

Рис. 6. Спектри сигналів швидкості за наявності перешкоди (світлий колір) і при використанні корекції (темний колір)

Висновки

Випадкові перешкоди на трасі розповсюдження зондувального променя лазерного віброметра, а також захисні прозорі вікна та ілюмінатори можуть спотворювати сигнал віброметра і знижувати співвідношення сигнал/завада. Запропонований алгоритм корекції використовує сигнал високочастотної оминаючої віброметра на частоті гетеродину. Як підтверджено експериментами, застосування такого алгоритму дозволяє приблизно на 25-30 дБ покращити співвідношення сигнал/завада і відповідно підвищити чутливість вимірювання вібрації.

1. Сакун М. Ю., Смілянець Ю. П., Яровий Л. К. Вимірювання вібрації обладнання КС засобами лазерної допплерівської віброметрії // Інформаційний огляд ДК "Укртрансгаз". – 2003. – №6. 2. Patent США №5341106 МКІ6 Н03Д 1/18, 1991 3. Яровий Л. К. Метод дискретного вимірювання малих переміщень за допомогою лазерного віброметра // Вісник Київського університету. Серія: механіка та математика. 2006. – Випуск. 15-16. 4. Яровий Л. К. Пат. 84937 Україна МПК G 01 B 9/02. "Спосіб вимірювання вібрації" № а 200614074 заяв. 29.12.2006. друк. 10.12.2008. Бюл.№ 23 -4c.: in 5. Dussarraf O J, Clark D F and Moir T J New demodulation process to reduce cochannel interference for a laser vibrometer sensing system // Vibration Measurements by Laser Techniques, Proc. SPIE 3411. – 1998 6. LM Info Special, Polytec GmbH Waldbronn Germany 1. 2005. 7. Rocheleaucauld O., Khanan S., Olson E. Recording depth and signal competition in heterodyne interferometry // J. Acoust. Soc. Am. – 2005. – Vol.117 № 3. 8. Pai, P.F., Lee, S.Y., and Schulz, M.J. Structural Damage Detection and Estimation Using a Scanning Laser Vibrometer // SPIE's 6th Annual International Symposium on NDE for Health Monitoring and Diagnostics, Newport Beach, California, March 4-8, 2001. 9. Tarun Kumar Gangopadhyay etc. Wavelet analysis of optical signal extracted from a non-contact fibre-optic vibration sensor using extrinsic Fabry-Perot interferometer // Meas. Sci. Technol. – 2005. – Vol.16. 10. Yarovoi L., Siegmund G. The effect of three-wave interference in laser Doppler vibrometry // Meas. Sci. Technol. – 2004. – Vol. 15.

Надійшла до редколегії 24.03.09

УДК 517.95.4+530.1

О. Лісіна

Email: lisina_korovina@mail.ru

ПОБУДОВА 3Д АТОМАРНИХ РАДІАЛЬНИХ БАЗИСНИХ ФУНКІЙ, ЩО ПОРОДЖУЮТЬСЯ ОПЕРАТОРОМ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Отримано фінітний (тобто с компактним носієм) нескінченно диференційований розв'язок функціонально-диференціального рівняння, що будеться за допомогою оператора Гельмгольца. Цей розв'язок є атомарною функцією трьох незалежних змінних і може використовуватись в безсіткових схемах розв'язання крайових задач математичної фізики як радіальні базисні функції

The finitely (with compact support) infinitely differentiated solution is got for functional differential equation which is built by the operator of Helmholtz. This solution is the atomic function of three independent variables and can be in the meshfree schemes of solution of boundary value problem of mathematical physics as radial functions

