УДК 512.53

М. Сумарюк, асп.

СТЕПЕНЕВІ РЯДИ, ЩО ПОРОДЖУЮТЬ ВІЛЬНІ НАПІВГРУПИ

Наводяться нові достатні умови аналітичного характеру при виконанні яких, напівгрупа породжена елементарними функціями, що розкладаються у степеневі ряди певного вигляду, буде вільною напівгрупою.

New sufficient conditions of analytical character are determined. Under their implementation the semigroup generated by elementary functions, which is developing into power series of some sort, will be a free semigroup.

1. Вступ

У теорії вільних конструкцій груп та напівгруп важливим напрямком досліджень є побудова конкретних зображень таких вільних конструкцій за допомогою різноманітних геометричних або алгебро-комбінаторних об'єктів. Це, наприклад, зображення Магнуса формальними степеневими рядами [2], зображення унітрикутними матрицями нескінченного порядку [3], зображення вільних груп у вінцевих добутках [1] і т.ін.

Найчастіше будуються приклади вільних 2-породжених груп (напівгруп), тобто будується зображення вільної групи (напівгрупи) рангу 2, бо добре відомо, що така група (напівгрупа) містить ізоморфну копію будь-якої вільної групи (напівгрупи) скінченного або зліченного рангу.

Серед всіх зображень вільних алгебраїчних конструкцій, виділяються зображення елементарними функціями над полями нульової характеристики відносно дії суперпозиції функцій. Зокрема, у роботах Коена [4] та Уайта [5] доводиться, що перетворення дійсного або комплексного поля $f_1: x \to x+1$ та $f_2: x \to x^q$, де $q>1$ – фіксоване непарне натуральне число у випадку поля R і довільне натуральне число у випадку поля C, породжують вільну групу (напівгрупу).

У даній роботі наводяться нові достатні умови абсолютної вільності напівгруп рангу 2, що породжуються функціями комплексної змінної, які розкладаються у степеневі ряди певного вигляду.

2. Допоміжні відомості

Нехай $f,g:\Omega \to \Omega$ – аналітичні функції, визначені у деякій області Ω комплексної площини C такі, що мають місце їх розклади у степеневі ряди вигляду

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1} z^{2n-1}, \qquad (1)$$

$$g(z) = b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n} z^{2n}, \qquad (2)$$

які збігаються у даній області Ω.

Символом $N[\Omega]$ позначимо сукупність всіх аналітичних функцій $f:\Omega \to \Omega$, які розкладаються у степеневий ряд виду (1) і аналогічно, символом $P[\Omega]$ позначимо сукупність всіх аналітичних функцій $g:\Omega \to \Omega$, які розкладаються у степеневий ряд виду (2).

Має місце таке твердження.

Лема. *Якщо $f_1, f_2 \in N[\Omega]$, $g_1, g_2 \in P[\Omega]$, то $f_1 \circ f_2 \in N[\Omega]$, $f_1 \circ g_1$, $g_1 \circ f_1$, $g_1 \circ g_2 \in P[\Omega]$, де $\circ$ – операція суперпозиції функцій.*

Сформульоване твердження випливає із властивостей суперпозиції степеневих рядів, тобто підстановки ряду в ряд і отримується безпосередньо.

Нехай $\varphi:\Omega \to \Omega$ – деяка диференційовна функція. Тоді символом $\phi^{(n)}$ позначатимемо n-кратну суперпозицію функції ϕ, тобто

$$\phi^{(n)}(z) \overset{def}{\equiv} (\underbrace{\phi \circ \phi \circ \ldots \circ \phi}_{n})(z), \ z \in \Omega,$$

а її похідну записуватимемо так: $D_z\phi(z)$, де D_z – оператор диференціювання по змінній $z \in \Omega$.

3. Основна теорема та її застосування

Доведемо таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $f \in N[\Omega]$, $g \in P[\Omega]$ та виконуються наступні умови:*

1) дані функції є сюр'єктивними;

2) довільна n-кратна суперпозиція $f^{(n)}(z)$, $z \in \Omega$, відмінна від тотожної функції $e:\Omega \to \Omega$;

3) множина дійсних чисел R міститься в області Ω і функції f,g: $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ є строго зростаючими на проміжку $[0;+\infty)$;

4) для довільного $x \in [0;+\infty)$ та натурального числа n похідна $D_x f^{(n)}(x)$ є додатною, причому $f(0)>0$;

5) для довільного $x \in (0;+\infty)$ маємо $D_x g(x) > 0$.

