УДК 517.927.8

П.Самусенко, канд.фіз.-мат.наук
E-mail: psamusenko@ukr.net

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ І ТОЧКОЮ ПОВОРОТУ

Використовуючи метод примежевих функцій, у роботі побудовано розв'язок задачі Коші для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженням і точкою повороту.

Using the method of boundary functions, the solution of the initial-value problem of the singularly perturbed system of differential equations with degeneration and a turning point is constructed.

1.Вступ

Розглянемо задачу Коші

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon f(x,t,\varepsilon)\,,\ t\in[0;T]\,, \tag{1}$$

$$x(0,\varepsilon) = x_0\,, \tag{2}$$

де $A(t)$, $B(t)$ – квадратні матриці n-го порядку, $f(x,t,\varepsilon)$ – задана n-вимірна вектор-функція, $x = x(t,\varepsilon)$ – шукана вектор-функція, ε – малий параметр.

За умови простих елементарних дільників в'язки $A(t) - \lambda B(t)$ і неособливої матриці біля похідних задачу (1), (2) розв'язав В.П. Яковець [7]. У випадку кратних елементарних дільників зазначена задача розглядалась в [5]. При цьому припускалось, що матриця $B(t)$ на відрізку $[0;T]$ змінює свій ранг, що значно ускладнювало алгоритм побудови розв'язку задачі Коші.

2.Об'єкт та методи досліджень

У даній роботі наведено асимптотичні формули для розв'язку задачі (1), (2) у випадку, коли корені відповідного характеристичного рівняння

$$\det(A(t) - \lambda B(t)) = 0 \tag{3}$$

на відрізку $[0;T]$ змінюють свою кратність. Отже, нехай:

1) $A(t)$, $B(t) \in C^{\infty}_{[0;T]}$;

2) вектор-функція $f(x,t,\varepsilon)$ має нескінченну кількість неперервних частинних похідних за всіма змінними на множині

$G = \{(x,t,\varepsilon) : \| x \| \le a,\ 0 \le t \le T,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\}$, $\| x_0 \| \le a$;

3) в'язка матриць $A(0) - \lambda B(0)$ має $n-1$ "скінченних" елементарних дільників і один "нескінченний" елементарний дільник;

4) в'язка матриць $A(t) - \lambda B(t)$, $t\in(0;T]$, має n "скінченних" елементарних дільників;

5) $\operatorname{Re}\lambda_1(t) < 0$, $t\in(0;T]$, $\operatorname{Re}\lambda_i(t) \le 0$, $t\in[0;T]$, і $\lambda_i(0) \ne 0$, $i = \overline{2,k}$; $\operatorname{Re}\lambda_i(t) \le 0$, $\lambda_i(t) \ne 0$, $t\in(0;T]$, і $\lambda_i(0) = 0$, $i = \overline{k+1,m}$; $\lambda_i(t) \equiv 0$, $t\in[0;T]$, $i = \overline{m+1,n}$, де $\lambda_i(t)$ – корені рівняння (3).

Згідно умов 3) – 5) існують неособливі матриці $P(t)$, $Q(t)$ такі, що

$P(t)A(t)Q(t) = \Omega(t)$, $P(t)B(t)Q(t) = H(t)$,

$\Omega(t) = diag\{1, W(t)\}$, $W(t) = diag\{W_1(t), W_2(t)\}$,

$W_1(0) = diag\{\lambda_2(0), \lambda_3(0), ..., \lambda_k(0)\}$, $W_2(0)$ – нульова матриця $(n-k)$-го порядку;

$H(t) = diag\{h_{11}(t), E_{n-1}(t)\}$, $E_{n-1}(0) = E_{n-1}$,

E_{n-1} – одинична матриця $(n-1)$-го порядку, $h_{11}(0) = 0$ [8]. Причому $P(t)$, $Q(t) \in C^{\infty}_{[0;T]}$.