1. Вступ. Класи атомарних функцій багатьох змінних, за допомогою яких реалізуються процедури безсіткових методів розв'язання крайових задач математичної фізики, досліджувались в ряді робіт [5-7, 9]. Вказані атомарні функції породжуються оператором диференціального рівняння крайової задачі, що дозволяє значно спростити алгоритми побудови наближених розв'язків крайових задач. При розв'язанні крайової задачі, яка описує процес нестационарної тепlopровідності для складних тривимірних областей, представляє інтерес процедура, що передбачає дисcretизацію вихідного нестационарного рівняння за часом та подальший перехід до чисельного розв'язання диференціального рівняння Гельмгольца. Ця схема вказаної крайової задачі досліджувалась, зокрема, в роботі C.S.Chen'a [15]. Представленний в цій роботі підхід уявляється зручним при реалізації безсіткових методів розв'язання задач в тривимірних областях з використанням радіальних базисних функцій [12-14, 16], але вимагає уваги до особливостей, пов'язаних з властивостями цих функцій. У даній статті здійснюється побудова атомарної функції (нескінченно диференційованої, фінітної, тобто з компактним носієм атомарної функції), яка породжується диференціальним оператором Гельмгольца. Таким чином, ці функції будуть природними при реалізації безсіткових схем побудови розв'язків диференціальних рівнянь, в яких присутній оператор Гельмгольца.

Відмітимо, що алгоритм конструювання атомарної функції у випадку двох незалежних змінних, яка породжується за допомогою диференціального оператора Гельмгольца, був досліджений в роботі [8].

2. Основна частина. В роботі приділяється увага особливостям побудови атомарних функцій від трьох незалежних змінних, які є розв'язками функціонально-диференціального рівняння

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3) - \delta^2 u(x_1, x_2, x_3) = \lambda \iint_{\partial\Omega} u [3(x_1 - \xi_1), 3(x_2 - \xi_2), 3(x_3 - \xi_3)] d\omega + \mu u(3x_1, 3x_2, 3x_3), \quad (1)$$

де $\partial\Omega$ – сфера: $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \frac{4}{9}$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – оператор Лапласа; λ, μ – параметри, значення яких уточнюються в процесі відшукання фінітного розв'язку цього рівняння; δ^2 – параметр рівняння Гельмгольца.

Схема побудови фінітного розв'язку рівняння (1) складається з наступних кроків. Застосуємо тривимірне перетворення Фур'є до рівняння (1):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\Delta u(x_1, x_2, x_3) - \delta^2 u(x_1, x_2, x_3)] e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 = \\ & \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \iint_{\partial\Omega} u [3(x_1 - \xi_1), 3(x_2 - \xi_2), 3(x_3 - \xi_3)] d\omega + \mu u(3x_1, 3x_2, 3x_3) \right\} e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3)} dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Позначимо через $U(t_1, t_2, t_3)$ – результат застосування тривимірного перетворення Фур'є до функції $u(x_1, x_2, x_3)$:

$$U(t_1, t_2, t_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, x_3) e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3)} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Для зручності нехай $3(x_i - \xi_i) = \eta_i$, $i = 1, 2, 3$, звідки $x_i = \frac{\eta_i}{3} + \xi_i$. У правій частині рівняння (2) змінимо порядок застосування операції інтегрування по поверхні сфери і операції тривимірного перетворення Фур'є. В результаті рівняння (2) переписується у вигляді:

$$\begin{aligned} & -(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) U(t_1, t_2, t_3) - \delta^2 U(t_1, t_2, t_3) = \\ & = \lambda \iint_{\partial\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u \left(3 \frac{\eta_1}{3}, 3 \frac{\eta_2}{3}, 3 \frac{\eta_3}{3} \right) e^{-i \left[t_1 \left(\frac{\eta_1}{3} + \xi_1 \right) + t_2 \left(\frac{\eta_2}{3} + \xi_2 \right) + t_3 \left(\frac{\eta_3}{3} + \xi_3 \right) \right]} d \frac{\eta_1}{3} d \frac{\eta_2}{3} d \frac{\eta_3}{3} + \frac{\mu}{27} U \left(\frac{t_1}{3}, \frac{t_2}{3}, \frac{t_3}{3} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Після здійснення тривимірного перетворення Фур'є у правій частині рівняння (3) отримуємо:

$$-(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \delta^2) U(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{27} U \left(\frac{t_1}{3}, \frac{t_2}{3}, \frac{t_3}{3} \right) \left[\lambda \iint_{\partial\Omega} e^{-i(t_1 \xi_1 + t_2 \xi_2 + t_3 \xi_3)} d\omega + \mu \right]. \quad (4)$$