Тоді напівгрупа S, що породжується функціями $f(z), g(z)$, $z \in \Omega$, є вільною напівгрупою рангу 2.

Доведення. Нехай $X = \{x_1, x_2\}$ – алфавіт з двох символів. Розглянемо два напівгрупові слова $u \equiv u(x_1,x_2)$, $v \equiv v(x_1,x_2)$ над алфавітом X, які відрізняються своїми записами у розумінні їх графічного порівняння. Знайдемо значення цих напівгрупових слів на даних функціях $f \in N[\Omega]$, $g \in P[\Omega]$, відносно операції суперпозиції функцій і одержимо нові функції $u(f, g)$, $v(f, g)$.

Із наведеної леми у попередньому пункті випливає, що для будь-якого натурального числа n суперпозиції $f^{(n)} \in N[\Omega]$, $g^{(n)} \in P[\Omega]$. Крім того, згідно з умовою 2 функція $f^{(n)}$, $n \in \mathrm{N}$, відмінна від тотожної функції e, а суперпозиція $g^{(n)}$, $n \in \mathrm{N}$, також відмінна від тотожної функції e, бо $e \notin P[\Omega]$. Тоді, напівгрупові слова $u(f, g)$, $v(f, g)$ є нескоротними або незвідними над множиною функцій $\{f, g\}$.

Отже, для доведення теореми слід показати, що тотожність

$$u(f(z), g(z)) \equiv v(f(z), g(z)), \; z \in \Omega, \tag{3}$$

є невірною. Оскільки функції f та g визначені на R (умова 3), то перевірку тотожності (3) достатньо здійснити на множині R.

За умовою 1 функції f та g є сюр'єктивними функціями, звідки випливатиме, що напівгрупа S, породжена цими функціями, є напівгрупою із скороченням справа. Іншими словами, якщо має місце рівність виду $\varphi \circ h = \psi \circ h$, то $\varphi = \psi$ ($h, \varphi, \psi \in S$).

Таким чином, скориставшись цією властивістю можемо вважати, що напівгрупові слова u та v закінчуються різними літерами з множини $\{f, g\}$, бо якщо ці слова мають однакові закінчення, то у тотожності (3) можна справа виконувати операцію скорочення. Нехай для визначеності напівгрупове слово u закінчується літерою f, а напівгрупове слово v відповідно закінчується літерою g. Тоді $u(f, g) = \tilde{u}(f, g) \circ f^{(\alpha)}$, $v(f, g) = \tilde{v}(f, g) \circ g^{(\beta)}$, де $\alpha, \beta \in \mathrm{N}$, слово $\tilde{u}(f, g)$ або закінчується літерою g, або є порожнім; аналогічно слово $\tilde{v}(f, g)$ закінчується літерою f або є порожнім.

Припустимо далі, що має місце тотожність

$$(\tilde{u}(f, g) \circ f^{(\alpha)})(x) \equiv (\tilde{v}(f, g) \circ g^{(\beta)})(x), \; x \in \mathrm{R}. \tag{4}$$

Тепер знайдемо правосторонню похідну лівої та правої частини тотожності (4) у точці $x = 0$. Отже, маємо:

$$D_x(\tilde{u}(f, g)(f^{(\alpha)}(0)))D_x f^{(\alpha)}(0) = D_x(\tilde{v}(f, g)(g^{(\beta)}(0)))D_x g^{(\beta)}(0). \tag{5}$$

Проаналізуємо одержану рівність. Оскільки $g^{(\beta)} \in P[\Omega]$, то похідна $D_x g^{(\beta)}(0) = 0$, яку знаходимо безпосередньо продиференціювавши почленно степеневий ряд

$$g^{(\beta)}(x) \equiv c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{2n} x^{2n}, \;\; x \in \mathrm{R},$$

з парними показниками змінної x; у результаті отримуємо степеневий ряд, що приймає нульове значення при $x = 0$.

Таким чином, права частина рівності (5) перетворюється в нуль.