Покладаючи $x(t,\varepsilon) = Q(t)y(t,\varepsilon)$, запишемо систему (1) наступним чином:

$$\varepsilon H(t)\frac{dy}{dt} = (\Omega(t) - \varepsilon H(t)Q^{-1}(t)Q'(t))y + \varepsilon P(t)f(Qy,t,\varepsilon)\,,$$

або

$$\varepsilon H(t)\frac{dy}{dt} = (\Omega(0) + \varepsilon C_1(t,\varepsilon))y + \varepsilon g(y,t,\varepsilon)\,, \tag{4}$$

Де $C_1(t,\varepsilon) = \dfrac{t}{\varepsilon}\dfrac{d\Omega(\theta t)}{dt} - H(t)Q^{-1}(t)Q'(t)$, $0 < \theta < 1$; $g(y,t,\varepsilon) = P(t)f(Qy,t,\varepsilon)$.

Зазначимо, що $\| C_1(t,\varepsilon) \| = O(1)$, $t\in[0;k\varepsilon]$ (число k визначимо нижче).

Початкова умова (2) при цьому набуде вигляду

$$y(0,\varepsilon) = Q^{-1}(0)x_0 \equiv y_0 \tag{5}$$

Розв'язок задачі (4), (5) на відрізку $[0;k\varepsilon]$ шукатимемо у вигляді

$$y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t,\varepsilon) + \Pi y(\tau,\varepsilon)\,, \tag{6}$$

де $\bar{y}(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s \bar{y}_s(t,\varepsilon)$ – регулярний ряд, а $\Pi y(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s \Pi_s y(\tau,\varepsilon)$ – примежевий ряд, $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ [1, с. 48].

Нехай $\bar{g}(t,\varepsilon) = g(\bar{y}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ і $\Pi g(\tau,\varepsilon) = g(\bar{y}(\varepsilon\tau,\varepsilon) + \Pi y(\tau,\varepsilon),\varepsilon\tau,\varepsilon) - g(\bar{y}(\varepsilon\tau,\varepsilon),\varepsilon\tau,\varepsilon)$.

Розкладемо вектор-функції $\bar{g}(t,\varepsilon)$ та $\Pi g(\tau,\varepsilon)$ у формальні ряди за степенями ε:

$$\bar{g}(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s \bar{g}_s(t)\,,\ \Pi g(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s \Pi_s g(\tau)\,.$$

У такому ж вигляді запишемо $H(\varepsilon\tau)$ та $C_1(\varepsilon\tau,\varepsilon)$:

$$H(\varepsilon\tau) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s \frac{\tau^s}{s!}\frac{d^s H(0)}{dt^s} \equiv \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s H_s(\tau)\,,$$

$$C_1(\varepsilon\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s \frac{\tau^s}{s!}\left(\tau\frac{d^{s+1}\Omega(0)}{dt^{s+1}} - \frac{d^s(H(0)Q^{-1}(0)Q'(0))}{dt^s}\right) \equiv \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s C_s(\tau)\,.$$

Підставимо ряд (6) до системи (4) і зрівняємо окремо вирази, що залежать від t і τ:

$$\varepsilon H(t)\frac{d\bar{y}}{dt} = (\Omega(0) + \varepsilon C_1(t,\varepsilon))\bar{y} + \varepsilon\bar{g}(t,\varepsilon)\,, \tag{7}$$

$$H(\varepsilon\tau)\frac{d\Pi y}{d\tau} = (\Omega(0) + \varepsilon C_1(\varepsilon\tau,\varepsilon))\Pi y + \varepsilon\Pi g(\tau,\varepsilon)\,. \tag{8}$$

У тотожностях (7), (8) зрівняємо коефіцієнти біля однакових степенів ε. Зокрема, біля ε^0 матимемо:

$$\Omega(0)\bar{y}_0(t,\varepsilon) = 0\,, \tag{9}$$

$$H(0)\frac{d\Pi_0 y(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = \Omega(0)\Pi_0 y(\tau,\varepsilon)\,. \tag{10}$$

