УДК 517.912:512.816

О. Омелян, асист.
Email: k26@pntu.edu.ua

ІНВАРІАНТНІСТЬ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ХЕМОТАКСИСУ ВІДНОСНО АЛГЕБРИ ГАЛІЛЕЯ

Проведено групову класифікацію систем рівнянь хемотаксису, інваріантних відносно перетворень Галілея.

The group classification systems of chemotaxis equations, which are invariance under Galilei transformations, is performed.

1. Вступ.

В сучасних біофізичних дослідженнях процеси симетричного розповсюдження бактеріальних популяційних хвиль, коли кільця хемотаксису зберігають різко окреслену форму і рухаються зі сталою швидкістю, яка залежить від рухливості бактерій та їх хемотаксисних властивостей, добре описуються математичними моделями, основаними на рівняннях Келлера-Сегеля [7]

$$\begin{aligned} &S_t = D_S S_{xx} + k_1 g(S) b, \\ &b_t = -\nu \partial_x [b\chi(S) S_x] + D_b b_{xx} + k_2 g(S) b, \end{aligned} \tag{1}$$

де $S_t = \frac{\partial S}{\partial t}$, $S_x = \frac{\partial S}{\partial x}$, $b_t = \frac{\partial b}{\partial t}$, $S_{xx} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, $b_{xx} = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, причому $S(t,x)$ - концентрація субстрату-аттрактанту, який споживається бактеріями, $b(t,x)$ - щільність бактерій, $g(S)$ - питома швидкість росту бактерій, $\chi(S)$ - функція хемотаксисної відповіді, D_S та D_b - коефіцієнти дифузії субстрату та бактерій відповідно; ν, k_1 k_2 - сталі; t, x - часова та просторова змінні відповідно. Моделлю Келлера-Сегеля та її деякими модифікаціями описується також формування та поширення хемотаксисних кілець Адлера [6] та різні процеси структуроутворення в бактеріальних колоніях при їх взаємодії [2]. Перепишемо систему (1) у звичних для математичних досліджень позначеннях, узагальнивши її наступним чином

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ f(u^1)u^2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} g^1(u^1,u^2) \\ g^2(u^1,u^2) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де $g^1(u^1,u^2)$, $g^2(u^1,u^2)$, $f(u^1)$ - довільні гладкі функції своїх аргументів, причому $f \neq 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, $u^a = u^a(x_0, x_1)$, $a = \overline{1,2}$, x_0 - часова, x_1 - просторова змінні, нижній індекс означає диференціювання по відповідній змінній. Зауважимо, що система (2) є частинним випадком системи нелінійних рівнянь реакції дифузії

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[F(u^1,u^2) \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + G(u^1,u^2), \tag{3}$$

де $F(u^1,u^2) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $G(u^1,u^2) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$, $f^{ab} = f^{ab}(u^1,u^2)$, $g^a = g^a(u^1,u^2)$, $a,b = \overline{1,2}$.

В даній роботі поставимо перед собою задачу: дослідити симетрійні властивості системи (2) в залежності від значення функцій $f(u^1)$, $g^1(u^1,u^2)$, $g^2(u^1,u^2)$ та сталих λ_1, λ_2.

2. Ядро симетрії.

Для дослідження симетрійних властивостей системи (2) застосуємо алгоритм Лі [3], [5], [8]. Подіявши продовженням інфінітезимального оператора

$$X = \xi^\mu \partial_\mu + \eta^a \partial_{u^a}, \tag{4}$$

де $\xi^\mu = \xi^\mu(x_0, x_1, u^1, u^2)$, $\eta^a = \eta^a(x_0, x_1, u^1, u^2)$, $\mu = \overline{0,1}, a = \overline{1,2}$, на систему (2), після переходу на многовид, та розщеплення отриманої системи по похідних функцій u^a, одержимо визначальну систему для визначення координат інфінітезимального оператора (4) та функцій f, g^1, g^2. Визначальна система складається з трьох підсистем:

$$S_1(\xi,\eta) = 0, \quad S_2(\xi,\eta,f) = 0, \quad S_3(\xi,\eta,f,g^1,g^2) = 0.$$

