsilon)=\varepsilon F\left(t,x_1(t,\varepsilon),x_1(t-\tau_1,\varepsilon),\varphi\left(t-\frac{\tau_2}{\varepsilon},\varepsilon\right)\right),\quad x_1(0,\varepsilon)=\varphi(0,\varepsilon);$$

$$y'_1(t,\varepsilon)=\varepsilon F^0\left(t,y_1(t,\varepsilon),y_1(t-\tau_1,\varepsilon),\varphi\left(t-\frac{\tau_2}{\varepsilon},\varepsilon\right)\right),\quad y_1(0,\varepsilon)=\varphi(0,\varepsilon).$$

За теоремою 8 для довільного $\eta_1>0$ існує $\varepsilon_1\in(0,\sigma]$ таке, що для $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ та $t\in\left(0,\frac{\tau_2}{\varepsilon}\right]$ справедлива оцінка

$$D\left(x_1(t,\varepsilon),y_1(t,\varepsilon)\right)\le\eta_1. \tag{24}$$

Розглянемо тепер розв’язки $y_2(s,\varepsilon)$ та $z_2(s,\varepsilon)$ системи (15) на проміжку $\left[\frac{\tau_2}{\varepsilon},\frac{2\tau_2}{\varepsilon}\right]$ з початковими функціями

$$y_2(s,\varepsilon)=y_1(s,\varepsilon),\ s\in\left[0,\frac{\tau_2}{\varepsilon}\right],\ \ z_2(s,\varepsilon)=x_1(s,\varepsilon),\ s\in\left[0,\frac{\tau_2}{\varepsilon}\right].$$

За теоремою 7 для довільного $\eta_2>0$ існує $\delta>0$ таке, що для $D\left(y_1(s,\varepsilon),x_1(s,\varepsilon)\right)\le\delta$ маємо

$$D\left(y_2(s,\varepsilon), z_2(s,\varepsilon)\right) \le \frac{\eta_2}{2},\ \ s \in \left[\frac{\tau_2}{\varepsilon}, \frac{2\tau_2}{\varepsilon}\right]. \tag{25}$$

Тепер розглянемо розв'язки $x_2(s,\varepsilon)$ та $z_2(s,\varepsilon)$ систем (20), (21) на проміжку $\left[\frac{\tau_2}{\varepsilon}, \frac{2\tau_2}{\varepsilon}\right]$ з початковими функціями

$$x_2(s,\varepsilon) = x_1(s,\varepsilon),\ s \in \left[0, \frac{\tau_2}{\varepsilon}\right],\ \ z_2(s,\varepsilon) = x_1(s,\varepsilon),\ s \in \left[0, \frac{\tau_2}{\varepsilon}\right].$$

За теоремою 8 для довільного $\eta_2 > 0$ існує $\bar{\varepsilon}_2$ таке, що для $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_2]$ та $t \in \left[\frac{\tau_2}{\varepsilon}, \frac{2\tau_2}{\varepsilon}\right]$ справедлива оцінка

$$D\left(x_2(t,\varepsilon), z_2(t,\varepsilon)\right) \le \frac{\eta_2}{2}. \tag{26}$$

Виберемо $\hat{\varepsilon}_2 \in (0,\sigma]$ так, щоб $\eta_1 \le \delta$ для $\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}_2]$. Тоді для $\varepsilon_2 = \min\{\bar{\varepsilon}_2, \hat{\varepsilon}_2\}$ з (25), (26) отримуємо

$$D\left(y_2(s,\varepsilon), x_2(s,\varepsilon)\right) \le \eta_2,\ \ s \in \left[\frac{\tau_2}{\varepsilon}, \frac{2\tau_2}{\varepsilon}\right].$$

Нехай $k < \frac{L}{\tau_2} \le k+1$. Тоді після k кроків для $\varepsilon^0 = \min\limits_{1 \le i \le k} \varepsilon_i$ ми отримуємо твердження теореми.

Зауваження. Якщо відображення $F^0(t,x,y,z)$ не залежить від t, то з рівняння (22) випливає існування середнього, тобто

$$F^0(x,y,z) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F^0(t,x,y,z)\,dt.$$

В цьому випадку теорема 9 обґрунтовує схему повного усереднення.

5.Висновки.

Таким чином, в статті обґрунтовано існування, єдиність та неперервна залежність від початкових функцій розв'язку нечіткого диференціального рівняння із запізненням, а також обґрунтовано схеми усереднення для рівнянь такого виду, які містять малий параметр.

1. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. – М., 1988. 2. *Комлева Т.А., Плотников А.В., Плотникова Л.И.* Усреднение дифференциальных включений // Труды Одесского политехнического университета. – 2007. - №1 (27). – С.185 – 190. 3. *Мышкис А.Д.* Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Успехи матем. наук. - 1949. – IV, вып.5. – С. 99 – 141. 4. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., 1971. 5. *Aumann R.J.* Integrals of set - valued functions // J. Math. Anal. Appl. – 1965. – 12. – P. 1 – 12. 6. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Func. Ekvacioj. – 1967. – № 11. – P. 205 – 223. 7. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy sets and systems. – 1987. – Vol. 24, 3. – P. 301 – 317. 8. *Kaleva O.* The Cauchy problem for fuzzy differential equations // Fuzzy sets and systems. – 1990. – Vol. 35, 3. – P. 389 – 396. 9. *Laksmikantham V., Leela S., Vatsala A.S.* Interconnection between set and fuzzy differential equations // Nonlinear Analysis. – 2003. – Vol. 54.– P. 351 - 360. 10. *Negoita C.V., Ralescu D.A.* Applications of fuzzy sets to systems analysis. – New York, Toronto, 1975. 11. *Park J.Y., Han H.K.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations // Internat. J. Math. and Math. Sci. – 1999. – Vol. 22, 2. – P. 271 – 279. 12. *Puri M.L., Ralescu D.A.* Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. Appl. – 1983. – Vol. 91. – P. 552 – 558. 13. *Puri M.L., Ralescu D.A.* Fuzzy random variables // J. Math. Anal. Appl. – 1986. – Vol.114, 2. – P. 409 – 422. 14. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – Vol. 24, 3. – P. 319 – 330. 15. *Song S.J., Wu C.X.* Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – Vol. 111. – P. 55–67. 16. *Zadeh L.* Fuzzy sets // Inform. and Control. – 1965. – 8. – P. 338 - 353.

Надійшла до редколегії 20.06.2007