Розглянемо тепер ліву частину рівності (5). Отже, згідно з умовою 4 маємо, що $D_x f^{(\alpha)}(0) \neq 0$. Якщо $\tilde{u} = \varnothing$, то рівність (5) стає суперечливою, бо тоді, як показано вище, права її частина дорівнює нулеві, а ліва частина відмінна від нуля. Тому нехай напівгрупове слово $\tilde{u} \neq \varnothing$ і подається у вигляді

$$\tilde{u} = f_1^{(\alpha_1)} \circ f_2^{(\alpha_2)} \circ \ldots \circ f_r^{(\alpha_r)},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\rho \in N$, $f_1, f_2, \ldots, f_r \in \{f, g\}$, причому у цьому наборі функцій поряд стоять різні функції із множини $\{f, g\}$, зокрема, $f_r = g$. Знайдемо похідну функції $\tilde{u}$ в точці $x = f^{(\alpha)}(0)$. У результаті дістанемо

$$D_x \tilde{u}(f^{(\alpha)}(0)) = \frac{df_1^{(\alpha_1)}((f_2^{(\alpha_2)} \circ \ldots \circ f_r^{(\alpha_r)})(f^{(\alpha)}(0))}{d(f_2^{(\alpha_2)} \circ \ldots \circ f_r^{(\alpha_r)})} \cdot \ldots \cdot \frac{df_r^{(\alpha_r)}(f^{(\alpha)}(0))}{dx}. \tag{6}$$

Покажемо, що кожен із множників правої частини рівності (6) відмінний від нуля. Отже, зафіксуємо деяке число $l \in \{1, 2, \ldots, r\}$ і розглянемо відповідний l-й множник, який можемо подати у вигляді

$$a_l \equiv D_x f_l^{(\alpha_l)}(y), \; l \in \{1, 2, \ldots, r-1\},$$

де y – значення функції $f_{l+1}^{(\alpha_{l+1})} \circ \ldots \circ f_r^{(\alpha_r)}$ у точці $x = f^{(\alpha)}(0)$, а також у випадку $l = r$ маємо

$$a_r \equiv D_x f_r^{(\alpha_r)}(f^{(\alpha)}(0)).$$

Використовуючи правило диференціювання складеної функції обчислимо

$$a_l = D_x\, f_l\,(f_l^{(\alpha_l - 1)}(y)) \cdot \ldots \cdot D_x\, f_l(y), \; l \in \{1, 2, \ldots, r-1\}, \tag{7}$$

і при $l = r$ маємо

$$a_r = D_x\, f_r\,(f_r^{(\alpha_r - 1)}(f^{(\alpha)}(0))) \cdot \ldots \cdot D_x\, f_r(f^{(\alpha)}(0)). \tag{8}$$

Оскільки за умовою 3 функції $f, g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ є строго зростаючими на проміжку $[0; +\infty)$, то з означення числа y випливає, що $y > 0$ і всі числа

$$f_l^{(\alpha_l - 1)}(y),\ f_l^{(\alpha_l - 2)}(y), ...,\ f_l(y),\ l \in \{1, 2, ..., r-1\},\quad f_r^{(\alpha_r - 1)}(f^{(\alpha)}(0)),\ f_r^{(\alpha_r - 2)}(f^{(\alpha)}(0)), ..., f^{(\alpha)}(0),$$

де $f_r = g$, є додатними. Згідно з умовами 4 та 5, зокрема, мають місце нерівності $D_x f(x) > 0$ при $x \in [0; +\infty)$, $D_x g(x) > 0$ при $x \in (0; +\infty)$ та $f(0) > 0$, тому всі множники, що входять до правих частин рівностей (7) та (8) також є додатними. Це означає, що число $D_x \widetilde{u}(f^{(\alpha)}(0)) = \prod_{l=1}^{r} a_l$ відмінне від нуля.

Таким чином, ліва частина рівності (5) відмінна від нуля. Тоді припущення щодо виконання тотожності (4) є невірним. Цим самим доведено, що тотожність (3) не виконується, і тому напівгрупа S, породжена функціями $f, g: \Omega \to \Omega$ є вільною напівгрупою рангу 2. □

Має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Напівгрупа, що породжується перетвореннями комплексного поля* $f: x \to x+1$ та $g: x \to x^{2q}$*, де* q *– фіксоване натуральне число, породжують вільну напівгрупу рангу 2.*

Сформульована теорема безпосередньо випливає із доведеної теореми 1, якщо взяти до уваги, що дані функції є розкладеними у степеневі ряди, при цьому $f \in N[\Omega]$ та $g \in P[\Omega]$ і задовольняють її умовам очевидним чином. Зауважимо, що напівгрупа породжена наведеною системою функцій є частковим випадком напівгрупи Коена-Уайта, що досліджувалася у роботах [4-5].