Система $S_1 = 0$ є системою диференціальних рівнянь лише відносно функцій ξ^μ і η^a

$$\begin{aligned} &\xi^1_0 = \xi^\mu_{u^a} = \eta^1_{u^2} = \eta^a_{u^b u^c} = 0, \quad a,b,c = 1;2, \\ &\xi^0_0 = 2\xi^1_1, \; 2\lambda_1 \eta^1_{1u^1} = -\xi^1_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Система $S_2(\xi,\eta,f) = 0$ пов'язує між собою координати інфінітезимального оператора ξ^μ, η^a та функцію $f(u^1)$ і має вигляд

$$\eta^1\dot f+(\eta^1_{u^1}-\eta^2_{u^2}+\tfrac{1}{u^2}\eta^2)f+\tfrac{1}{u^2}(\lambda_2-\lambda_1)\eta^2_{u^1}=0,$$
$$u^2\eta^1_1\dot f+(u^2\eta^1_{1u^1}+\tfrac{1}{2}\eta^2_1)f+\lambda_2\eta^2_{1u^1}=0, \qquad (6)$$
$$\eta^1_1 f+2\lambda_2\eta^2_{1u^2}=-\xi^1_0.$$

Система $S_3(\xi,\eta,f,g^1,g^2)=0$ складається з двох диференціальних рівнянь

$$\eta^1 g^1_{u^1}+\eta^2 g^1_{u^2}=(\eta^1_{u^1}-\xi^0_0)g^1+\eta^1_{u^2}g^2+\eta^1_0-\lambda_1\eta^1_{11},$$
$$\eta^1 g^2_{u^1}+\eta^2 g^2_{u^2}=(\eta^2_{u^2}-\xi^0_0)g^2+\eta^2_{u^1}g^1+\eta^2_0-\lambda_2\eta^2_{11}-u^2 f\eta^1_{11}, \qquad (7)$$

які пов'язують між собою функції g^1,g^2 та функції ξ^μ,η^a,f.

Зауваження. Покладаючи $f,g^1,g^2,\lambda_1,\lambda_2$ довільними у системах (5), (6),(7), одержимо

$$\xi^0=d_0,\quad \xi^1=d_1,\quad \eta^1=\eta^2=0, \qquad (8)$$

де d_0, d_1 - довільні сталі. В цьому випадку оператор (4) має вигляд

$$X=d_0\partial_0+d_1\partial_1. \qquad (9)$$

Оператор (9) породжує алгебру

$$A_0=<\partial_0,\ \partial_1>, \qquad (10)$$

яку назвемо **ядром симетрії системи** (2).

3. Необхідні умови розширення ядра симетрії.

Дослідимо, при яких значеннях функцій f,g^1,g^2 симетрія системи (2) ширша порівняно з алгеброю A_0. Необхідними умовами розширення симетрії є наступне твердження.

Теорема 1. Якщо система (2) допускає розширення ядра симетрії A_0, то функція $f(u^1)$ набуває одного із наступних виглядів:

1. $f=\varphi(u^1)$, 2. $f=\lambda$, 3. $f=\frac{\lambda}{u^1}$, 4. $f=\frac{2\lambda_1}{u^1}$, 5. $f=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{u^1}$,

де $\varphi(u^1)$ - довільна гладка функція, λ - довільна стала.

Доведення. Для доведення теореми розв'яжемо систему визначальних рівнянь, що складається із систем $S_1=0$ та $S_2=0$ [4].

Неважко бачити, що загальним розв'язком системи $S_1(\xi,\eta)=0$ є функції

$$\xi^0=2A(x_0),\ \ \xi^1=\dot A(x_0)x_1+B(x_0),$$
$$\eta^1=-\frac{1}{2\lambda_1}[\frac{1}{2}\ddot A(x_0)x_1^2+\dot B(x_0)x_1+C(x_0)]u^1+\beta^1(x_0,x_1),$$
$$\eta^2=\alpha^{21}(x_0,x_1)u^1+\alpha^{22}(x_0,x_1)u^2+\beta^2(x_0,x_1),$$

де $A,B,C,\alpha^{2a},\beta^a$ - довільні гладкі функції своїх аргументів.

З умов сумісності рівнянь системи (6) одержуються умови $\alpha^{21}_1=\alpha^{22}_1=\beta^2_1=0$. Тоді система $S_2=0$ набуде вигляду

$$(\alpha^{11}u^1+\beta^1)\dot f=-\alpha^{11}f,$$
$$(\alpha^{11}_1u^1+\beta^1_1)f=2\lambda_1\alpha^{11}_1, \qquad (11)$$
$$(\alpha^{21}u^1+\beta^2)f=(\lambda_1-\lambda_2)\alpha^{21}.$$

Розв'язання системи (11) приводить до появи 5-ти нееквівалентних випадків вигляду функції f, наведених у формулюванні теореми.

Розглянемо кожен з цих випадків окремо і покажемо, що при вказаних значеннях функції $f(u^1)$ можливе розширення симетрії системи (3) порівняно з A_0.