У рівнянні (4) розглянемо інтеграл по сфері $\partial\Omega$: $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \frac{4}{9}$. Відзначимо, що в показнику підінтегральної функції (4) представлений скалярний добуток двох векторів $\vec{T} = (t_1, t_2, t_3)$, $\vec{\Xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Вважатимемо, що вектор \vec{T} направлений уздовж аплікати декартової системи координат, в якій визначається сфера $\partial\Omega$, а вектор $\vec{\Xi}$ направлений уздовж радіус-вектора, який описує цю сферу. Щоб спростити процедуру інтегрування введемо сферичні координати $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \phi$ [3]. Це дозволяє інтеграл по поверхні $\partial\Omega$ представити в наступному вигляді: $\iint_{\partial\Omega} f(x, y, z) ds = r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi) \sin \theta d\theta d\phi$.

Завдяки виписаному перетворенню інтеграл по поверхні в рівняння (4) перепишеться наступним чином:

$$\iint_{\partial\Omega} e^{-i(t_1 \xi_1 + t_2 \xi_2 + t_3 \xi_3)} d\omega = \frac{4}{9} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-i\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi = \frac{4}{9} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-i\frac{2}{3}\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi. \quad (5)$$

Здійснення процедури інтегрування в (5) приводить до представлення інтеграла елементарною функцією:

$$\iint_{\partial\Omega} e^{-i(t_1 \xi_1 + t_2 \xi_2 + t_3 \xi_3)} d\omega = \frac{16\pi}{9} \frac{\sin \frac{2}{3} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{\frac{2}{3} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}.$$

Отримане дозволяє записати рівняння (4) у вигляді:

$$-(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \delta^2) U(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{27} U \left(\frac{t_1}{3}, \frac{t_2}{3}, \frac{t_3}{3} \right) \left[\lambda \frac{16\pi}{9} \frac{\sin \frac{2}{3} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{\frac{2}{3} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}} + \mu \right]$$

або

$$U(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{27} U\left(\frac{t_1}{3}, \frac{t_2}{3}, \frac{t_3}{3}\right) \left\{ \lambda \frac{16\pi}{9} \frac{\sin \frac{2}{3} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{\frac{2}{3} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}} + \mu \right\} \frac{1}{(-\delta^2 - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2)}. \quad (6)$$

Виберемо коефіцієнт μ з умови, щоб вираз у фігурних дужках рівняння (6) був цілою функцією, тобто $\mu = \frac{8\pi}{3i\delta} \lambda \sin \frac{2}{3} i\delta$. Тоді:

$$U(t_1, t_2, t_3) = U\left(\frac{t_1}{3}, \frac{t_2}{3}, \frac{t_3}{3}\right) \frac{8\pi}{3} \lambda \left[\frac{1}{i\delta} \sin \frac{2}{3} i\delta - \frac{2}{3} \frac{\sin \frac{2}{3} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{\frac{2}{3} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}} \right] \frac{1}{3^3 (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \delta^2)}. \quad (7)$$

Структура цього рівняння дозволяє скористатися результатом про представлення співвідношення

$$f(x) = C(x) f\left(\frac{x}{a}\right),$$

де $f\left(\frac{x}{a}\right)$, $C(x)$ – аналітичні усюди на числовій вісі функції і $a > 0$, $a = \text{const}$, $C(0) = 1$, $f(0) = 1$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, у

вигляді нескінченного добутку [6]: $f(x) = \prod_{h=0}^{+\infty} C\left(\frac{x}{a^h}\right)$. Цей результат дозволяє рівняння (7) вписати у наступній формі:

$$U(t_1, t_2, t_3) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{\mu - \lambda \frac{16\pi}{9} \frac{\sin \frac{2}{3^{h+1}} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{\frac{2}{3^{h+1}} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}}{3^3 \left(\delta^2 + \frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}{3^{2h}} \right)}. \quad (8)$$

Виберемо в (8) коефіцієнт λ з умови, яка забезпечує збіжність нескінченного добутку, коли $h = 0$ і $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \rightarrow 0$, звідки $\lambda = \frac{3^5 i\delta^3}{8\pi \left[\sin \frac{2}{3} i\delta - 2i\delta \right]}$.

