5. Висновки

Досліджені умови збіжності у середньому квадратичному та з імовірністю одиниця послідовності бакстерових сум з приростами загального виду для сумісно строго субгауссових випадкових полів.

1. *Арак Т.В.* О теоремах типа Леви-Бакстера для случайных полей// Теория вероятностей и ее применения. – 1972. – Том 17, вып. 1. – С. 153–160. 2. *Бесклинская Е.П., Козаченко Ю.В.* Сходимость в нормах пространства Орлича и теоремы Леви-Бакстера// Теория вероятностей и математическая статистика. – 1986. – Вып. 35. – С. 3–6. 3. *Булдигін В.В., Мельник В.М., Шпортюк В.Г.* Про теореми Леві-Бакстера для дробових полів. I // Укр. матем. журн. – 1998. – Том 50, №11. – С. 1463–1476. 4. *Булдигін В.В., Мельник В.М., Шпортюк В.Г.* Про теореми Леві-Бакстера для дробових полів. II // Укр. матем. журн. – 1999. – Том 51, №1. – С. 12–31. 5. *Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В.* Метрические характеристики случайных величин и процессов. – К:, 1998. 6. *Гладышев Е.Г.* Новая предельная теорема для случайных процессов с гауссовскими приращениями// Теория вероятностей и ее применения. – 1961. – Том 1, вып. 6. – С. 57–66. 7. *Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А.* Гауссовские случайные процессы. – М., 1970. 8. *Краснитский С.М.* О некоторых предельных теоремах для случайных полей с гауссовскими разностями m-го порядка // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1971. – Вып. 5. – С. 71–80. 9. *Курченко О.О.* Збіжність F-варіації гауссового випадкового поля// Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1999. – Вип. 60. – С. 98–108. 10. *Ламперти Дж.* Случайные процессы. Обзор математической теории. – К.:, 1983. 11. *Рыжов Ю.М.* Предельные теоремы для стационарных гауссовских процессов // Теория вероятностей и ее применения. – 1965. – Том 10, вып. 1. – С. 143–151. 12. *Рыжов Ю.М.* Одна предельная теорема для стационарных гауссовских процессов // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1970. – Вып. 1. – С. 178–188. 13. *Шкляр Г.А.* Об одной теореме типа Леви-Бакстера // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1986. – Вып. 34. – С. 129–132. 14. *Baxter G.* A strong limit theorem for Gaussian processes // Proc. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol. 7, No 3. – P. 522–527. 15. *Berman S.M.* A version of the Levy-Baxter theorem for Gaussian processes // Proc. Amer. Math. Soc. – 1967. – Vol. 18. – P. 1051–1055. 16. *Chen Xiong, Pan Xia.* On Levy-Baxter theorem for general two-parameter Gaussian Processes // Studia Scientarium Mathematicarum Hungarica. – 1991. – Vol. 26. – P. 401–410. 17. *Deo C.M., Wong S.F.* Champs aleatoires Gaussienne // Canad. J. Statist. – 1978. – No 6. – P. 33–40. 18. *Gine E., Klein R.* On quadratic variation of processes with Gaussian increments // Ann. of Probab. – 1975. – Vol. 3, No 4. – P. 716–721. 19. *Guyon X.* Quelques resultats sur les variations de champs gaussiens stationaires // C.R. Acad Sci. Paris, ser. I. – 1981. – Vol. 293. – P. 649–651. 20. *Kawada T.* The Levy-Baxter theorem for Gaussian random fields: a sufficient condition // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – Vol. 53, No 2. – P. 463–469. 21. *Levy P.* Le movement Brownian plan // Amer. J. Math. – 1940. – Vol. 62. – P. 487–550. 22. *Percy P.* The Quadratic variation of random processes // Z. fur wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete. – 1971. – Vol. 19. – P. 291–301. 23. *Strait P.T.* On Berman's version of the Levy-Baxter theorem // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 23, No 1. – P. 91–93. 24. *Wrobel A.* On the almost sure convergence of the square variation of the Brownian motion // Probability and Mathematical Statistics. – 1982. – Vol. 3, No 1. – P. 97–101.

