Ще 5 діаграм можна отримати, якщо в кожній із діаграм, крім першої і останніх двох , замінити суцільні лінії на штриховані, а штриховані на суцільні. Для першої діаграми можливі 3 функцій порядку σ, для другої - 2, третьої – 2, четвертої – 3, п'ятої – 3, шостої – 2, сьомої – 3. Для одного оснащення четвертої діаграми можливі додавання меридіан, які призводять до третьої діаграми. Для восьмої діаграми, тільки дві функції порядку дають діаграми нееквівалентні сьомій діаграмі. Отже, всього існує 3+2x2+2x2+2x3+2x3+2x2+3+2-1=31 функція загального положення на тривимірному диску з 6 критичними точками на границі.

Нехай T – тор з виколотим відкритим диском (як остання діаграма на рис.4) і діаграма на T містить по два меридіани кожного типу, які негомотопні між собою і негомотопні 0 (при гомотопії кінці меридіан ковзають по краю T). Стягнувши край T в точку, отримаємо, що кожна система меридіанів є системою твірних фундаментальної групи тору. Матриця переходу від однієї системи до другої є матрицею з SL(2,**Z**). Отже, існує нескінченно багато топологічно нееквівалентних функцій загального положення з 6 критичними точками на границі многовиду $T\times[0,1]$.

Висновок. Побудовано повний топологічний інваріант функцій загального положення на тривимірних многовидах з межею. Ефективність цього інваріанту продемонстровано на конкретних прикладах підрахування числа не еквівалентних функцій.

1. *Максименко С.І.* Еквівалентність m-функцій на поверхнях// Некоторые вопросы совр. мат. Праці Ін-ту математики НАНУ, Т.25, Ки]в, 1998,- С.128-134. 2. *Милнор Дж.* Теория Морса. - М.: Мир, 1964. - 184 с. 3. *Пришляк А.О.* Сопряженность функций Морса // Некоторые вопросы совр. мат. Праці Ін-ту математики НАНУ, Т.25, Киев, 1998,- С.94-103. 4. *Jankowski A., Rubinsztein R.* Functions with non-degenerated critical points on manifolds with boundary// Comm. Math. XVI, 1972, p.99-112. 5. *Kulinich E.V.* On topological equivalence Morse functions on surfaces// Methods of Func. An. and Topology, N1, 1998.– P.22–28. 6. *Sharko V.V.* On topological equivalence Morse functions on surfaces// Int. conference at Chelyabinsk State Univ.: Low-dimensional Topology and Combinatorial Group Theory, 1996.–P.19–23.

Надійшла до редколегії 26.09.08

УДК 519.21

О. Курченко, д-р.фіз.-мат.наук

ТЕОРЕМА БАКСТЕРОВОГО ТИПУ ДЛЯ СТРОГО СУБГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

Отримані достатні умови збіжності у середньому квадратичному та з імовірністю одиниця бакстерових сум для сумісно строго субгауссових випадкових полів.

Sufficient conditions of convergence in square mean and with probability one of Baxter sums for jointly strong subgaussian random fields are obtained.

1. Вступ

Граничні теореми бакстерового типу для випадкових процесів та полів полягають у встановленні умов збіжності у певному сенсі до невипадкової сталої послідовності сум від приростів випадкових процесів чи полів. Цей напрямок започаткував Леві [21], коли встановив такий результат для стандартного броунівського руху. Бакстер [14] узагальнив цей результат для більш широкого класу гауссових випадкових процесів. Впродовж останніх десятиліть збіжність бакстерових сум для випадкових процесів і полів досліджувалася багатьма математиками. У припущеннях гауссовості теореми бакстерового типу (відомі також під назвою теореми Леві-Бакстера) для випадкових процесів отримали Гладишев [6], Рижов [11, 12], Ібрагімов та Розанов [7], Гіне та Клейн [18], Врубель [24]. Персі [22] довів теорему бакстерового типу без припущення гауссовості за рахунок умов на мішані моменти четвертого порядку випадкового процесу. Для гауссових випадкових полів (випадкових функцій кількох змінних) та випадкових полів із гауссовими приростами збіжність послідовності бвкстерових сум досліджували Краснитський [8], Берман [15], Арак [1], Стрет [23], Кавада [20], Део та Уонг [17], Шкляр [13], Чен Ксьонг та Пан Ксіа [16], Гійон [19], Курченко [9]. Проводилися також дослідження умов збіжності послідовності бакстерових сум для окремих класів випадкових функцій. Так теореми Леві-Бакстера для строго передгауссових процесів отримали Бесклінська та Козаченко [2]. Булдигін, Мельник, Шпортюк [3,4] встановили необхідні й достатні умови збіжності послідовності бакстерових сум для дробових полів на фіксованій та зростаючій параметричних множинах. Булдигін і Козаченко отримали теорему Леві-Бакстера для сумісно строго субгауссових випадкових процесів [5].