1. $f=\varphi(u^1)$ - довільна гладка функція. З системи (11) випливає

$$\xi^1_0=\alpha^{a1}=\beta^a=0. \qquad (12)$$

Врахувавши (12), одержимо

$$\xi^0=2c_1x_0+d_0,\ \ \xi=c_1x_1+d_1,\ \ \eta^1=0,\ \ \eta^2=\alpha(x_0)u^2, \qquad (13)$$

де $\alpha(x_0)$ - довільна гладка функція, c_1,d_0,d_1 - довільні сталі. Порівнявши формули (8) і (13), легко бачити можливість розширення симетрії (10).

Аналогічно доводиться можливість розширення симетрії (10) у випадках 2-5. Не повторюючи цих міркувань, наведемо остаточний вигляд координат інфінітезимального оператора для кожної з вказаних $f(u^1)$.

2. При $f=\lambda$ координати інфінітезимального оператора (4) мають вигляд

$$\xi^0 = 2c_1x_0 + d_0,\ \xi = c_1x_1 + d_1,\ \eta^1 = \beta(x_0),\ \ \eta^2 = \alpha(x_0)u^2, \tag{14}$$

де $\beta(x_0)$ - довільна гладка функція.

3. При $f=\frac{\lambda}{u^1}$ (λ - довільна стала) з системи (11) знаходимо

$$\xi^0 = 2c_1x_0 + d_0,\ \xi = c_1x_1 + d_1,\ \eta^1 = C(x_0)u^1,\ \eta^2 = \alpha(x_0)u^2, \tag{15}$$

де $C(x_0)$ - довільна гладка функція.

4. При $f=\frac{2\lambda_1}{u^1}$ маємо

$$\begin{aligned}&\xi^0 = 2A(x_0),\ \ \xi^1 = \dot{A}(x_0)x_1 + B(x_0),\\ &\eta^1 = -\frac{1}{2\lambda_1}[\frac{1}{2}\ddot{A}(x_0)x_1^2 + \dot{B}(x_0)x_1 + C(x_0)]u^1,\ \ \eta^2 = \alpha(x_0)u^2,\end{aligned} \tag{16}$$

де $A(x_0),\ B(x_0),\ C(x_0)$ - довільні гладкі функції.

5. При $f=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{u^1}$ одержимо

$$\begin{aligned}&\xi^0 = 2c_1x_0 + d_0,\ \ \xi = c_1x_1 + d_1,\ \ \eta^1 = a(x_0)u^1,\\ &\eta^2 = \sigma(x_0)u^1 + \alpha(x_0)u^2,\end{aligned} \tag{17}$$

де $\sigma(x_0)$ - довільна гладка функція.

Теорему доведено.

4. Галілеївська інваріантність.

Теорема 1 є тільки необхідною умовою розширення ядра симетрії системи (2). Достатньою умовою такого розширення є система $S_3(\xi,\eta,f,g^1,g^2)=0$. Згідно даної системи вигляд координат інфінітезимального оператора для кожної з п'яти наведених функцій $f(u^1)$, буде залежати від вигляду функцій $g^a(u^1,u^2)$. Повна класифікація симетрійних властивостей системи (2) для кожної з п'яти, вказаних в теоремі 1 функцій $f(u^1)$, є окремою задачею.

В даній роботі детально дослідимо симетрійні властивості системи (2) у випадку $f(u^1)=\frac{2\lambda_1}{u^1}$. Класифікація симетрійних властивостей системи (2) для інших чотирьох виглядів функції $f(u^1)$ буде проведена в наступних роботах.

Отже, розглянемо систему (1) вигляду

$$\begin{pmatrix}u^1\\ u^2\end{pmatrix}_0 = \partial_1\left[\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 2\lambda_1\dfrac{u^2}{u^1} & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u^1\\ u^2\end{pmatrix}_1\right] + \begin{pmatrix}g^1(u^1,u^2)\\ g^2(u^1,u^2)\end{pmatrix}. \tag{18}$$

Як було показано в результаті доведення теореми 1, у випадку $f=\frac{2\lambda_1}{u^1}$ розв'язком систем $S_1(\xi,\eta)=0$ та $S_2(\xi,\eta,f)=0$ є наступні координати інфінітезимального оператора X

$$\begin{aligned}&\xi^0 = 2A(x_0),\ \ \xi^1 = \dot{A}(x_0)x_1 + B(x_0),\\ &\ \ \eta^1 = \gamma(x_0,x_1)u^1,\ \ \eta^2 = \alpha(x_0)u^2,\end{aligned} \tag{19}$$

де

$$\gamma(x_0,x_1) = -\frac{1}{2\lambda_1}[\frac{1}{2}\ddot{A}(x_0)x_1^2 + \dot{B}(x_0)x_1 + C(x_0)], \tag{20}$$