Надійшла до редколегії 30.09.2008 р.

УДК 519.21

В. Зубченко,асп.
E–mail: v_zubchenko@ukr.net

ГРАНИЧНА ПОВЕДІНКА ДОВГОСТРОКОВОЇ ВІДСОТКОВОЇ СТАВКИ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ СТОХАСТИЧНІЙ МОДЕЛІ ВІДСОТКОВОЇ СТАВКИ КОКСА–ІНГЕРСОЛЛА–РОССА

Досліджено збіжність довгострокової відсоткової ставки в узагальненій стохастичній моделі Кокса–Інгерсолла–Росса миттєвої відсоткової ставки із лінійним коефіцієнтом зносу та додатковою випадковістю, неліпшицевою дифузією та центрованою пуассонівською мірою.

We study long-term return convergence in the Cox-Ingersoll-Ross extended model of the short interest rate with linear drift coefficient and additional randomness, non-Lipschitz diffusion and centered Poisson measure.

Вступ

Дослідження стохастичних диференціальних рівнянь дифузійного типу із гельдеровим коефіцієнтом дифузії становить особливий інтерес у зв'язку із застосуванням у фінансах [4]. Рівняння такого типу широко використовуються для моделювання стану фінансових ринків. Зокрема, у стохастичній моделі Кокса-Інгерсолла-Росса [2] динаміка короткострокової відсоткової ставки $r(t)$ описується наступним стохастичним диференціальним рівнянням:

$$dr(t) = k(\gamma - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \tag{1}$$

де W – вінерівський процес, k , γ та σ – додатні сталі.

Проте природно припускати, що на реальному фінансовому ринку γ та σ будуть постійно змінюватись. Тому багато робіт присвячено узагальненню даної моделі. Зокрема, у роботі [3] розглядається узагальнена CIR–модель із лінійним коефіцієнтом зносу, додатковою випадковістю та гельдеровою дифузією.

Але фінансові ринки за певних умов функціонують таким чином, що відсоткові ставки у деякі моменти часу мають стрибки. Тому цікаво як з практичної, так і з теоретичної точки зору розглянути узагальнення стохастичної моделі Кокса–Інгерсолла–Росса, динаміка миттєвої відсоткової ставки в якій описується стохастичним рівнянням із гельдеровою дифузією та зі стрибковою частиною.

Особливий інтерес для банків та страхових компаній становить дослідження довгострокової відсоткової ставки $\frac{1}{t}\int_0^t r(s)ds$, де $r(s)$ – миттєва відсоткова ставка, поведінка якої описується, наприклад, узагальненою CIR–моделлю. Дослідження граничної поведінки при $t \to \infty$ довгострокової відсоткової ставки виявляється корисним для ефективного управління ціновою стратегією довгострокових договорів страхування життя.

У даній роботі ми розглядаємо узагальнену CIR–модель відсоткової ставки, що описується стохастичним диференціальним рівнянням із лінійним коефіцієнтом зносу та додатковою випадковістю, неліпшицевою дифузією та центрованою пуассонівською мірою. Доведено збіжність м.н. довгострокової відсоткової ставки до сталого значення, котре визначається часовим середнім процесу коефіцієнту зносу. Розглянуто двофакторну CIR–модель відсоткової ставки та доведено збіжність м.н. довгострокової відсоткової ставки до сталого значення.

Досліджуємо стохастичне диференціального рівняння

$$dX(t) = (2\beta X(t) + \delta(t))dt + g(X(t))dW(t) + \int_{\mathbb{R}} q(X(t), y)\tilde{\nu}(dt, dy) \tag{2}$$

де $\beta \le 0$, $\delta : \Omega \times R^+ \to R^+$ – випадковий процес, такий що $\int_0^t \delta(s)ds < \infty$; W – вінерівський процес; ν – пуассонівська міра, $E\nu(dt,dy) = \Pi(dy)dt$, $\tilde{\nu}(dt,dy) = \nu(dt,dy) - \Pi(dy)dt$ – центрована пуассонівська міра, Π – сигма–скінченна міра на σ–алгебрі борельових множин $\mathbf{R}$. Нехай задано ймовірнісний простір $(\Omega, F, \mathbf{P})$ з потоком σ–алгебр F_t, поповненим усіма подіями з F_0 нульової ймовірності. Вінерівський процес W та центрована пуассонівська міра $\tilde{\nu}$ узгоджені з потоком F_t та незалежні між собою, $X(0) = x_0$. Коефіцієнти $g(x)$ та $q(x,y)$ – невипадкові вимірні функції. Дифузія $g(x)$ – гельдерова.