У цій статті теорема Леві-Бакстера для сумісно строго субгауссових випадкових процесів, що отримали Булдигін і Козаченко [5], узагальнена для сумісно строго субгауссових випадкових полів. При цьому розглянуті досить загальні прирости сумісно строго субгауссового поля на багатовимірному паралелепіпеді. Одночасне обчислення бакстерових сум із приростами різних типів можна застосувати для побудови конзистентних оцінок параметрів коваріаційних функцій випадкових полів. У підрозділі 2 наведено означення сумісно строго субгауссового випадкового поля. У підрозділі 3 описаний клас розгляданих приростів функцій кількох змінних на багатовимірному паралелепіпеді. Підрозділ 4 містить теорему бакстерового типу, в якій встановлена збіжність у середньому квадратичному або з імовірністю одиниця послідовності бакстерових сум для сумісно строго субгауссових випадкових полів.

2. Сумісно строго субгауссові випадкові поля

Строго субгауссові випадкові вектори та сумісно строго субгауссові випадкові процеси описані у монографії Булдигіна і Козаченка [5, гл. 7]. Нехай $(\Omega,\ F,\ P)$ – імовірнісний простір.

Означення 2.1. ([5]) Випадковий вектор $\xi:\Omega\to R^n$ називається строго субгауссовим, якщо для всіх $u\in R^n$ виконується нерівність $E\exp\{(u,\xi)\}\le\exp\left\{\frac{1}{2}(Bu,u)\right\}$, де $B=E(\xi\xi^t)$ – коваріаційна матриця випадкового вектора – стовпця ξ (верхній індекс t означає транспонування).

Сукупність строго субгауссових n-вимірних векторів позначають символом $\mathrm{SSub}(\Omega,R^n)$. Відмітимо, що строго субгауссовий випадковий вектор є субгауссовим ([5]). Центрований гауссовий випадковий вектор є строго субгауссовим.

Означення 2.2. Нехай $T \subset R^d$. Випадкове поле $\{X(t): t \in T\}$ називається сумісно строго субгауссовим, якщо для довільного натурального числа n та довільних $t_1, t_2, ..., t_n \in T$ випадковий вектор $(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n))$ є строго субгауссовим.

Сумісно строго субгауссове поле є центрованим [5]. Довільне гауссове випадкове поле з нульовим середнім значенням є строго субгауссовим.

3. Прирости функції кількох змінних

Нехай d – натуральне число, $p_1, p_2, ..., p_d$ – невід'ємні цілі числа,

$$A = \{a_{i_1 i_2 ... i_d} : 0 \le i_1 \le p_1, ..., 0 \le i_d \le p_d\} \tag{1}$$

d – вимірна матриця розмірності $(p_1+1)\times(p_2+1)\times...\times(p_d+1)$ з дійсними елементами.

Означення 3.1. Невід'ємне ціле число m називається порядком d-вимірної матриці (1), якщо для довільних невід'ємних цілих чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d$, сума яких менша числа m, виконується рівність

$$\sum_{i_1=0}^{p_1} ... \sum_{i_d=0}^{p_d} i_1^{\alpha_1} i_2^{\alpha_2} ... i_d^{\alpha_d} a_{i_1 i_2 ... i_d} = 0, \tag{2}$$

але знайдеться хоча б один набір невід'ємних цілих чисел $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_d$, таких, що $\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_d = m$ і

$$\sum_{i_1=0}^{p_1} ... \sum_{i_d=0}^{p_d} i_1^{\beta_1} i_2^{\beta_2} ... i_d^{\beta_d} a_{i_1 i_2 ... i_d} \ne 0. \tag{3}$$

Тут $0^0 = 1$.