Звідси $\bar{y}_0(t,\varepsilon) = \Phi\alpha_0(t,\varepsilon)$, де $\Phi = [e_{k+1},...,e_n]$, e_i, $i = \overline{k+1,n}$, – вектор, i-та компонента якого дорівнює одиниці, решта компонент дорівнюють нулю, $\alpha_0(t,\varepsilon)$ – деяка $(n-k)$-вимірна вектор-функція, що буде визначена нижче;

$$\Pi_{01}y(\tau,\varepsilon) = 0\,,$$

$$\Pi_{02}y(\tau,\varepsilon) = \exp(W(0)\tau)c_0(\varepsilon)\,,$$

$\Pi_{01}y(\tau,\varepsilon)$ – перша компонента вектор-функції $\Pi_0 y(\tau,\varepsilon)$, $\Pi_{02}y(\tau,\varepsilon)$ – вектор-функція, що містить решту компонент $\Pi_0 y(\tau,\varepsilon)$, $c_0(\varepsilon)$ – $(n-1)$-вимірний вектор довільних сталих.

Вектор $c_0(\varepsilon)$ підберемо так, щоб

$$\bar{y}_0(0,\varepsilon) + \Pi_0 y(0,\varepsilon) = y_0\,. \tag{11}$$

Для цього вимагатимемо виконання наступної умови:

6) $y_{01} = 0$, де y_{01} – перша компонента вектора y_0.

Тоді для виконання рівності (11) достатньо покласти

$$\{c_0(\varepsilon)\}_i = \{y_0\}_i - \{\Phi\alpha_0(0,\varepsilon)\}_i\,,\ i = \overline{2,n}\,.$$

За рахунок вибору $\alpha_0(0,\varepsilon) = \alpha_0$ можна вважати, що $\{c_0(\varepsilon)\}_i = 0$, $i = \overline{k+1,n}$.

При ε^1 матимемо:

$$\Omega(0)\bar{y}_1(t,\varepsilon) = H(t)\frac{d\bar{y}_0(t,\varepsilon)}{dt} - C_1(t,\varepsilon)\bar{y}_0(t,\varepsilon) - \bar{g}_0(t)\,, \tag{12}$$

$$H(0)\frac{d\Pi_1 y(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = \Omega(0)\Pi_1 y(\tau,\varepsilon) - H_1(\tau)\frac{d\Pi_0 y(\tau,\varepsilon)}{d\tau} + C_0(\tau)\Pi_0 y(\tau,\varepsilon) + \Pi_0 g(\tau)\,. \tag{13}$$

Система (12) сумісна тоді і тільки тоді, коли

$$\Phi^* H(t)\Phi\frac{d\alpha_0(t,\varepsilon)}{dt} = \Phi^*(C_1(t,\varepsilon)\Phi\alpha_0(t,\varepsilon) + \bar{g}_0(t))\,, \tag{14}$$

де Φ^* – матриця, спряжена до Φ.

Оскільки $\det\Phi^* H(0)\Phi = 1$, то можна вважати, що $\det\Phi^* H(t)\Phi \neq 0$, $t\in[0;k\varepsilon]$. Таким чином, система (14) набуде вигляду

$$\frac{d\alpha_0(t,\varepsilon)}{dt} = g(\alpha_0,t,\varepsilon)\,. \tag{15}$$

Нехай $\alpha_0 = \alpha_0(t,\varepsilon)$ – розв'язок системи (15), що задовольняє умову $\alpha_0(0,\varepsilon) = \alpha^0$. Тоді $\bar{y}_1(t,\varepsilon) = \Phi\alpha_1(t,\varepsilon) + \tilde{y}_1(t,\varepsilon)$, де $\tilde{y}_1(t,\varepsilon)$ – деякий частинний розв'язок (12).

Сталу k підберемо так, щоб $\| Q(t)(\bar{y}_0(t,\varepsilon) + \Pi_0 y(t/\varepsilon,\varepsilon)) \| \le a_0 < a$, для всіх $t\in[0;k\varepsilon]$

Система (13) розщепиться на дві системи $\Pi_{11}y(\tau,\varepsilon) = -l_1(\tau,\varepsilon)$, і $\dfrac{d\Pi_{12}y(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = W(0)\Pi_{12}y(\tau,\varepsilon) + l_2(\tau,\varepsilon)$,

де $l_1(\tau,\varepsilon)$ – перша компонента вектор-функції $l(\tau,\varepsilon)$, $l_2(\tau,\varepsilon)$ – вектор-функція, що містить решту компонент $l(\tau,\varepsilon)$, $l(\tau,\varepsilon) = -H_1(\tau)\dfrac{d\Pi_0 y(\tau,\varepsilon)}{d\tau} + C_0(\tau)\Pi_0 y(\tau,\varepsilon) + \Pi_0 g(\tau)$.