Будемо припускати, що коефіцієнти рівняння (2) задовольняють наступні умови:

1) $\beta \le 0$, $\delta : \Omega \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $\int_0^t \delta(s)ds < \infty$ м.н. для всіх t.

2) $\int_R | q(x,y)|^2 \Pi(dy)$ – обмежений.

3) $\lim_{x_1 \to x_2} \int_R | q(x_1,y) - q(x_2,y)|^2 \Pi(dy) = 0$.

4) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $g(0) = 0$ та задовольняє умову Гельдера: $| g(x_1) - g(x_2)| \le b\sqrt{| x_1 - x_2 |}$ для всіх $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, b – деяка стала.

5) $q(0,y) = 0$ для будь–якого $y \in \mathbf{R}$, $q(x,y) \ge 0$ для будь–яких $x \in \mathbf{R}_+$, $y \in \mathbf{R}$ та задовольняє умову

$$\int_R | q(x_1,y) - q(x_2,y) |\Pi(dy) \le k | x_1 - x_2 | \text{ для всіх } x_1, x_2 \in \mathbf{R},\ k \text{ – деяка стала.}$$

У роботі [1] ми показали, що за умов 1)–5) рівняння (2) має єдиний сильний розв'язок, що майже напевно невід'ємний.

Допоміжні результати

Лема 1. *Нехай випадковий процес X є розв'язком стохастичного диференціального рівняння (2), для коефіцієнтів якого виконуються умови 1)–5) та $\int_0^t E\delta(s)ds < \infty$. Тоді для всіх $t \ge 0$ маємо:*

$$EX(t) = e^{2\beta t} X(0) + \int_0^t e^{2\beta(t-s)} E\delta(s)ds.$$

Доведення. Скориставшись узагальненою формулою Іто, одержуємо наступне зображення розв'язку рівняння (2):

$$X(t) = e^{2\beta t}\Big(X(0) + \int_0^t \delta(s)e^{-2\beta s}\,ds + \int_0^t e^{-2\beta s} g(X(s))dW(s) + \int_0^t\int_R e^{-2\beta s} q(X(s),y)\tilde{\nu}(ds,dy)\Big). \quad (3)$$

Тому, скориставшись мартингальними властивостями стохастичних інтегралів, для доведення твердження леми досить показати, що $E\int_0^t g^2(X(s))e^{-4\beta s}\,ds < \infty$ та $E\int_0^t\int_R q^2(X(s),y)e^{-4\beta s}\,\Pi(dy)ds < \infty$. Скориставшись умовами 2) та 4), одержуємо:

$$E\int_0^t g^2(X(s))e^{-4\beta s}\,ds \le b^2 e^{-4\beta t}\int_0^t EX(s)ds \quad (4)$$

та

$$E\int_0^t\int_R q^2(X(s),y)e^{-4\beta s}\,\Pi(dy)ds \le Cte^{-4\beta t} < \infty.$$

Оцінимо $EX(t)$. Для того, щоб гарантувати скінченність оцінюваної величини, означимо послідовність $(\tau_n)_{n\ge 0}$ моментів зупинки наступним чином: $\tau_n = \inf\{s \mid X(s) \ge n\}$, та оцінимо спочатку $EX(t)1_{\{t<\tau_n\}}$.