На основі узагальнення теореми Вінера-Пелі [2] для багатовимірного випадку, теорему Поліа-Планшереля [11], встановлюємо, що функція $u(x_1, x_2, x_3)$, для якої перетворення Фур'є $U(t_1, t_2, t_3)$ представляється швидкоспадною цілою функцією експоненціального типу, буде нескінченно диференційованою функцією з компактним носієм. Таким чином, в результаті застосування зворотного перетворення Фур'є до виразу (8) отримуємо фінітну функцію (носієм цієї функції буде одинична куля). Цю функцію будемо позначати $Horp(x_1, x_2, x_3)$ та згідно з висновком статті [10] вважаємо атомарною функцією.

З отриманого вище ясно, що перетворення Фур'є від функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$ має вигляд:

$$Horp(x_1, x_2, x_3) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{2\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{3^{h+1}} \right)}{3^2 \frac{2\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{3^{h+1}}}. \quad (9)$$

Зауважимо, що $Horp(t_1, t_2, t_3)$ є швидкоспадною при $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \rightarrow \infty$ функцією експоненціального типу.

Функція $Horp(x_1, x_2, x_3)$ є парною відносно своїх змінних і може бути розкладеною в трикратний ряд Фур'є [4]:

$$Horp(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} a_{pqr} \cos(p\pi x_1) \cos(q\pi x_2) \cos(r\pi x_3), \quad (10)$$

в якому коефіцієнти Фур'є обчислюються за наступними формулами:

$$\begin{aligned}
a_{000} &= \frac{1}{8}; \\
a_{p00} &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} Horp(\xi_1, 0, 0) \cos(p\pi\xi_1) d\xi_1; \\
a_{pq0} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Horp(\xi_1, \xi_2, 0) \cos(p\pi\xi_1) \cos(q\pi\xi_2) d\xi_1 d\xi_2; \\
a_{0q0} &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} Horp(0, \xi_2, 0) \cos(q\pi\xi_2) d\xi_2; \\
a_{0qr} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Horp(0, \xi_2, \xi_3) \cos(q\pi\xi_2) \cos(r\pi\xi_3) d\xi_2 d\xi_3; \\
a_{p0r} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Horp(\xi_1, 0, \xi_3) \cos(p\pi\xi_1) \cos(r\pi\xi_3) d\xi_1 d\xi_3; \\
a_{00r} &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} Horp(0, 0, \xi_3) \cos(r\pi\xi_3) d\xi_3; \\
a_{pqr} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Horp(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cos(p\pi\xi_1) \cos(q\pi\xi_2) \cos(r\pi\xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \text{ де } p, q, r = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{11}$$

Ясно, що оскільки функція $Horp(x_1, x_2, x_3)$ фінітна, $\text{supp } Horp \in [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$, і парна відносно змінних x_1, x_2, x_3 , то у виразах для коефіцієнтів Фур'є (11) можна замінити невласні інтеграли на визначені, а тригонометричні функції під знаками інтегралів замінити на експоненціальні. Ці перетворення дозволяють виписати коефіцієнти Фур'є (11) ряду (10):