$A(x_0)$, $B(x_0)$, $C(x_0)$, $\alpha(x_0)$ - довільні гладкі функції. Щоб отримати принципово інше ніж у випадку 3 теореми 1 розширення симетрії, необхідне виконання умови $\gamma_1 \neq 0$. Це можливо тільки при $\dot{B}\neq 0$. (Випадок, у якому $\dot{B}=0, \ddot{A}\neq 0$, неможливий, оскільки в цьому випадку оператори, породжені формулами (21) не утворюватимуть алгебру). Отже, надалі будемо вважати $\dot{B}\neq 0$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 2. Якщо система (18) допускає розширення ядра симетрії A_0 при умові, що $\gamma_1\neq 0$, то функції g^1, g^2 задаються наступними формулами:

$$\begin{aligned}&g^1 = u^1[\varphi^1(u^2) + \lambda_3 \ln u^1],\\ &g^2 = \varphi^2(u^2);\end{aligned} \tag{21}$$

де λ_3 - довільна стала, $\varphi^a(u^2)$ - довільні гладкі функції.

Доведення. Враховуючи формули (19), (20), систему $S_3(\xi,\eta,f,g)=0$ можна переписати у вигляді

$$\gamma u^1 g^1_{u^1} + \alpha u^2 g^1_{u^2} = (\gamma - 2\dot{A})g^1 + (\gamma_0 - \lambda_1\gamma_{11})u^1,$$
$$\gamma u^1 g^2_{u^1} + \alpha u^2 g^2_{u^2} = (\alpha - 2\dot{A})g^2 + (\alpha_0 - 2\lambda_1\gamma_{11})u^2. \quad (22)$$

Дослідимо, якими можуть бути функції g^1, g^2, щоб задовольнялась система (22). Так як функції γ, α, A залежать лише від змінних x_0, x_1, а функції g^a - від змінних u^1, u^2, то найбільш широкий клас функцій g^1, g^2, що задовольняють системі (23) є загальним розв'язком системи

$$u^1 g^1_{u^1} + ku^2 g^1_{u^2} = (m+1)g^1 + k_1 u^1,$$
$$u^1 g^2_{u^1} + ku^2 g^2_{u^2} = (m+k)g^2 + k_2 u^2, \quad (23)$$

де k, m, k_1, k_2 - довільні сталі, які ми будемо називати *структурними константами,* а систему (23) – *структурною системою* для функцій g^a.

Зв'язок між системами (23) і (24) задається формулами

$$\frac{\alpha}{\gamma} = k, \quad -2\frac{\dot{A}}{\gamma} = m, \quad \frac{\gamma_0 - \lambda_1\gamma_{11}}{\gamma} = k_1, \quad \frac{\alpha_0 - 2\lambda_1\gamma_{11}}{\gamma} = k_2. \quad (24)$$

Використавши диференціальний наслідок по змінній x_1 рівнянь (24), одержимо

$$k\gamma_1 = m\gamma_1 = k_2\gamma_1 = 0.$$

Так як $\gamma_1 \neq 0$, то $k = m = k_2 = 0$. Тоді система (23) перепишеться наступним чином

$$u^1 g^1_{u^1} = g^1 + k_1 u^1,$$
$$g^2_{u^1} = 0. \quad (25)$$

Загальний розв'язок системи (25) задається формулами (21), де $\lambda_3 = k_1$.

Отже, розв'язавши систему $S_3(\xi, \eta, f, g) = 0$ стосовно g^1, g^2 при $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$, ми одержали зображення (21) функцій g^1, g^2, наведене в умові теореми.

Теорему доведено.

Умови теореми 2, як і теореми 1, є лише необхідними умовами розширення ядра симетрії системи (2). Щоб отримати достатні умови, необхідно зображення функцій g^a вигляду (21) підставити в систему $S_3 = 0$ і розв'язати одержану систему відносно функцій $A(x_0)$, $B(x_0)$, $C(x_0)$, $\alpha(x_0)$ в залежності від вигляду функцій $\varphi^a(u^2)$ та значень сталої λ_3. Результатом таких досліджень є наступне твердження.

Теорема 3. Максимальні алгебри інваріантності системи (18), (21) залежно від значень функцій g^1, g^2 наведені у таблиці 1.