З рівняння (2) одержуємо:

$$EX(t)1_{\{t<\tau_n\}} \le EX(0) + 2|\beta|\int_0^t EX(s)1_{\{s<\tau_n\}}\,ds + \int_0^t E\delta(s)ds +$$
$$+\Big(E\big(\int_0^t g(X(s))1_{\{t<\tau_n\}}\,dW(s)\big)^2\Big)^{1/2} + \Big(E\big(\int_0^t\int_R q(X(s),y)\tilde{\nu}(ds,dy)\big)^2\Big)^{1/2} =$$
$$= EX(0) + 2|\beta|\int_0^t EX(s)1_{\{s<\tau_n\}}\,ds + \int_0^t E\delta(s)ds + \Big(E\int_0^t g^2(X(s))1_{\{s<\tau_n\}}\,ds\Big)^{1/2} + \Big(E\int_0^t\int_R q^2(X(s),y)\Pi(dy)ds\Big)^{1/2} \le$$
$$\le EX(0) + 2|\beta|\int_0^t EX(s)1_{\{s<\tau_n\}}\,ds + \int_0^t E\delta(s)ds + b\Big(\int_0^t EX(s)1_{\{s<\tau_n\}}\,ds\Big)^{1/2} + (Ct)^{1/2} \le$$
$$\le EX(0) + \int_0^t E\delta(s)ds + b + (Ct)^{1/2} + (b - 2\beta)\int_0^t EX(s)1_{\{s<\tau_n\}}\,ds.$$

Скориставшись нерівністю Гронуолла, одержуємо:

$$EX(t)1_{\{t<\tau_n\}} \le \Big(EX(0) + \int_0^t E\delta(s)ds + b + (Ct)^{1/2}\Big)e^{(b-2\beta)t}.$$

Застосувавши лему Фату та перейшовши до границі при $n \to \infty$, одержуємо дану оцінку для $EX(t)$. Тому, врахувавши (4) дійсно $E\int_0^t g^2(X(s))e^{-4\beta s}\,ds < \infty$, й твердження леми випливає з вищенаведених міркувань. □

Нам також знадобиться лема Кронекера [5, c. 175]:

Лема 1. *Нехай* Y *– неперервний семімартингал,* f *– додатна функція, що прямує до нескінченності. Якщо* $\int_0^\infty \frac{dY(u)}{f(u)}$ *існує м.н., то* $\frac{Y(t)}{f(t)} \to 0$ *м.н.*

Основний результат

Теорема 1. *Нехай випадковий процес* X *є розв'язком стохастичного диференціального рівняння (2), для коефіцієнтів якого виконуються умови 1)–5) та* $\frac{1}{s}\int_0^s \delta(u)du \to \overline{\delta}$ *м.н., де* $\overline{\delta} : \Omega \to \mathbf{R}^+$. *Тоді* $\frac{1}{s}\int_0^s X(u)du \to \frac{-\overline{\delta}}{2\beta}$ *м.н.*

Доведення. Проінтегрувавши стохастичне диференціальне рівняння (2), одержуємо

$$\frac{1}{t+1}\int_0^t \Big(X(s)+\frac{\delta(s)}{2\beta}\Big)ds = -\int_0^t \frac{g(X(s))}{2\beta(t+1)}dW(s) - \int_0^t\int_{\mathrm{R}} \frac{q(X(s),y)}{2\beta(t+1)}\tilde{\nu}(ds,dy) + \frac{X(t)-X(0)}{2\beta(t+1)}. \qquad (5)$$

Покажемо, що усі доданки правої частини рівняння (5) збігаються до нуля м.н.

Для того, щоб показати, що $\int_0^t \frac{g(X(s))}{2\beta(t+1)}dW(s)$ збігається до нуля м.н., застосуємо лему Кронекера та перевіримо існування м.н. $\int_0^\infty \frac{g(X(u))}{u+1}dW(u)$.