$$\begin{aligned}
a_{000} &= \frac{1}{8}; \\
a_{p00} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 Horp(\xi_1, 0, 0) e^{-ip\pi\xi_1} d\xi_1 = \frac{1}{4} H\tilde{rp}(p\pi, 0, 0); \\
a_{pq0} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Horp(\xi_1, \xi_2, 0) e^{-ip\pi\xi_1} e^{-ip\pi\xi_2} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{2} H\tilde{rp}(p\pi, q\pi, 0); \\
a_{0q0} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 Horp(0, \xi_2, 0) e^{-ip\pi\xi_2} d\xi_2 = \frac{1}{4} H\tilde{rp}(0, q\pi, 0); \\
a_{0qr} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Horp(0, \xi_2, \xi_3) e^{-ip\pi\xi_2} e^{-ip\pi\xi_3} d\xi_2 d\xi_3 = \frac{1}{2} H\tilde{rp}(0, q\pi, r\pi); \\
a_{p0r} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Horp(\xi_1, 0, \xi_3) e^{-ip\pi\xi_1} e^{-ip\pi\xi_3} d\xi_1 d\xi_3 = \frac{1}{2} H\tilde{rp}(p\pi, 0, r\pi); \\
a_{00r} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 Horp(0, 0, \xi_3) e^{-ip\pi\xi_3} d\xi_3 = \frac{1}{4} H\tilde{rp}(0, 0, r\pi); \\
a_{pqr} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Horp(\xi_1, \xi_2, \xi_3) e^{-ip\pi\xi_1} e^{-ip\pi\xi_2} e^{-ip\pi\xi_3} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = H\tilde{rp}(p\pi, q\pi, r\pi), \text{ де } p, q, r = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{12}$$

Функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$ утворюють підклас атомарних функцій, які породжуються модифікованим диференціальним оператором Гельмгольца $\Delta - \delta^2$. Зauważимо, що у роботах [7, 9, 10] досліджено інші підкласи атомарних функцій, що породжуються операторами Лапласа, бігармонічним, полігармонічним.

Отримані вище результати можуть бути підсумовані наступною теоремою.

Теорема 1. Атомарна функція $Horp(x_1, x_2, x_3)$, яка є розв'язком функціонально-диференціального рівняння (1) із значеннями коефіцієнтів

$$\lambda = \frac{3^5 \delta^3 i}{8\pi \left[\sin \frac{2}{3} i\delta - 2\delta i \right]}, \mu = \frac{8\pi}{3^5 \delta i} \lambda \sin \frac{2}{3} i\delta,$$

буде фінітною нескінченно диференційованою функцією з носієм у формі одиничної кулі, нормованою умовою $\iiint Horp(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 1$, представляється в кубі: $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ рядом Фур'є (10) з коефіцієнтами

(12). Перетворення Фур'є функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$, тобто (9), є швидкоспадною при $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \rightarrow \infty$ функцією експоненціального типу.

На рисунках 1-4 представлена відповідно візуалізація тривимірної функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$, її перших та других похідних по аргументам x_1, x_2 та результатів дії операторів Лапласа та Гельмгольца на функцію $Horp(x_1, x_2, x_3)$: $\Delta Horp(x_1, x_2, x_3)$, $(\Delta - \delta^2) Horp(x_1, x_2, x_3)$.