Звідси $\Pi_{12}y(\tau,\varepsilon) = \exp(W(0)\tau)c_1(\varepsilon) + \int\limits_0^\tau \exp(W(0)(\tau - s))l_2(s,\varepsilon)ds$.

7) Нехай $g_1(y_0,0,0) = 0$ де $g_1(y_0,0,0)$ – перша компонента вектора $g(y_0,0,0)$.

Тоді сталу $c_1(\varepsilon)$ можна підібрати так, щоб $\bar{y}_1(0,\varepsilon) + \Pi_1 y(0,\varepsilon) = 0$ [4].

Використовуючи метод математичної індукції, таким чином можна визначити і решту членів рядів $\bar{y}(t,\varepsilon)$ та $\Pi y(\tau,\varepsilon)$. При цьому, умова, аналогічна до умови 7) на j-му кроці матиме вигляд $\dfrac{\partial^{j-1} g_1(y_0,0,0)}{\partial\varepsilon^{j-1}} = 0$, $j \ge 2$, [4].

Нехай φ_2, $\varphi_3,\ldots,$ φ_n – власні вектори матриці $\Omega(0)$ відносно $H(0)$; $\tilde{\varphi}$ – власний вектор матриці $H(0)$, що відповідає нульовому власному значенню; ψ_2, $\psi_3,\ldots,$ ψ_n та $\tilde{\psi}$ – елементи нуль-простору матриць $(\Omega(0) - \lambda_i(0)H(0))^*$ та $H^*(0)$ відповідно. Вектори ψ_2, $\psi_3,\ldots,$ ψ_n та $\tilde{\psi}$ визначимо так, щоб

$(H(0)\varphi_i,\psi_j) = \delta_{ij}$, $i,j = \overline{2,n}$, $(\Omega(0)\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) = 1$, δ_{ij} – символ Кронекера [3, c. 35].

Система $\varepsilon H(0)\dfrac{dy}{dt} = (\Omega(0) + \varepsilon C_1(t,\varepsilon))y$ має $n-1$ формальних лінійно незалежних розв'язків вигляду

$$y_i(t,\varepsilon) = u_i(t,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda_i(t,\varepsilon)dt\right),\ i = \overline{2,n},$$

де $u_i(t,\varepsilon)$ – n-вимірні вектори, а $\lambda_i(t,\varepsilon)$ – скалярні функції, причому

$$u_i(t,\varepsilon) = \varphi_i + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k u_k^{(i)}(t),\ \lambda_i(t,\varepsilon) = \lambda_i(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t). \qquad (16)$$

Зробимо в системі (4) заміну

$$y(t,\varepsilon) = z(t,\varepsilon) + y_m(t,\varepsilon), \qquad (17)$$

де $y_m(t,\varepsilon) = \sum\limits_{s=0}^{m}\varepsilon^s(\bar{y}_s(t,\varepsilon) + \Pi_s y(\tau,\varepsilon))$, а $z(t,\varepsilon)$ – невідома вектор-функція. Дістанемо

$$\varepsilon H(t)\frac{dz}{dt} = (\Omega(0) + \varepsilon C_1(t,\varepsilon))z + h(z,t,\varepsilon), \qquad (18)$$

$$h(z,t,\varepsilon) = \varepsilon g(z + y_m(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + (\Omega(0) + \varepsilon C_1(t,\varepsilon))y_m(t,\varepsilon) - \varepsilon H(t)\frac{dy_m(t,\varepsilon)}{dt}.$$

Зазначимо, що $\| h(0,t,\varepsilon) \| = O(\varepsilon^{m+1})$, $t \in [0;k\varepsilon]$. Побудуємо матриці $Q_1(t,\varepsilon) = [U_m(t,\varepsilon),\tilde{\varphi}]$, $P_1 = [\Psi,\tilde{\psi}]^*$,

де $U_m(t,\varepsilon)$ – прямокутна $(n\times(n-1))$-матриця, що містить перші m членів виразів (16), $\Psi = [\psi_2,\ldots,\psi_n]$.