Означимо наступну послідовність $(T_n)_{n\ge 1}$ моментів зупинки:

$$T_n = \inf\Big\{t \mid \int_0^t \frac{\delta(u)}{(u+1)^2}du \ge n\Big\}.$$

Позначимо $X^{T_n} := X(u)1_{\{u\le T_n\}}$. Оскільки згідно умов теореми $\frac{1}{s+1}\int_0^s \delta(u)du \to \overline{\delta}$ м.н., одержуємо, що $\int_0^u \delta(s)ds \le K(u+1)$ м.н., де $K = K(\omega) < \infty$ м.н. Покажемо, що $\int_0^\infty \frac{\delta(u)}{(u+1)^2}du < \infty$ м.н.

$$\int_0^\infty \frac{\delta(u)}{(u+1)^2}du = \frac{\int_0^u \delta(s)ds}{(u+1)^2}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty \Big(\int_0^u \delta(s)ds\Big)\frac{du}{(u+1)^3} \le \overline{\lim}_{u\to\infty}\frac{\int_0^u \delta(s)ds}{(u+1)^2} + 2\int_0^\infty \frac{K(u+1)}{(u+1)^3}du < \infty$$

Тому, оскільки $\int_0^\infty \frac{g(X^{T_n}(u))}{u+1}dW(u)$ є локальним мартингалом, досить довести що $\int_0^t \frac{g(X^{T_n}(u))}{u+1}dW(u)$ є обмеженим в L^2 мартингалом:

$$E\Big(\int_0^t \frac{g(X^{T_n}(u))}{u+1}dW(u)\Big)^2 = \int_0^t Eg^2(X^{T_n}(u))\frac{1}{(u+1)^2}du \le \int_0^t EX^{T_n}(u)\frac{b^2}{(u+1)^2}du.$$

Оцінимо останній інтеграл. Для цього зауважимо, що

$$EX^{T_n}(u) = EX(u)1_{\{u\le T_n\}} \le e^{2\beta u}E(e^{-2\beta u}X(u)1_{\{u\le T_n\}}) \le e^{2\beta u}E(e^{-2\beta(u\wedge T_n)}X(u\wedge T_n)).$$

З леми 1 маємо, що

$$E(e^{-2\beta(s\wedge T_n)}X_{s\wedge T_n}) = X(0) + E\int_0^{s\wedge T_n} e^{-2\beta u}\delta(u)du.$$

Тому

$$EX^{T_n}(u) \le e^{2\beta u}\Big(X(0) + E\int_0^{u\wedge T_n} e^{-2\beta s}\delta(s)ds\Big) \le e^{2\beta u}X(0) + e^{2\beta u}\int_0^u e^{-2\beta s}E(\delta(s)1_{\{s\le T_n\}})ds.$$

Скориставшись цим результатом, одержуємо

$$\int_0^t EX^{T_n}(u)\frac{1}{(u+1)^2}du \le \int_0^t X(0)\frac{e^{2\beta u}}{(u+1)^2}du + \int_0^t \frac{e^{2\beta u}}{(u+1)^2}du\int_0^u e^{-2\beta s}E(\delta(s)1_{\{s\le T_n\}})ds.$$

Очевидно, перший доданок рівномірно обмежений по t. Доведемо те саме для другого доданку. Застосуємо теорему Фубіні:

$$\int_0^t \frac{e^{2\beta u}}{(u+1)^2}du\int_0^u e^{-2\beta s}E(\delta(s)1_{\{s\le T_n\}})ds = \int_0^t e^{-2\beta s}E(\delta(s)1_{\{s\le T_n\}})ds\int_s^t \frac{e^{2\beta u}}{(u+1)^2}du \le$$

$$\le \int_0^t E(\delta(s)1_{\{s\le T_n\}})\frac{1}{(s+1)^2}\Big(\frac{-1}{2\beta}\Big)ds \le \frac{-1}{2\beta}E\int_0^{T_n}\frac{\delta(s)}{(s+1)^2}ds \le \frac{-n}{2\beta}.$$

Тепер доведемо, що $\int_0^t\int_R \frac{q(X(s),y)}{2\beta(t+1)}\tilde{\nu}(ds,dy)$ збігається до нуля м.н. при $t\to\infty$. Для цього покажемо, що $\frac{1}{t}\int_0^t\int_R q(X(s),y)\tilde{\nu}(ds,dy)\to 0$ м.н при $t\to\infty$. Оскільки розглядаємо граничну поведінку при $t\to\infty$, то можемо вважати $t\ge 1$.