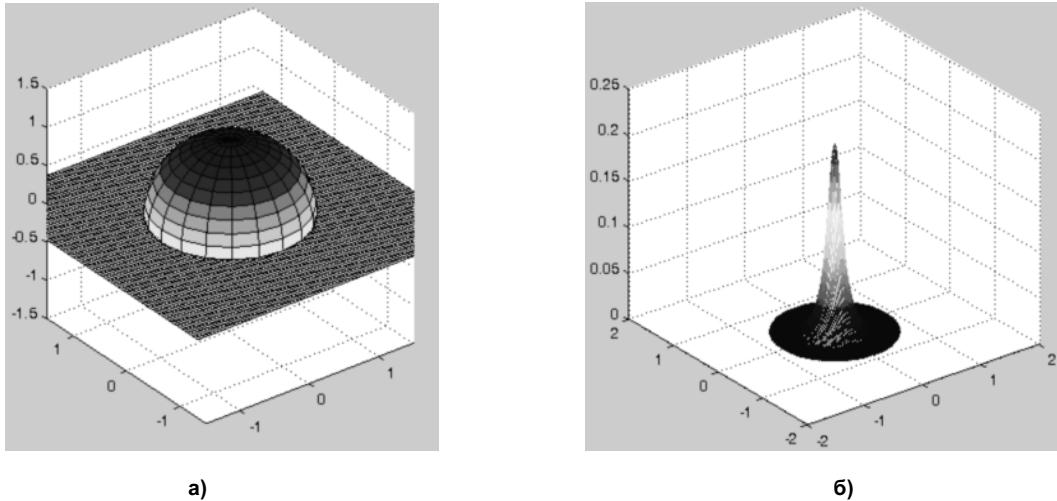


Рис. 1. Візуалізація графіка проекції функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$ в просторі $Ox_1x_2Horp(x_1, x_2, const)$:

а) визначення точок носія для візуалізації графіка функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$ за умови $x_3 = const$

(переріз площиною $x_3 = const$ носія – одниничної кулі з центром в точці $(0, 0, 0)$ – функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$);

б) графік проекції функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$ в просторі $Ox_1x_2Horp(x_1, x_2, const)$

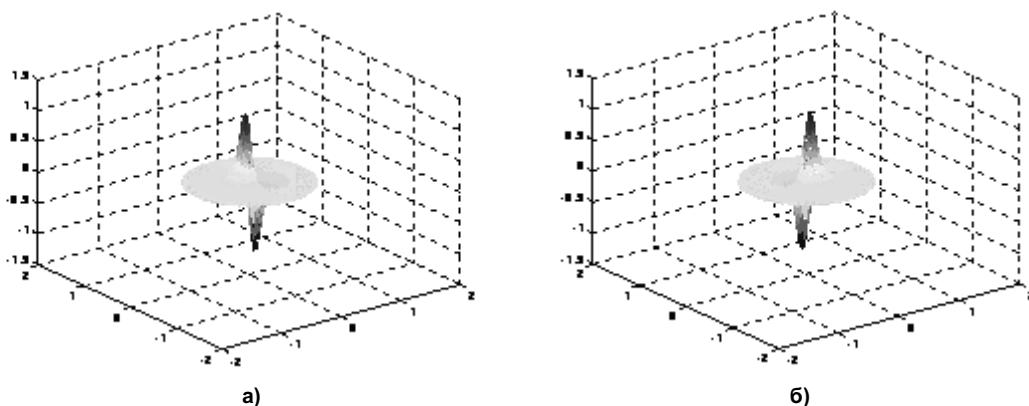


Рис. 2. Візуалізація графіків проекцій перших похідних функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$ по змінним x_1, x_2 за умови $x_3 = const$:

а) вигляд графіка $\frac{\partial Horp(x_1, x_2, const)}{\partial x_1}$ в просторі $Ox_1x_2 \frac{\partial Horp(x_1, x_2, const)}{\partial x_1}$;

б) вигляд графіка $\frac{\partial Horp(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2}$ в просторі $Ox_1x_2 \frac{\partial Horp(x_1, x_2, const)}{\partial x_2}$.

Описана вище схема побудови фінітного розв'язку функціонально-диференціального рівняння (1) може бути використана також для відшукання фінітного розв'язку функціонально-диференціального рівняння наступного вигляду:

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3) + \delta^2 u(x_1, x_2, x_3) = \lambda \iint_{\Omega} u[3(x_1 - \xi_1), 3(x_2 - \xi_2), 3(x_3 - \xi_3)] d\omega + \mu u(3x_1, 3x_2, 3x_3) \quad (13)$$

де всі позначення рівняння (1) зберігаються.

Після застосування процедури побудови атомарної функції, що була реалізована для рівняння (1), отримуємо фінітний нескінченно диференційовний розв'язок рівняння (13), який позначаємо через $KGorp(x_1, x_2, x_3)$; $\text{supp } KGorp(x_1, x_2, x_3) = R$, де $R : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$. Таким чином отримується наступний результат.