***Таблиця 1*. Класифікація симетрійних властивостей системи (18), (21).**

№ з/п	Зображення функцій g^1, g^2	Оператори максимальної алгебри інваріантності
1	$g^1 = u^1\varphi^1(u^2)$, $g^2 = u^2\varphi^2(u^2)$;	∂_0, ∂_1, $G = x_0 - \frac{x_1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1}$, $I_1 = u^1\partial_{u^1}$
2	$g^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6)$;	∂_0, ∂_1, G, I_1, $Q_1 = e^{\lambda_4 x_0}(\lambda_5 I_1 + \lambda_4 I_2)$
3	$g^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = \lambda_6 u^2$;	∂_0, ∂_1, G, I_1, $Q = \lambda_5 x_0 I_1 + I_2$
4	$g^1 = u^1[\lambda_5(u^2)^m + \lambda_7]$, $g^2 = \lambda_4(u^2)^{m+1}$;	∂_0, ∂_1, G, I_1, $D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2\lambda_7 x_0 I_1 - \frac{2}{m}I_2$
5	$g^1 = u^1[\lambda_5(u^2)^2 + \lambda_7]$, $g^2 = \lambda_4(u^2)^3$;	∂_0, ∂_1, G, I_1, $D_2 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2\lambda_7 x_0 I_1 - I_2$, $\Pi_1 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (-\frac{1}{4\lambda_1}x_1^2 + \lambda_7 x_0^2 - \frac{1}{2}x_0)I_1 - x_0 I_2$
6	$g^1 = \lambda_7 u^1$, $g^2 = \lambda_6 u^2$;	$\partial_0, \partial_1, G, I_1, I_2, D_3 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2x_0(\lambda_7 I_1 + \lambda_6 I_2)$, $\Pi_2 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (-\frac{1}{4\lambda_1}x_1^2 + \lambda_7 x_0^2 - \frac{1}{2}x_0)I_1 + (\lambda_6 x_0^2 - x_0)I_2$

Закінчення табл.1

№ з/п	Зображення функцій g^1, g^2	Оператори максимальної алгебри інваріантності
7	$g^1 = u^1(\varphi^1(u^2) + \lambda_3 \ln u^1)$, $g^2 = u^2\varphi^2(u^2)$;	∂_0 , ∂_1 , $G = e^{\lambda_3 x_0}(\partial_1 - \frac{\lambda_3}{2\lambda_1} x_1 I_1)$, $M = e^{\lambda_3 x_0} I_1$
8	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 +$ $+\lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6)$, $\lambda_4 \neq \lambda_3$;	∂_0 , ∂_1 , G, M, $Q_2 = e^{\lambda_4 x_0}(\lambda_5 I_1 + (\lambda_4 - \lambda_3) I_2)$
9	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 +$ $+\lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = u^2(\lambda_3 \ln u^2 + \lambda_6)$.	∂_0 , ∂_1 , G, M, $Q_3 = e^{\lambda_3 x_0}(\lambda_5 x_0 I_1 + I_2)$

В таблиці 1 $\lambda_3, ..., \lambda_7, m$ - довільні сталі, $m \neq 0; 2$, $\varphi^a = \varphi^a(u^2)$ - довільні гладкі функції, $I_2 = u^2 \partial_{u^2}$.

Доведення. З теореми 2 випливає, що система (18) допускає розширення основного ядра симетрії при $\dot{B} \neq 0$, якщо функції g^1, g^2 мають вигляд (21).

В такому разі система (18) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \dfrac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} u^1[\varphi^1(u^2) + \lambda_3 \ln u^1] \\ \varphi^2(u^2) \end{pmatrix}, \qquad (26)$$

де λ_3 - довільна стала.

В результаті підстановки g^1 , g^2 із (21) разом з $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$ та відповідними координатами (19), (20) оператора (4) у систему $S_3 = 0$ одержується система

$$\begin{aligned} &\alpha u^2 \dot{\varphi}^1 = -2\dot{A}\varphi^1 + \gamma_0 - \lambda_1\gamma_{11} - \lambda_3\gamma - 2\lambda_3 \dot{A} \ln u^1, \\ &\alpha u^2 \dot{\varphi}^2 = (\alpha - 2\dot{A})\varphi^2 + (\dot{\alpha} - 2\lambda_1\gamma_{11})u^2. \end{aligned} \qquad (27)$$

Розщепивши (27) по u^1 та x_1 , одержимо

$$\begin{aligned} &\alpha u^2 \dot{\varphi}^1 = -2\dot{A}\varphi^1 + \tfrac{1}{2}\ddot{A} - \tfrac{1}{2\lambda_1}\dot{C} + \tfrac{\lambda_3}{2\lambda_1} C, \\ &\alpha u^2 \dot{\varphi}^2 = (\alpha - 2\dot{A})\varphi^2 + (\dot{\alpha} + \ddot{A})u^2. \end{aligned} \qquad (28)$$

$$\dddot{A} = 0, \;\; \lambda_3 \dot{A} = 0, \;\; \ddot{B} - \lambda_3 \dot{B} = 0. \qquad (29)$$

Очевидно, що розв'язок рівнянь (29) залежить від значення сталої λ_3 .