$$\mathrm{P}\Big\{\sup_{A\le t\le A_1}\frac{1}{t}\Big|\int_0^t\int_R q(X(s),y)\tilde{\nu}(ds,dy)\Big|>\varepsilon\Big\}\le \mathrm{P}\Big\{\sup_{A\le t\le A_1}\frac{1}{A}\Big|\int_0^t\int_R q(X(s),y)\tilde{\nu}(ds,dy)\Big|>\varepsilon\Big\}\le$$

$$\le\frac{1}{A^2\varepsilon^2}E\Big(\int_0^{A_1}\int_R q(X(s),y)\tilde{\nu}(ds,dy)\Big)^2\le\frac{1}{A^2\varepsilon^2}E\int_0^{A_1}\int_R q^2(X(s),y)\Pi(dy)ds\le\frac{CA_1}{A^2\varepsilon^2},$$

де в останній нерівності ми скористались умовою 2) на коефіцієнти рівняння.

$$\mathrm{P}\Big\{\sup_{A\le t}\frac{1}{t}\Big|\int_0^t\int_R q(X(s),y)\tilde{\nu}(ds,dy)\Big|>\varepsilon\Big\}\le\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}\Big\{\sup_{A\cdot 2^k\le t\le A\cdot 2^{k+1}}\frac{1}{t}\Big|\int_0^t\int_R q(X(s),y)\tilde{\nu}(ds,dy)\Big|>\varepsilon\Big\}\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{CA\cdot 2^{k+1}}{\varepsilon^2A^2\cdot 2^{2k}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C}{\varepsilon^2A\cdot 2^{k-1}}=\frac{4C}{\varepsilon^2A}.$$

Величина

$$\alpha(A)=\sup_{t\ge A}\frac{1}{t}\Big|\int_0^t\int_R q(X(s),y)\tilde{\nu}(ds,dy)\Big|$$

монотонно спадає при $A\to\infty$ і, значить, існує границя $\alpha=\lim_{A\to\infty}\alpha(A)$. Тоді

$$\mathrm{P}\{\alpha>\varepsilon\}=\lim_{A\to\infty}\mathrm{P}\{\alpha(A)>\varepsilon\}=0,$$

звідки одержуємо, що $\frac{1}{t}\int_0^t\int_R q(X(s),y)\tilde{\nu}(ds,dy)\to 0$ м.н.

Для того, щоб оцінити третій доданок в (5), скористаємось зображенням (3):

$$\frac{X(t)}{t+1}=\frac{e^{2\beta t}X(0)}{t+1}+\int_0^t\frac{e^{2\beta(t-u)}}{t+1}\delta(u)du+\int_0^t\frac{e^{2\beta(t-u)}}{t+1}g(X(u))dW(u)+\int_0^t\int_R\frac{e^{2\beta(t-u)}}{t+1}q(X(u),y)\tilde{\nu}(du,dy).\qquad(6)$$

Оскільки за умов теореми $\frac{1}{s+1}\int_0^s\delta(u)du\to\overline{\delta}$ м.н., то другий доданок можна зробити як завгодно малим, оскільки для всіх $\omega\in\Omega$ та для будь–якого $\varepsilon>0$

$$\frac{1}{t+1}\int_0^t e^{2\beta(t-u)}\delta(\omega,u)du\le\frac{1}{t+1}\int_0^{t-\sqrt{t}}e^{2\beta\sqrt{t}}\delta(\omega,u)du+\frac{1}{t+1}\int_{t-\sqrt{t}}^t\delta(\omega,u)du.$$

При заданому $\varepsilon>0$ перший доданок можемо представити у вигляді

$$\frac{1}{t+1}\int_0^{t-\sqrt{t}}e^{2\beta\sqrt{t}}\delta(\omega,u)du\le\frac{1}{t+1-\sqrt{t}}\int_0^{t-\sqrt{t}}e^{2\beta\sqrt{t}}\delta(\omega,u)du\le\overline{\delta}(1+\varepsilon)e^{2\beta\sqrt{t}}.$$