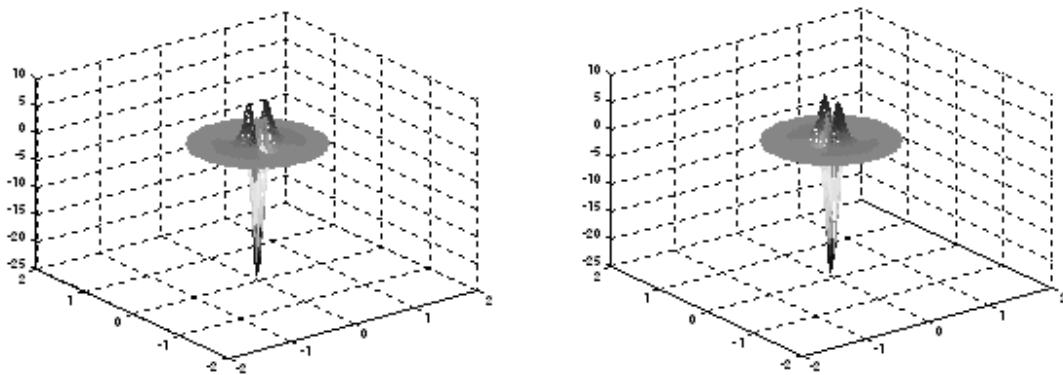


Рис. 3. Візуалізація графіків проекцій других похідних функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$ по змінним x_1, x_2 за умови $x_3 = const$:

а) вигляд графіка $\frac{\partial^2 Horp(x_1, x_2, const)}{\partial x_1^2}$ в просторі $Ox_1x_2 \frac{\partial^2 Horp(x_1, x_2, const)}{\partial x_1^2}$;

б) вигляд графіка $\frac{\partial^2 Horp(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2}$ в просторі $Ox_1x_2 \frac{\partial^2 Horp(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2}$.

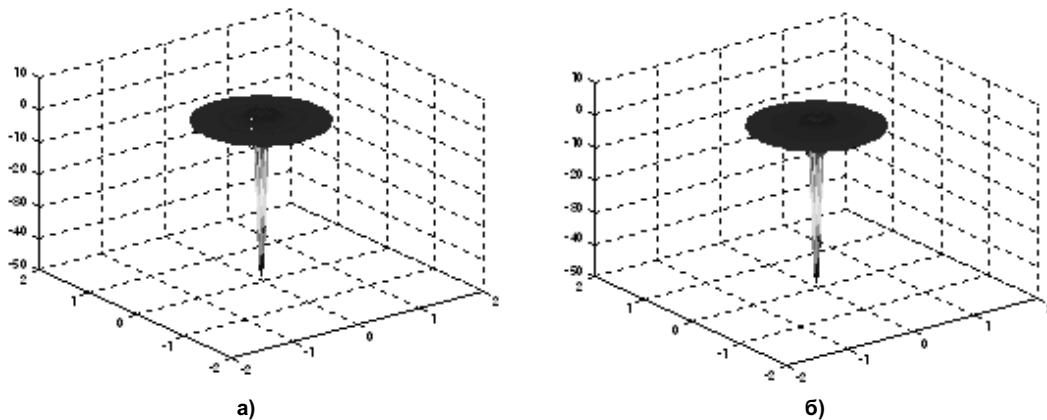


Рис. 4. Візуалізація результатів дії диференційних операторів Лапласа Δ та Гельмгольца $(\Delta - \delta^2)$ на функцію $Horp(x_1, x_2, x_3)$: а) вигляд графіка проекції $\Delta Horp(x_1, x_2, const)$ в просторі $Ox_1x_2 \Delta Horp(x_1, x_2, const)$
б) вигляд графіка $(\Delta - \delta^2) Horp(x_1, x_2, const)$ в просторі $Ox_1x_2 (\Delta - \delta^2) Horp(x_1, x_2, const)$

Теорема 2. Атомарна функція $KGorp(x_1, x_2, x_3)$, яка є розв'язком функціонально-диференціального рівняння