Покладемо

$$z(t,\varepsilon) = Q_1(t,\varepsilon)u(t,\varepsilon) \qquad (19)$$

і домножимо обидві частини системи (18) зліва на P_1: $\varepsilon P_1 H(t)Q_1(t,\varepsilon)\dfrac{du}{dt} = P_1 L(t,\varepsilon)Q_1(t,\varepsilon)u + P_1 h(Q_1(t,\varepsilon)u,t,\varepsilon)$,

$L(t,\varepsilon) = \Omega(0) + \varepsilon C_1(t,\varepsilon) - \varepsilon H(t)\dfrac{d}{dt}$, або

$$\varepsilon\begin{pmatrix}\Psi^* H(t)U_m(t,\varepsilon) & \Psi^* H(t)\tilde{\varphi}\\ \tilde{\psi}^* H(t)U_m(t,\varepsilon) & \tilde{\psi}^* H(t)\tilde{\varphi}\end{pmatrix}\frac{du}{dt} = \begin{pmatrix}\Psi^* L(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon) & \Psi^* L(t,\varepsilon)\tilde{\varphi}\\ \tilde{\psi}^* L(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon) & \tilde{\psi}^* L(t,\varepsilon)\tilde{\varphi}\end{pmatrix}u + P_1 h(Q_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon). \qquad (20)$$

Оскільки $\Psi^* H(0)U_m(0,0) = \| (H(0)\varphi_i,\psi_j) \|_2^n = E_{n-1}$, і $\tilde{\psi}^* L(0,0)\tilde{\varphi} = (\Omega(0)\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) = 1$, то елементи матриці $(\Psi^* H(t)U_m(t,\varepsilon))^{-1}$ та функція $(\tilde{\psi}^* L(t,\varepsilon)\tilde{\varphi})^{-1}$ рівномірно обмежені на відрізку $[0;t_0]$, $t_0 \le T$.

Зазначимо, що

$\Psi^* L(t,\varepsilon)\tilde{\varphi} = O(\varepsilon)$,

$L(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon) = H(0)U_m(t,\varepsilon)\Lambda_m(t,\varepsilon) + \varepsilon(H(t) - H(0))U'_m(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}D(t,\varepsilon)$,

де $\Lambda_m(t,\varepsilon) = diag\{\lambda_2^{(m)}(t,\varepsilon),\ldots,\lambda_n^{(m)}(t,\varepsilon)\}$,

$D(t,\varepsilon)$ – $(n\times(n-1))$-матриця, компоненти якої обмежені на $[0;t_0]$ [6, c. 50-53].

Покажемо, що існує єдиний розв'язок системи (20) такий, що

$$u(0,\varepsilon) = 0. \qquad (21)$$

Задача (20), (21) рівносильна задачі про знаходження неперервного розв'язку рівняння

$$u(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t U(t,\varepsilon)U^{-1}(s,\varepsilon)r(u,s,\varepsilon)ds\,, \tag{22}$$

де $U(t,\varepsilon)$ – фундаментальна матриця системи

$$\varepsilon\begin{pmatrix}E_{n-1} & 0\\ 0 & \tilde\psi^* H(t)\tilde\varphi\end{pmatrix}\frac{du}{dt}=\begin{pmatrix}\Lambda_m(t,\varepsilon) & 0\\ 0 & \tilde\psi^*\Omega(t)\tilde\varphi\end{pmatrix}u\,,$$