1. Якщо $\lambda_3 \neq 0$, то, як випливає з системи рівнянь (29), $\dot{A} = 0$. Система (28) набуде вигляду

$$\begin{aligned} &\alpha u^2 \dot{\varphi}^1 = -\tfrac{1}{2\lambda_1}(\dot{C} - \lambda_3 C), \\ &\alpha(u^2 \dot{\varphi}^2 - \varphi^2) = \dot{\alpha} u^2. \end{aligned} \qquad (30)$$

причому

$$A = \tfrac{1}{2} d_0 , \;\; B = g e^{\lambda_3 x_0} + d_1 , \qquad (31)$$

де d_0, d_1, c_1 - сталі.

Вважаючи функції φ^1, φ^2 у системі (30) довільними, знайдемо ядро симетрій системи (26) при $\lambda_3 \neq 0$. При довільних φ^1, φ^2 із (30) випливає, що

$$\alpha = 0, \;\; C = d_2 e^{\lambda_3 x_0}. \qquad (32)$$

Підставивши (31), (32) у (19), (20), одержимо координати оператора (4)

$$\xi^0 = d_0 , \;\; \xi^1 = g e^{\lambda_3 x_0} + d_1 , \;\; \eta^1 = -\tfrac{1}{2\lambda_1} e^{\lambda_3 x_0}(\lambda_3 g + d_2)u^1 , \;\; \eta^2 = 0. \qquad (33)$$

В цьому випадку оператор (4) з координатами (33) породжує ядро симетрії системи (26)

$$A_1 = < \partial_0 , \; \partial_1 , \; G = e^{\lambda_3 x_0}(\partial_1 - \tfrac{1}{2\lambda_1} x_1) u^1 \partial_{u^1} , \; M = e^{\lambda_3 x_0} u^1 \partial_{u^1} > \qquad (34)$$

при довільних функціях $\varphi^a = \varphi^a(u^2)$ та $\lambda_3 \neq 0$. Одержаний результат відповідає пункту 7 таблиці 1.

Дослідимо тепер, при яких значеннях функцій φ^a у випадку $\lambda_3 \neq 0$ система (26) допускає розширення ядра симетрії (34).

З рівнянь (30) випливає, що

$$u^2 \dot{\varphi}^1 = -\tfrac{\dot{C} - \lambda_3 C}{2\lambda_1 \alpha} = \lambda_5, \qquad \dot{\varphi}^2 - \tfrac{\varphi^2}{u^2} = \tfrac{\dot{\alpha}}{\alpha} = \lambda_4, \tag{35}$$

де λ_4, λ_5 - сталі.

З рівнянь (35) одержимо

$$\varphi^1 = \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7, \quad \varphi^2 = u^2[\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6]. \tag{36}$$

$$\alpha = d_3 e^{\lambda_4 x_0}, \quad \dot{C} - \lambda_3 C = -2\lambda_1 \lambda_5 d_3 e^{\lambda_4 x_0}. \tag{37}$$

Розв'язок другого рівняння (37) залежить від співвідношень між сталими λ_4, λ_5. Можливі два суттєво різні випадки.

1.1. $\lambda_4 \neq \lambda_3$. В цьому випадку функції g^a матимуть вигляд

$$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7), \quad g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6).$$

Із другого рівняння (37) випливає, що

$$C = d_2 e^{\lambda_3 x_0} + \tfrac{2\lambda_1 \lambda_5}{\lambda_3 - \lambda_4} d_3 e^{\lambda_4 x_0},$$

де d_2, d_3 - довільні сталі. Внаслідок цього одержуємо наступний вигляд координат оператора (4)

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = g e^{\lambda_3 x_0} + d_1, \qquad \eta^1 = -\tfrac{1}{2\lambda_1}[e^{\lambda_3 x_0}(\lambda_3 g x_1 + d_2) + \frac{2\lambda_1 \lambda_5}{\lambda_3 - \lambda_4} d_3 e^{\lambda_4 x_0}]u^1, \quad \eta^2 = d_3 e^{\lambda_4 x_0} u^2. \tag{38}$$

Оператор (4) з координатами (38) породжує алгебру інваріантності системи (26), наведену в пункті 8 таблиці 1.