Приклад 3.1. d-вимірна матриця $A = \{(-1)^{i_1+i_2+...+i_d} : i_k \in \{0, 1\}; 1 \le k \le d\}$ має порядок d. Дійсно, якщо виконується нерівність $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_d < d$, то хоча б для одного індексу k від одиниці до d буде виконуватися рівність $\alpha_k = 0$. Тому в цьому випадку $\sum_{i_1=0}^{1} ... \sum_{i_d=0}^{1} (-1)^{i_1+...+i_d} i_1^{\alpha_1} ... i_d^{\alpha_d} = \prod_{r=1}^{d} \left(\sum_{i_r=0}^{1} (-1)^{i_r} i_r^{a_r} \right) = 0.$

Для вектора $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d) = (1, 1, ..., 1)$ маємо $\sum_{i_1=0}^{1} ... \sum_{i_d=0}^{1} (-1)^{i_1+...+i_d} i_1 ... i_d = \prod_{r=1}^{d} \left(\sum_{i_r=0}^{1} (-1)^{i_r} i_r \right) \ne 0.$

Приклад 3.2. Нехай $d = 1$. Вектор $a = \left((-1)^p \binom{p}{0}, (-1)^{p-1} \binom{p}{1}, ..., \binom{p}{p} \right)$ розмірності $(p+1)$ є вектором p- го порядку, оскільки $\sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} \binom{p}{i} i^k = 0, \quad 0 \le k \le p-1; \quad \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} \binom{p}{i} i^p \ne 0.$

Лема 3.1. Нехай $p_1, p_2, ..., p_d$ – невід'ємні цілі числа, $a^{(r)} = \left(a_0^{(r)}, a_1^{(r)}, ..., a_{p_r}^{(r)}\right)$ – (p_r+1)-вимірний вектор з дійсними координатами, який має порядок m_r, $1 \le r \le d$. Тоді d-вимірна матриця

$$A = \{a_{i_1 i_2 ... i_d} = a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} ... a_{i_d}^{(d)} : 0 \le i_1 \le p_1, ..., 0 \le i_d \le p_d\}, \tag{4}$$

задана набором векторів $a^{(i)} = \left(a_0^{(i)}, ..., a_{p_i}^{(i)}\right)$, $1 \le i \le d$, має порядок $m_1 + m_2 + ... + m_d$.

Доведення. Для невід'ємних цілих чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d$ маємо

$$\sum_{i_1=0}^{p_1} ... \sum_{i_d=0}^{p_d} i_1^{\alpha_1} i_2^{\alpha_2} ... i_d^{\alpha_d} a_{i_1 i_2 ... i_d} = \prod_{r=1}^{d} \left(\sum_{i_r=0}^{p_r} a_{i_r}^{(r)} i_r^{\alpha_r} \right). \tag{5}$$

Якщо $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_d < m_1 + m_2 + ... + m_d$, то хоча б для одного індексу $k \in \{1, 2, ..., d\}$ виконується нерівність $\alpha_k < m_k$. Тоді $\sum_{i_k=0}^{p_k} a_{i_k}^{(k)} i_k^{\alpha_k} = 0$ і тому вираз у правій частині рівності (5) дорівнює нулю. Оскільки $\sum_{i_k=0}^{p_k} a_{i_k}^{(k)} i_k^{m_k} \ne 0$, $1 \le k \le d$, то при $\alpha_1 = m_1, ..., \alpha_d = m_d$ вираз у правій частині рівності (5) відмінний від нуля. Лема доведена.

За допомогою d-вимірної матриці A визначимо приріст функції d змінних на d-вимірному паралелепіпеді. Нехай $t = (t_1, t_2, ..., t_d) \in R^d$, $h = (h_1, h_2, ..., h_d) \in (0, +\infty)^d$; $Q = [t, t+h] = [t_1, t_1+h_1] \times [t_2, t_2+h_2] \times ... \times [t_d, t_d+h_d]$ – d-вимірний паралелепіпед; $f : Q \to R$ – дійсна функція d змінних; d-вимірна матриця A визначена у рівності (1).

Означення 3.3. Приростом функції f на паралелепіпеді Q, побудованим за допомогою матриці A, називається число

$$f(Q, A) = \sum_{i_1=0}^{p_1} ... \sum_{i_d=0}^{p_d} a_{i_1 i_2 ... i_d} f(t_1 + i_1\delta_1, t_2 + i_2\delta_2, ..., t_d + i_d\delta_d),$$

де $\delta_1 = \dfrac{h_1}{\max(p_1,\, 1)}$, $\delta_2 = \dfrac{h_2}{\max(p_2,\, 1)}$, ... , $\delta_d = \dfrac{h_d}{\max(p_d,\, 1)}$. Порядком приросту функції f на паралелепіпеді Q, побудованим за допомогою матриці A, називається порядок матриці A.