Тому перший доданок збігається до нуля при $t\to\infty$. Те саме справедливо і для другого доданку. Дійсно:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t+1}\int_{t-\sqrt{t}}^t\delta(\omega,u)du=\lim_{t\to\infty}\Big(\frac{1}{t+1}\int_0^t\delta(\omega,u)du-\frac{1}{t+1-\sqrt{t}}\int_0^{t-\sqrt{t}}\delta(\omega,u)du\Big)+$$

$$+\lim_{t\to\infty}\Big(\frac{-1}{t+1}+\frac{1}{t+1-\sqrt{t}}\Big)\times\int_0^{t-\sqrt{t}}\delta(\omega,u)du=\overline{\delta}-\overline{\delta}+\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t}}{t+1}\frac{1}{t+1-\sqrt{t}}\times\int_0^{t-\sqrt{t}}\delta(\omega,u)du=0.$$

Щоб довести, що $\frac{e^{2\beta t}}{t+1}\int_0^t e^{-2\beta u}g(X(u))dW(u)$ збігається до нуля м.н., знову застосовуємо лему Кронекера та доводимо існування $\int_0^\infty\frac{e^{-2\beta t}g(X(t))}{(t+1)e^{-2\beta t}}dW(t)$. Оскільки останній інтеграл рівний $\int_0^\infty\frac{g(X(t))}{t+1}dW(t)$, то результат випливає із попередніх розрахунків.

Збіжність при $t\to\infty$ до нуля м.н. останнього доданку правої частини рівності (6) доводиться так само, як і збіжність до нуля м.н. другого доданку правої частини рівності (5). □

Двофакторна стохастична модель відсоткової ставки

У цьому розділі ми розглянемо застосування теореми 1. Досліджуємо узагальнену двофакторну CIR–модель відсоткової ставки, перше із стохастичних рівнянь якої моделює динаміку миттєвої відсоткової ставки, а друге – стан фінансового ринку, на якому ми вивчаємо граничну поведінку довгострокової стави:

$$dr(t)=k_1(\gamma(t)-r(t))dt+\sigma_1\sqrt{r(t)}dW_1(t)+\int_R q_1(r(t),y)\tilde{\nu}_1(dt,dy),$$

$$d\gamma(t)=k_2(\gamma^*-\gamma(t))dt+\sigma_2\sqrt{\gamma(t)}dW_2(t)+\int_R q_2(\gamma(t),y)\tilde{\nu}_2(dt,dy),$$

k_1, k_2, σ_1, σ_2, γ^* – додатні сталі; W_1, W_2 – вінерівські процеси; $\tilde{\nu}_1$, $\tilde{\nu}_2$ – центровані пуассонівські міри; $q_1(x,y)$, $q_2(x,y)$ – невипадкові вимірні функції, що задовольняють умови 2), 3) та 5). Нас цікавить гранична поведінка при $t \to \infty$ довгострокової відсоткової ставки $\frac{1}{t}\int_0^t r(s)ds$.

Розглянемо спочатку друге рівняння моделі. Перетворення $Y(t) = \frac{4}{\sigma_2^2}\gamma(t)$ є розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dY(t) = \left(-k_2 Y(t) + \frac{4k_2\gamma^*}{\sigma_2^2}\right)dt + 2\sqrt{Y(t)}dW_1(t) + \int_{\mathrm{R}} \frac{4}{\sigma_2^2} q_2(Y(t)\frac{\sigma_2^2}{4}, y)\tilde{\nu}_2(dt,dy),$$

тобто рівняння типу (2) із наступними коефіцієнтами:

$$\beta = -\frac{k_2}{2},\ \delta(t) = \frac{4k_2\gamma^*}{\sigma_2^2}\quad \forall t \in \mathbf{R}_+,\ g(x) = 2\sqrt{x},\ q(x,y) = \frac{4}{\sigma_2^2} q_2(x\frac{\sigma_2^2}{4}, y).$$

Умови теореми 1, очевидно, виконуються, тому має місце збіжність $\frac{1}{t}\int_0^t Y(s)ds \to \frac{4\gamma^*}{\sigma_2^2}$ при $t \to \infty$ м.н. Тому $\frac{1}{t}\int_0^t \gamma(s)ds \to \gamma^*$ м.н. при $t \to \infty$.