1.2. $\lambda_4 = \lambda_3$. В цьому випадку функції g^a задаються наступним чином

$$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7), \quad g^2 = u^2(\lambda_3 \ln u^2 + \lambda_6). \tag{39}$$

При $\lambda_4 = \lambda_3$ із другого рівняння (37) одержуємо $C = (d_2 - 2\lambda_1 \lambda_5 d_3 x_0) e^{\lambda_3 x_0}$. Координати оператора (4) набувають вигляду

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = g e^{\lambda_3 x_0} + d_1, \qquad \eta^1 = -\tfrac{1}{2\lambda_1} e^{\lambda_3 x_0}(\lambda_3 g x_1 - 2\lambda_1 \lambda_5 d_3 x_0 + d_2) u^1, \quad \eta^2 = d_3 e^{\lambda_3 x_0} u^2. \tag{40}$$

Алгебра інваріантності системи (26), (39), породжена оператором (4) з координатами (40) співпадає з алгеброю пункту 9 таблиці 1.

2. Якщо $\lambda_3 = 0$, то рівняння (28), (29) розв'язуємо аналогічно до того, як це зроблено у випадку, коли $\lambda_3 \neq 0$ і отримуємо пункти 1-6 таблиці 1.

Теорему доведено.

Зауваження.

За допомогою методу С. Лі (див., наприклад, [1], [3]) можна показати, що основна група перетворень еквівалентності системи (18) має вигляд

$$x_0 = t e^{2\theta_2} + \theta_0, \quad x_1 = x e^{\theta_2} + \theta_1,$$
$$u^1 = w^1 e^{\theta_3}, \qquad u^2 = w^2 e^{\theta_4}.$$

Крім основної групи еквівалентності система (18) при конкретних g допускає деякі додаткові перетворення еквівалентності, наприклад

$$x_0 = at, \quad x_1 = bx, \quad u^1 = w^1 e^{kt}, \quad u^2 = w^2 e^{mt},$$

де a, b, k, m - деякі сталі. Застосувавши ці перетворення дану систему з функціями g^1, g^2 з таблиці 1 можна звести до наступного вигляду

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \dfrac{w^2}{w^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}_x \right] + \begin{pmatrix} G^1(w^1, w^2) \\ G^2(w^1, w^2) \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Поставимо задачу: підібрати параметри даних перетворень так, щоб вигляд функцій G^1, G^2 був простіший ніж вигляд функцій g^1, g^2, наведених в таблиці 1.

Результати такого спрощення подамо у вигляді наступної таблиці.

***Таблиця 2*. Спрощення системи (18) з нелінійностями, наведеними в таблиці 1, за допомогою перетворень еквівалентності**