$$r(u,s,\varepsilon)=(P_1H(s)Q_1(s,\varepsilon))^{-1}\left(\left(\begin{pmatrix}\varepsilon\Psi^*(H(s)-H(0))U'_m(s,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}\Psi^*D(s,\varepsilon) & \Psi^*L(s,\varepsilon)\tilde\varphi\\ \tilde\psi^*L(s,\varepsilon)U_m(s,\varepsilon) & -\varepsilon\tilde\psi^*H(s)Q^{-1}(s)Q'(s)\tilde\varphi\end{pmatrix}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\varepsilon\begin{pmatrix}\Psi^*(H(s)-H(0))U_m(s,\varepsilon) & \Psi^*H(s)\tilde\varphi\\ \Psi^*H(s)U_m(s,\varepsilon) & 0\end{pmatrix}U'(s,\varepsilon)U^{-1}(s,\varepsilon)\right)u+P_1h(Q_1(s,\varepsilon)u,s,\varepsilon)\right).$$

Нехай мають місце умови:

8) $\tilde\psi^*H(t)\tilde\varphi=h_{11}(t)\equiv th(t)$, $\mathrm{Re}\,h(0)<0$;

9) $|\tilde\psi^*(r_m(\bar y_m(t,\varepsilon),t,\varepsilon)+r_m(\Pi_m y(t,\varepsilon),t,\varepsilon))|=O(\varepsilon^{m+1}t)$, $t\in[0;k\varepsilon]$, $r_m(\bar y_m(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ та $r_m(\Pi_m y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ – додаткові члени формул Тейлора за степенями ε для функцій $g(\bar y_m(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ та $g(\bar y_m(\varepsilon\tau,\varepsilon)+\Pi_m y(\tau,\varepsilon),\varepsilon\tau,\varepsilon)-g(\bar y_m(\varepsilon\tau,\varepsilon),\varepsilon\tau,\varepsilon)$.

Тоді, використовуючи метод послідовних наближень, можна показати, що система (22) на відрізку $[0;k\varepsilon]$ має єдиний розв'язок $u=u(t,\varepsilon)$ такий, що правильна умова (21) і $\|u(t,\varepsilon)\|=O(\varepsilon^{m-1})$ [4].

Покладемо $y(k\varepsilon,\varepsilon)=y_\varepsilon$, (23) де y_ε побудований за формулами (17), (19), (22) при $t=k\varepsilon$.

Розв'язок системи (4) на відрізку $[k\varepsilon;t_0]$ шукатимемо у вигляді $y(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\bar y_s(t)$. Для визначення $\bar y_s(t)$, $s\ge 0$, підставимо ряд $y(t,\varepsilon)$ до системи (4) і зрівняємо коефіцієнти біля однакових степенів параметра ε:

$$\Omega(t)\bar y_0(t)=0\,, \tag{24}$$

$$\Omega(t)\bar y_s(t)=H(t)Q^{-1}(t)Q'(t)\bar y_{s-1}(t)+H(t)\frac{d\bar y_{s-1}(t)}{dt}-\bar g_{s-1}(t)\,,\ s\ge 1\,. \tag{25}$$

Нехай $\Omega(t)=\begin{pmatrix}\Omega_1(t) & \Omega_2(t)\\ \Omega_3(t) & \Omega_4(t)\end{pmatrix}$, де $\Omega_1(t)$ – квадратна матриця m-го порядку.

Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що $\det\Omega_1(t)\ne 0$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$, $t_0\le T$. Тоді

$$\bar y_0(t)=\begin{pmatrix}\Omega_1^{-1}(t)\Omega_2(t)\\ -E_{n-m}\end{pmatrix}\beta_0(t)\equiv M(t)\beta_0(t)\,,$$

де $\beta_0(t)$ – деяка $(n-m)$-вимірна вектор-функція, що буде визначена нижче [2, с. 61].

Розглянемо систему (25), коли $s=1$:

$$\Omega(t)\bar y_1(t)=H(t)Q^{-1}(t)Q'(t)\bar y_0(t)+H(t)\frac{d\bar y_0(t)}{dt}-\bar g_0(t)\,. \tag{26}$$

Система (26) сумісна тоді і тільки тоді, коли

$K^*(t)H(t)M(t)\dfrac{d\beta_0(t)}{dt}=K^*(t)(\bar g_0(t)-H(t)M'(t)\beta_0(t)-H(t)Q^{-1}(t)Q'(t)M(t)\beta_0(t))$, де $K(t)=\begin{pmatrix}(\Omega_3(t)\Omega_1^{-1}(t))^*\\ -E_{n-m}\end{pmatrix}$.