Приклад 3.3. Нехай A – d-вимірна матриця, визначена у прикладі 2.1. Тоді

$$f(Q,\ A) = \sum_{i_1=0}^{1} \dots \sum_{i_d=0}^{1} (-1)^{i_1+\dots+i_d} f(t_1 + i_1 h_1,\ \dots,\ t_d + i_d h_d) \tag{6}$$

Прирости (4) називають повними приростами або d-приростами. Бакстерові суми для випадкових полів за допомогою таких приростів будувалися, наприклад, у роботах [1, 8, 20].

4. Збіжність послідовності бакстерових сум

Нехай $\{X(t): t \in T\}$ – сумісно строго субгауссове випадкове поле, $I = [0,1]^d \subset T$, T – відкрита множина в R^d; $r(s,t) = EX(s)X(t),\ s,t \in T$ – коваріаційна функція цього випадкового поля. Нехай, далі $\{\mu(n): n \ge 1\}$ – послідовність рівномірних розбиттів одиничного d-вимірного паралелепіпеда I; розбиття $\mu(n)$ складається з $(b(n))^d$ конгруентних d-вимірних паралелепіпедів, $b(n) \to \infty,\ n \to \infty$; $X(q; A)$ – приріст випадкового поля X, побудований за допомогою матриці A. Нехай d-вимірна матриця A визначена рівністю (1). Зазначимо, що для паралелепіпедів $q,\ p \subset [0,1]^d$ $E(X(q;\ A)X(p;\ A)) = r(q \times p;\ A \otimes A)$, де $q \times p$ – декартовий добуток паралелепіпедів $q,\ p \subset [0,1]^d$, $A \otimes A = \{a_{i_1 i_2 \dots i_d} a_{j_1 j_2 \dots j_d} : 0 \le i_1,\ j_1 \le p_1, \dots, 0 \le i_d,\ j_d \le p_d\}$.

Теорема 4.1. Нехай $\{X(t): t \in T\}$ – сумісно строго субгауссове випадкове поле і для деякого показника $\alpha \in R$, додатної сталої c і матриці A з означення 3.1 виконуються наступні умови:

1) $(b(n))^{\alpha-d} \sum\limits_{q \in \mu(n)} r(q \times q;\ A \otimes A) \to c \in R$ при $n \to \infty$;

2) $V_n^{(1)} = (b(n))^{2(\alpha-d)} \sum\limits_{q,q' \in \mu(n)} (E(X(q, A)X(q', A)))^2 \to 0$ при $n \to \infty$;

3) $V_n^{(2)} = ((b(n))^d - 1)(b(n))^{2(\alpha-d)} \sum\limits_{q \in \mu(n)} \left((EX^2(q, A))^2 - \dfrac{1}{3} EX^4(q; A) \right) \to 0$ при $n \to \infty$.

Тоді $L_n = (b(n))^{\alpha-d} \sum\limits_{q \in \mu(n)} X^2(q; A) \to c$ у середньому квадратичному при $n \to \infty$. Якщо ряд із загальним членом $V_n^{(i)},\ n \ge 1$, збіжний, $i = 1,2$, то $L_n \to c$ з імовірністю одиниця при $n \to \infty$.

Доведення. Розглянемо послідовність серій випадкових величин

$$\{X(q, A): q \in \mu(n)\},\ \ n \ge 1. \tag{7}$$

Лема 1.5 [5, гл.7] стверджує, що образ строго субгауссового вектора при лінійному відображенні – строго субгауссовий вектор. Випадковий вектор у кожній серії (7) є образом при лінійному відображенні строго субгауссового вектора $(X(t_1),\ X(t_2),\ \dots, X(t_n))$ для деякого набору точок $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0,\ 1]^d$ і тому, внаслідок цієї леми, строго субгауссовий вектор. Із нерівності (2.3) леми 2.1 монографії [1] випливає, що

$$E(L_n - EL_n)^2 \le 2V_n^{(1)} + V_n^{(2)},\ \ n \ge 1. \tag{8}$$

Внаслідок умов 2), 3) $E(L_n - EL_n)^2 \to 0,\ \ n \to \infty$. Оскільки $(b(n))^{\alpha-d} \sum\limits_{q \in \mu(n)} r(q \times q;\ A \otimes A) = EL_n$, то умова 1) означає, що $EL_n \to c,\ \ n \to \infty$.

Тепер перше твердження теореми випливає із нерівності $E(L_n - c)^2 \le 2E(L_n - EL_n)^2 + 2(EL_n - c)^2,\ \ n \ge 1$.

Якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n^{(1)}$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n^{(2)}$ збіжні, то і ряд із загальним членом $E(L_n - EL_n)^2,\ \ n \ge 1$ збігається, звідки випливає ([10], с. 24), що $L_n - EL_n \to 0$ з імовірністю одиниця при $n \to \infty$. Враховуючи, що $E L_n \to c,\ \ n \to \infty$, отримуємо друге твердження теореми. Теорема доведена.

Для гауссового випадкового поля $\{X(t): t \in T\}$ з нульовим математичним сподіванням має місце рівність $E(L_n - EL_n)^2 = 2V_n^{(1)},\ \ n \ge 1$, яка дозволяє отримати

Наслідок 4.1. Нехай $\{X(t): t \in T\}$ – гауссове випадкове поле з нульовим математичним сподіванням і для деякого показника $\alpha \in R$, додатної сталої c і матриці A з означення 3.1 $EL_n \to c,\ n \to \infty$, де $L_n = (b(n))^{\alpha-d} \sum\limits_{q \in \mu(n)} X^2(q; A),\ n \ge 1$. Тоді для збіжності у середньому квадратичному послідовності (L_n) до сталої c необхідно і достатньо щоб збігалася до нуля послідовність $(V_n^{(1)})$.

5. Висновки

Досліджені умови збіжності у середньому квадратичному та з імовірністю одиниця послідовності бакстерових сум з приростами загального виду для сумісно строго субгауссових випадкових полів.

1. *Арак Т.В.* О теоремах типа Леви-Бакстера для случайных полей// Теория вероятностей и ее применения. – 1972. – Том 17, вып. 1. – С. 153–160. 2. *Бесклинская Е.П., Козаченко Ю.В.* Сходимость в нормах пространства Орлича и теоремы Леви-Бакстера// Теория вероятностей и математическая статистика. – 1986. – Вып. 35. – С. 3–6. 3. *Булдигін В.В., Мельник В.М., Шпортюк В.Г.* Про теореми Леві-Бакстера для дробових полів. I // Укр. матем. журн. – 1998. – Том 50, №11. – С. 1463–1476. 4. *Булдигін В.В., Мельник В.М., Шпортюк В.Г.* Про теореми Леві-Бакстера для дробових полів. II // Укр. матем. журн. – 1999. – Том 51, №1. – С. 12–31. 5. *Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В.* Метрические характеристики случайных величин и процессов. – К:, 1998. 6. *Гладышев Е.Г.* Новая предельная теорема для случайных процессов с гауссовскими приращениями// Теория вероятностей и ее применения. – 1961. – Том 1, вып. 6. – С. 57–66. 7. *Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А.* Гауссовские случайные процессы. – М., 1970. 8. *Краснитский С.М.* О некоторых предельных теоремах для случайных полей с гауссовскими разностями m-го порядка // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1971. – Вып. 5. – С. 71–80. 9. *Курченко О.О.* Збіжність F-варіації гауссового випадкового поля// Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1999. – Вип. 60. – С. 98–108. 10. *Ламперти Дж.* Случайные процессы. Обзор математической теории. – К.:, 1983. 11. *Рыжов Ю.М.* Предельные теоремы для стационарных гауссовских процессов // Теория вероятностей и ее применения. – 1965. – Том 10, вып. 1. – С. 143–151. 12. *Рыжов Ю.М.* Одна предельная теорема для стационарных гауссовских процессов // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1970. – Вып. 1. – С. 178–188. 13. *Шкляр Г.А.* Об одной теореме типа Леви-Бакстера // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1986. – Вып. 34. – С. 129–132. 14. *Baxter G.* A strong limit theorem for Gaussian processes // Proc. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol. 7, No 3. – P. 522–527. 15. *Berman S.M.* A version of the Levy-Baxter theorem for Gaussian processes // Proc. Amer. Math. Soc. – 1967. – Vol. 18. – P. 1051–1055. 16. *Chen Xiong, Pan Xia.* On Levy-Baxter theorem for general two-parameter Gaussian Processes // Studia Scientarium Mathematicarum Hungarica. – 1991. – Vol. 26. – P. 401–410. 17. *Deo C.M., Wong S.F.* Champs aleatoires Gaussienne // Canad. J. Statist. – 1978. – No 6. – P. 33–40. 18. *Gine E., Klein R.* On quadratic variation of processes with Gaussian increments // Ann. of Probab. – 1975. – Vol. 3, No 4. – P. 716–721. 19. *Guyon X.* Quelques resultats sur les variations de champs gaussiens stationaires // C.R. Acad Sci. Paris, ser. I. – 1981. – Vol. 293. – P. 649–651. 20. *Kawada T.* The Levy-Baxter theorem for Gaussian random fields: a sufficient condition // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – Vol. 53, No 2. – P. 463–469. 21. *Levy P.* Le movement Brownian plan // Amer. J. Math. – 1940. – Vol. 62. – P. 487–550. 22. *Percy P.* The Quadratic variation of random processes // Z. fur wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete. – 1971. – Vol. 19. – P. 291–301. 23. *Strait P.T.* On Berman's version of the Levy-Baxter theorem // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 23, No 1. – P. 91–93. 24. *Wrobel A.* On the almost sure convergence of the square variation of the Brownian motion // Probability and Mathematical Statistics. – 1982. – Vol. 3, No 1. – P. 97–101.