Так само розглядаємо перше рівняння моделі. Перетворення $X(t) = \frac{4r(t)}{\sigma_1^2}$ є розв'язком рівняння типу (2) із наступними коефіцієнтами:

$$\beta = -\frac{k_1}{2},\ \delta(t) = \frac{4k_1}{\sigma_1^2}\gamma(t),\ g(x) = 2\sqrt{x},\ q(x,y) = \frac{4}{\sigma_1^2} q_1(x\frac{\sigma_1^2}{4}, y).$$

Зауважимо, що

$$\frac{1}{t}\int_0^t \delta(s)ds = \left(\frac{1}{t}\int_0^t \gamma(s)ds\right)\frac{4k_1}{\sigma_1^2} \to \gamma^* \frac{4k}{\sigma_1^2} \text{ м.н.}$$

Застосувавши теорему 1 маємо збіжність $\frac{1}{t}\int_0^t X(s)ds \to \frac{4\gamma^*}{\sigma_1^2}$. Тому одержуємо наступну збіжність при $t \to \infty$ довгострокової відсоткової ставки у двофакторній CIR–моделі: $\frac{1}{t}\int_0^t r(s)ds \to \gamma^*$.

Висновки

Дослідження стохастичних диференціальних рівнянь із лінійним коефіцієнтом зносу та додатковою випадковістю, неліпшицевою дифузією та зі стрибковою частиною представляє особливий інтерес із практичної точки зору. Рівняння такого типу можуть бути використані для моделювання відсоткових ставок фінансових ринків, що у певні моменти часу мають стрибки.

У роботі досліджено збіжність довгострокової відсоткової ставки в узагальненій стохастичній моделі Кокса-Інгерсолла-Росса миттєвої відосткової ставки із лінійним коефіцієнтом зносу та додатковою випадковістю, неліпшицевою дифузією та центрованою пуассонівською мірою. Одержаний результат використано для дослідження граничної поведінки довгострокової відсоткової ставки у двофакторній моделі.

1. *Зубченко В.* Властивості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь із лінійним коефіцієнтом зносу та додатковою випадковістю, неліпшицевою дифузією та з пуассонівськими мірами // Теорія ймовірностей та математична статистика. Подано до друку. 2. *Cox J., Ingersoll J. and S.A. Ross.* A theory of the term structure of interest rate // Econometrica. – 1985. – Vol. 53. – P. 385-407. 3. *Deelstra G. and Delbaen F.* Long-term returns in stochastic interest rate models // Insurance: Mathematics and Economics. – 1995. №17. – P.163-169. 4. *Lamberton D. and Lapeyre B.* Introduction to Stochastic Calculas Applied to Finance. – Chapman & Hall, London, Weinheim, New York, 1991. 5. *Revuz D. and Yor M.* Continuous Martingales and Brownian motion. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1991.

Надійшла до редакції 01.10.09

УДК 519.21

Я. Яценко,студ.
E-mail: yaryat@ua.fm

ФОРМУЛИ ЗНАХОДЖЕННЯ МАКСИМІЗАТОРА ЕКСПОНЕНЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ КОРИСНОСТІ В БІНОМІАЛЬНІЙ МОДЕЛІ РИНКУ

Знайдено формулу для максимізатора експоненційної функції корисності в біноміальній моделі повного ринку.
Formula for maximizer of exponential utility function in binomial model of complete market is given.

1. Вступ

Розглянемо просту одноперіодну модель фінансового ринку. Нехай маємо безризиковий актив і *n*-1 ризикових активів, ціна яких $S_i(t), t = \overline{0,1}, i = \overline{1,n-1}$, визначена у моменти часу 0 і 1. Початкова ціна $S_i(0) = \pi_1 \neq 0,\ i = \overline{1,n-1},$