Покажемо, що $\det K^*(t)H(t)M(t)\ne 0$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$. Справді, нехай $k_i(t)$, $i=\overline{1,n-m}$, – рядки матриці $K^*(t)$, $m_i(t)$, $i=\overline{1,n-m}$, – стовпці матриці $M(t)$. Тоді, якщо припустити, що для деякого $t=\bar t$ $\det K^*(\bar t)H(\bar t)M(\bar t)=0$, то $\sum_{i=1}^{n-m}\gamma_i(k_j(\bar t),H(\bar t)m_i(\bar t))=0$, $j=\overline{1,n-m}$, $\gamma_i\in R$, або $(k_j(\bar t),H(\bar t)\sum_{i=1}^{n-m}\gamma_i m_i(\bar t))=0$, $j=\overline{1,n-m}$.

Оскільки $m(\bar t)=\sum_{i=1}^{n-m}\gamma_i m_i(\bar t)$ – власний вектор матриці $\Omega(\bar t)$ відносно $H(\bar t)$, що відповідає нульовому власному значенню і $(k_j(\bar t),H(\bar t)m(\bar t))=0$, $j=\overline{1,n-m}$, то алгебраїчна система $\Omega(\bar t)z=H(\bar t)m(\bar t)$ розв'язна відносно z, що суперечить умові 4). Таким чином, $\det K^*(t)H(t)M(t)\ne 0$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$, і

$$\frac{d\beta_0(t)}{dt}=(K^*(t)H(t)M(t))^{-1}K^*(t)(\bar g_0(t)-H(t)M'(t)\beta_0(t)-H(t)Q^{-1}(t)Q'(t)M(t)\beta_0(t))\,. \tag{27}$$

10) Нехай система (27) має розв'язок $\beta_0 = \beta_0(t)$, $t \in [k\varepsilon; t_0]$, такий, що $\| Q(t)M(t)\beta_0(t) \| \le \frac{a_0}{2}$ для всіх $t \in [k\varepsilon; t_0]$. Тоді $\bar{y}_1(t) = M(t)\beta_1(t) + \tilde{y}_1(t)$, де $\tilde{y}_1(t)$ – частинний розв'язок системи (26).

Аналогічно можна довести сумісність систем (25) для $s \ge 2$.

11) Нехай $\|\tilde{y}_s(t)\| = O(1)$, $t \in [k\varepsilon; t_0]$, $s \ge 1$.

Зазначимо, що вектор-функції $\beta_s(t)$, $s \ge 1$, взагалі кажучи, визначатимуться з лінійних систем з особливою точкою $t = 0$.

Зауваження. Покажемо, що за певних умов, накладених на матриці $\Omega(t)$ і $H(t)$ існує стала $c > 0$ така, що

$$\det K^*(t)H(t)M(t) \ge c, \quad t \in [k\varepsilon; t_0]. \tag{28}$$

Нехай $H(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) & H_2(t) \\ H_3(t) & H_4(t) \end{pmatrix}$, де $H_1(t)$ – квадратна матриця m-го порядку.

12) $\| \Omega_1^{-1}(t)\Omega_2(t) \| = O(t)$ і $\| \Omega_3(t)\Omega_1^{-1}(t) \| = O(1)$, $t \in [k\varepsilon; t_0]$, або $\| \Omega_1^{-1}(t)\Omega_2(t) \| = O(1)$ і $\| \Omega_3(t)\Omega_1^{-1}(t) \| = O(t)$, $t \in [k\varepsilon; t_0]$.

Тоді, враховуючи структуру матриці $K^*(t)H(t)M(t)$, існуватиме стала $c > 0$ така, що матиме місце умова (28).