Надійшла до редколегії 30.09.2008 р.

УДК 519.21

В. Зубченко, асп.
E–mail: v_zubchenko@ukr.net

ГРАНИЧНА ПОВЕДІНКА ДОВГОСТРОКОВОЇ ВІДСОТКОВОЇ СТАВКИ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ СТОХАСТИЧНІЙ МОДЕЛІ ВІДСОТКОВОЇ СТАВКИ КОКСА–ІНГЕРСОЛЛА–РОССА

Досліджено збіжність довгострокової відсоткової ставки в узагальненій стохастичній моделі Кокса–Інгерсолла–Росса миттєвої відсоткової ставки із лінійним коефіцієнтом зносу та додатковою випадковістю, неліпшицевою дифузією та центрованою пуассонівською мірою.

We study long-term return convergence in the Cox-Ingersoll-Ross extended model of the short interest rate with linear drift coefficient and additional randomness, non-Lipschitz diffusion and centered Poisson measure.

Вступ

Дослідження стохастичних диференціальних рівнянь дифузійного типу із гельдеровим коефіцієнтом дифузії становить особливий інтерес у зв'язку із застосуванням у фінансах [4]. Рівняння такого типу широко використовуються для моделювання стану фінансових ринків. Зокрема, у стохастичній моделі Кокса-Інгерсолла-Росса [2] динаміка короткострокової відсоткової ставки $r(t)$ описується наступним стохастичним диференціальним рівнянням:

$$dr(t) = k(\gamma - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \tag{1}$$

де W – вінерівський процес, k, γ та σ – додатні сталі.

Проте природно припускати, що на реальному фінансовому ринку γ та σ будуть постійно змінюватись. Тому багато робіт присвячено узагальненню даної моделі. Зокрема, у роботі [3] розглядається узагальнена CIR–модель із лінійним коефіцієнтом зносу, додатковою випадковістю та гельдеровою дифузією.

Але фінансові ринки за певних умов функціонують таким чином, що відсоткові ставки у деякі моменти часу мають стрибки. Тому цікаво як з практичної, так і з теоретичної точки зору розглянути узагальнення стохастичної моделі Кокса–Інгерсолла–Росса, динаміка миттєвої відсоткової ставки в якій описується стохастичним рівнянням із гельдеровою дифузією та зі стрибковою частиною.

Особливий інтерес для банків та страхових компаній становить дослідження довгострокової відсоткової ставки $\frac{1}{t}\int_0^t r(s)ds$, де $r(s)$ – миттєва відсоткова ставка, поведінка якої описується, наприклад, узагальненою CIR–моделлю. Дослідження граничної поведінки при $t \to \infty$ довгострокової відсоткової ставки виявляється корисним для ефективного управління ціновою стратегією довгострокових договорів страхування життя.

У даній роботі ми розглядаємо узагальнену CIR–модель відсоткової ставки, що описується стохастичним диференціальним рівнянням із лінійним коефіцієнтом зносу та додатковою випадковістю, неліпшицевою дифузією та центрованою пуассонівською мірою. Доведено збіжність м.н. довгострокової відсоткової ставки до сталого значення, котре визначається часовим середнім процесу коефіцієнту зносу. Розглянуто двофакторну CIR–модель відсоткової ставки та доведено збіжність м.н. довгострокової відсоткової ставки до сталого значення.

Досліджуємо стохастичне диференціального рівняння

$$dX(t) = (2\beta X(t) + \delta(t))dt + g(X(t))dW(t) + \int_{\mathbb{R}} q(X(t), y)\tilde{\nu}(dt, dy) \tag{2}$$