№ з/п	Зображення функцій g^1, g^2 системи (18)	Перетворення	Зображення функцій G^1, G^2 системи (41)
2	$g^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6)$, $\lambda_4 \neq 0$;	$x_0 = \frac{1}{\lvert\lambda_4\rvert}t, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lvert\lambda_4\rvert}}x$, $u^1 = e^{\frac{\lambda_7\lambda_4 - \lambda_5\lambda_6}{\lambda_4^2}t}w^1, \quad u^2 = e^{-\frac{\lambda_6}{\lambda_4}}w^2$,	$G^1 = rw^1 \ln w^2$, $G^2 = r_1 w^2 \ln w^2$;
3	$g^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = \lambda_6 u^2$, $\lambda_5 \neq 0$;	$x_0 = \frac{1}{\lvert\lambda_5\rvert}t, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lvert\lambda_5\rvert}}x$, $u^1 = e^{\frac{\lambda_7}{\lvert\lambda_5\rvert}t}w^1, \quad u^2 = w^2$,	$G^1 = r_1 w^1 \ln w^2$, $G^2 = rw^2$;
4.1	$g^1 = \lambda_7 u^1$, $g^2 = \lambda_4 (u^2)^{m+1}$, $m \neq 0, \lambda_4 \neq 0$;	$x_0 = \frac{1}{\lvert\lambda_4\rvert}t, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lvert\lambda_4\rvert}}x$, $u^1 = e^{\frac{\lambda_7}{\lvert\lambda_4\rvert}t}w^1, \quad u^2 = w^2$,	$G^1 = 0$, $G^2 = r_1 (w^2)^{n+1}$;
4.2	$g^1 = u^1[\lambda_5 (u^2)^m + \lambda_7]$, $g^2 = \lambda_4 (u^2)^{m+1}$, $m \neq 0, \lambda_5 \neq 0$;	$x_0 = \frac{1}{\lvert\lambda_5\rvert}t, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lvert\lambda_5\rvert}}x$, $u^1 = e^{\frac{\lambda_7}{\lvert\lambda_5\rvert}t}w^1, \quad u^2 = w^2$,	$G^1 = r_1 w^1 (w^2)^n$, $G^2 = r(w^2)^{n+1}$;
5.1	$g^1 = \lambda_7 u^1$, $g^2 = \lambda_4 (u^2)^3$, $\lambda_4 \neq 0$;	$x_0 = \frac{1}{\lvert\lambda_4\rvert}t, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lvert\lambda_4\rvert}}x$, $u^1 = e^{\frac{\lambda_7}{\lvert\lambda_4\rvert}t}w^1, \quad u^2 = w^2$,	$G^1 = 0$, $G^2 = r_1 (w^2)^3$;
5.2	$g^1 = u^1[\lambda_5 (u^2)^2 + \lambda_7]$, $g^2 = \lambda_4 (u^2)^3$, $\lambda_5 \neq 0$;	$x_0 = \frac{1}{\lvert\lambda_5\rvert}t, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lvert\lambda_5\rvert}}x$, $u^1 = e^{\frac{\lambda_7}{\lvert\lambda_5\rvert}t}w^1, \quad u^2 = w^2$,	$G^1 = r_1 w^1 (w^2)^2$, $G^2 = r(w^2)^3$;
6	$g^1 = \lambda_7 u^1$, $g^2 = \lambda_6 u^2$;	$x_0 = t, \quad x_1 = x$, $u^1 = e^{\lambda_7 t}w^1, \quad u^2 = e^{\lambda_6 t}w^2$,	$G^1 = 0$, $G^2 = 0$;
7	$g^1 = u^1(\varphi^1(u^2) + \lambda_3 \ln u^1)$, $g^2 = u^2\varphi^2(u^2)$, $\lambda_3 \neq 0$;	$x_0 = \frac{1}{\lvert\lambda_3\rvert}t, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lvert\lambda_3\rvert}}x$, $u^1 = w^1, \quad u^2 = w^2$	$G^1 = w^1(\varphi^1(w^2) + r_1 \ln w^1)$, $G^2 = w^2\varphi^2(w^2)$;
8	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6)$, $\lambda_4 \neq \lambda_3,\ \lambda_3 \neq 0, \lambda_4 \neq 0$;	$x_0 = \frac{1}{\lvert\lambda_3\rvert}t, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lvert\lambda_3\rvert}}x$, $u^1 = e^{\frac{\lambda_5\lambda_6 - \lambda_7\lambda_4}{\lambda_3\lambda_4}}w^1, \quad u^2 = e^{-\frac{\lambda_6}{\lambda_4}}w^2$,	$G^1 = w^1(r_1 \ln w^1 + r \ln w^2)$, $G^2 = r_2 w^2 \ln w^2$;
9	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = u^2(\lambda_3 \ln u^2 + \lambda_6)$, $\lambda_3 \neq 0$.	$x_0 = \frac{1}{\lvert\lambda_3\rvert}t, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lvert\lambda_3\rvert}}x$, $u^1 = e^{\frac{\lambda_5\lambda_6 - \lambda_3\lambda_7}{\lambda_3^2}}w^1, \quad u^2 = e^{-\frac{\lambda_6}{\lambda_3}}w^2$,	$G^1 = w^1(r_1 \ln w^1 + r \ln w^2)$, $G^2 = r_1 w^2 \ln w^2$.

.

В таблиці 2 містяться константи, які набувають наступних значень $r \in R$, $r_1 \in \{-1;1\}$, $r_2 \in R$, $\{-1;1\}$, $\varphi^a = \varphi^a(u^2)$, $\varphi^a = \varphi^a(w^2)$ - довільні гладкі функції.

5.Висновки.

Нерелятивістський рух будь-яких макрооб'єктів задовольняє принципу відносності Галілея. Тому, очевидно, знайдені в даній роботі моделі руху, які, будучи інваріантними відносно алгебр Галілея, задовольняють принципу відносності Галілея, а отже, претендують на достовірність описання руху об'єктів моделі Келлера-Сегеля. Крім того, оскільки в даній роботі встановлено максимальні алгебри інваріантості систем, то це може значно полегшити роботу по встановленню траекторій руху об'єктів, рух яких досліджується вище названою моделлю.

1.*Ахатов Н.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.К.* Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. – М., 1989. – Т. 34. – С. 3-83. 2. *Иваницкий Г.Р., Медвинский А.Б., Цыганов М.А.* От беспорядка к упорядоченности - на примере движения микроорганизмов. // Успехи физических наук – 1991. – Т. 161, №4. – С.13-71. 3. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М., 1978. 4. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М., 1958. 5. *Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — К., 1989. 6 *Adler J*., Chemotaxis in bacteria. // Sciense. – 1996. – Vol. 153. – P.708-716. 7. *Keller E.F., Segel L.A.,* Model for chemotaxis. // J.Theor.Biol. – 1971. – Vol. 30. – P.225-234. 8. *Olver P.* Applications of Lie Groups to Differential Equations. – New York, 1986.

Надійшла до редколегії 05.06.2007