Зробивши в системі (4) заміну (17), де $y_m(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s \bar{y}_s(t)$,дістанемо

$$\varepsilon H(t)\frac{dz}{dt} = (\Omega(t) - \varepsilon H(t)Q^{-1}(t)Q'(t))z + q(z,t,\varepsilon), \tag{29}$$

$$q(z,t,\varepsilon) = \varepsilon g(z + y_m(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + (\Omega(t) - \varepsilon H(t)Q^{-1}(t)Q'(t))y_m(t,\varepsilon) - \varepsilon H(t)\frac{dy_m(t,\varepsilon)}{dt}.$$

За побудовою $\| q(0,t,\varepsilon) \| = O(\varepsilon^{m+1})$, $t \in [k\varepsilon; t_0]$. Припустимо виконання умов:

13) система $\varepsilon H(t)\frac{dz}{dt} = (\Omega(t) - \varepsilon H(t)Q^{-1}(t)Q'(t))z$ має фундаментальну матрицю $Z(t,s,\varepsilon)$ ($Z(t,s,\varepsilon) = E$) таку, що $\| Z(t,s,\varepsilon) \| = O(\varepsilon^{-\gamma})$, $\gamma \ge 0$ і $\| Q(t)Z(t,k\varepsilon,\varepsilon)(y_\varepsilon - y_{[\gamma]+1}(k\varepsilon,\varepsilon)) \| \le \frac{a_0}{2}$ ($[\gamma]$ – ціла частина γ) для всіх $k\varepsilon \le s \le t \le t_0$;

14) існує неперервна функція $\eta(t,\varepsilon)$, $0 \le t \le t_0$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, така, що

$\| f(u,t,\varepsilon) - f(v,t,\varepsilon) \| \le \eta(t,\varepsilon)\| u - v \|$,

причому $\eta(t,\varepsilon)\varepsilon^{-\gamma-1} = O(1)$ для всіх $\| u \| \le a$, $\| v \| \le a$.

Тоді, використовуючи метод послідовних наближень, можна довести існування та єдиність розв'язку $z = z(t,\varepsilon)$ системи $z(t,\varepsilon) = Z(t,k\varepsilon,\varepsilon)(y_\varepsilon - y_m(k\varepsilon,\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{k\varepsilon}^{t} Z(t,s,\varepsilon)H^{-1}(s)q(z,s,\varepsilon)ds$.

При цьому, $\| z(t,\varepsilon) \| = O(1)$, $t \in [k\varepsilon; t_0]$.

Теорема. Нехай виконуються умови 1) – 12), 14), 15) і системи для визначення вектор-функцій $\beta_s(t)$, $s \ge 1$, мають такі розв'язки, що $\| M(t)\beta_s(t) \| = O(1)$, $t \in [k\varepsilon; t_0]$, $s \ge 1$. Тоді для $m \ge \gamma + 1$, $t \in [0; t_0]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$, $\varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, задача (1), (2) має єдиний розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$.

Наслідок. Нехай виконуються умови 1) – 15). Тоді для $m \ge \gamma + 1$, $t \in [0; t_0]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$, $\varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, задача (1), (2) має єдиний розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$.

3. Результати та їх обговорення

Результати роботи обговорювались на Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння та суміжні питання" (21 – 26 травня 2007 р., м. Москва).

4. Висновки

У роботі побудовано розв'язок задачі Коші для сингулярно збуреної слабо нелінійної системи диференціальних рівнянь з виродженою матрицею біля похідних і точкою повороту. При цьому, розглянуто випадок простих елементарних дільників граничної в'язки матриць.

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с. 2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с. 3. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с. 4. *Самусенко П.Ф.* Про побудову асимптотичних розв'язків нелінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженням // Наукові вісті НТУУ "КПІ", 2006. – № 1 (45). – С. 144 – 150. 5. *Самусенко П.Ф.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням // Наукові вісті НТУУ "КПІ", 2006. – № 3 (47). – С. 139 – 147. 6. *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – К.: Вища шк., 1991. – 207 с. 7. *Яковець В.П.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням: Автореф. дис. ... док. фіз.-мат. наук. – К., 1992. – 32 с. 8. *Sibuya R.* Simplification of a System of Linear Ordinary Differential Equations about a Singular Point // Funkcialaj Ekvacioj, 1962. – № 4. – P. 29 – 56.

Надійшла до редколегії 24.04.2007