Інші системи функцій, які породжують вільні напівгрупи рангу 2 будуть наведені у подальших статтях.

4. Висновки

Таким чином, у роботі доведено твердження, яке дає достатні умови вільності напівгруп, породжених степеневими рядами певного вигляду. При цьому показано, що доведене твердження має застосування до конкретних прикладів функціональних напівгруп і це дає можливість будувати нові зображення вільних напівгруп елементарними функціями.

1. *Олійник А.С.* Вільні групи автоматних підстановок // Доп. НАН України. – 1998. – №7. – С. 40-44. 2. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. Пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 456 с. 3. *Олийнык А.С., Сущанский В.И.* Свободная группа бесконечных унитреугольных матриц // Мат. заметки. – 2000. – 67, №3, – С. 386-391. 4. *Cohen S.D.* The group of translations and positive rational powers is free // Quart. J.Math. Oxford. – 1995. – 46, №2. – P. 21-93. 5. *White S.* The group, generated by $x \to x+1$ and $x \to x^q$ is free // Journal of Algebra. – 1988. – 118. – P. 408-422.

Надійшла до редколегії 29.09.08

УДК 517.95.4+530.1, 539.3 :518:621.378

Л. Яровой канд.техн.наук, І. Степахно канд.фіз.-мат.наук
E-mail: yarovoi@univ.kiev.ua

ПІДВИЩЕННЯ ЧУТЛИВОСТІ ЛАЗЕРНИХ ВІБРОМЕТРІВ У ПРИСУТНОСТІ ЗАВАД

Теоретично обґрунтований алгоритм підвищення чутливості лазерного віброметра шляхом усунення деформацій сигнал, що часом виникають при відбитті зондувального лазерного променя від випадкових перешкод або вікон та ілюмінаторів. Алгоритм корекції використовує сигнал високочастотної оминаючої на частоті гетеродину. Експериментально отримано 25-30 дБ покращення співвідношення сигнал/завада . L.

We propose an algorithm for increase of the sensitivity of laser Doppler vibrometer in presence of unwanted light backscattered from technological windows or casual obstacles. The algorithm uses for signal correction signal of the high-frequency heterodyne component. An experiment shown 25-30 dB signal/noise improvement for corrected signal.

Вступ

Прогрес експериментальної механіки пов'язаний з удосконаленням спеціальних засобів дослідження. Лазерні доплерівські віброметри, як засоби експериментальної механіки застосовуються при дослідженні різних явищ в мікро- та наномеханіці, дефектоскопії, акустиці [6, 8]. Їх переваги перед віброметрами інших типів в тому, що вони не впливають на параметри руху об'єкту, забезпечуючи в той же час надзвичайно високу точність і широкий діапазон вимірів. В ідеальному випадку вихідний сигнал лазерного віброметра повністю відтворює миттєву швидкість об'єкта, проте наявність хвилі-завади, що часом потрапляє на фотодетектор при відбитті зондувального променя від випадкової перешкоди суттєво спотворює форму сигналу і призводить до зниження чутливості вимірювання і помилки визначення миттєвої швидкості. Природа перешкод, що спотворюють вихідний сигнал досить широка: це віконця та ілюмінатори [10], що розділяють віброметр та об'єкт; порох, краплі вологи на трасі лазерного променя [1]; елементи зовнішніх конструкцій та інші об'єкти [7], що так чи інакше частково відбивають зондувальний промінь в зворотному напрямку.

Механізм спотворень сигналу віброметра, що фізично пов'язаний з взаємодією трьох оптичних хвиль, був ретельно досліджений в [10], де були аналітично виведені співвідношення для сигналу віброметра в присутності оптичної хвилі – завади. Методи, що пропонується вживаються для боротьби із спотвореннями часто мають обмежені можливості. Наприклад, пасивна фільтрація є мало ефективною для пригнічення спотворень в субмікронних коливаннях, а вейвлет-фільтрація [9] також виявляється неефективною для високих рівнів сигналу завади. Для пригнічення небажаних осциляцій, які є результатом впливу завади, запропоновано використовувати процедуру амплітудного детектування із зворотним зв'язком (АДОЗ) [5] англійською - "Amplitude Locked Loop" – ALL). Метод АДОЗ реалізований у пристрої [2], проте, не знайшов поширення, ймовірно внаслідок недостатнього рівня компенсації спотворень і неможливості адекватно реагувати на швидкі зміни амплітуди. На виході віброметра все ще залишається досить високий залишковий рівень шуму.