(13), де $\partial\Omega$ – сфера: $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \frac{4}{9}$, із значеннями коефіцієнтів $\lambda = \frac{3^5 \delta^3}{8\pi \left[\sin \frac{2}{3}\delta - 2\delta \right]}$, $\mu = \frac{8\pi}{3\delta} \lambda \sin \frac{2}{3}\delta$ буде фініт-

ною нескінченно диференційованою функцією з носієм у формі одиничної кулі, нормованою умовою $\iiint KGorp(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 1$, представляється в кубі: $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ рядом Фур'є

$$KGorp(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} a_{pqr} \cos(p\pi x_1) \cos(q\pi x_2) \cos(r\pi x_3)$$

з коефіцієнтами

$$a_{000} = \frac{1}{8},$$

$$a_{p00} = \frac{1}{4} KG\tilde{o}\tilde{r}\tilde{p}(p\pi, 0, 0), \quad a_{0q0} = \frac{1}{4} KG\tilde{o}\tilde{r}\tilde{p}(0, q\pi, 0), \quad a_{00r} = \frac{1}{4} KG\tilde{o}\tilde{r}\tilde{p}(0, 0, r\pi),$$

$$a_{pq0} = \frac{1}{2} KG\tilde{o}\tilde{r}\tilde{p}(p\pi, q\pi, 0), \quad a_{0qr} = \frac{1}{2} KG\tilde{o}\tilde{r}\tilde{p}(0, q\pi, r\pi), \quad a_{p0r} = \frac{1}{2} KG\tilde{o}\tilde{r}\tilde{p}(p\pi, 0, r\pi),$$

$$a_{pqr} = KG\tilde{o}\tilde{r}\tilde{p}(p\pi, q\pi, r\pi).$$

Перетворення Фур'є функції $KGorp(x_1, x_2, x_3)$

$$KG\tilde{o}\tilde{r}\tilde{p} = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{\frac{16\pi}{3^2} \lambda \frac{\sin\left(\frac{2\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{3^{h+1}}\right)}{2\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}}{3^3 \left(\frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}{3^{2h}} - \delta^2 \right)}$$

є швидкоспадною при $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \rightarrow \infty$ функцією експоненціального типу.

Доказ існування розв'язку аналогічний наведеному в першій частині статті.

3. Висновки. Запропоновані атомарні функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$ та $KGorp(x_1, x_2, x_3)$ являються радіальними базисними функціями, які можуть бути застосовані при побудові наближених розв'язків краївих задач для диференціальних рівнянь, що містять оператори типу Гельмгольца за безсітковими схемами чисельного розв'язання.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику Колодяжному В.М. за корисні зауваження та обговорення в процесі підготовки статті.

1. Виленкін Н.Я. Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1965.– 588 с. 2. Винер Н., Пэл Р. Преобразование Фур'є в комплексной области. М.: Наука, 1964.– 269 с. 3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971–1108 с.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т.1. М.: Физматиз, 1965.–616 с. Т.2, 1965.–538 с. 5. Колодяжный В.М., Рячев В.О. Атомарні функції, що гармонічні в кільцевій області // Вісник Київського університету. Серія "Математика, механіка", № 11-12, 2004. – С. 110–114. 6. Колодяжный В.М., Рячев В.О. Деякі властивості атомарних функцій багатьох змінних // Доповіді НАН України, № 1, 2005. – С. 12–20. 7. Колодяжный В.М., Рячев В.О. Фінітні функції, що породжені бігармонічним оператором // Доповіді НАН України, № 2, 2006. – С. 23–30. 8. Колодяжный В.М., Рячев В.О. Фінітні розв'язки функціонально-диференціальних рівнянь з частинними похідними // Доповіді НАН України, № 5, 2004. – С. 17–22. 9. Колодяжный В.М., Рячев В.О. Фінітні функції, що породжені оператором Лапласа // Доповіді НАН України. № 4, 2004. – С. 17–22. 10. Колодяжный В.М., Рячев В.А. Атомарные функции трех переменных инвариантные относительно группы вращения // Кібернетика и системный анализ, № 6, 2004. – С. 118–130. 11. Ронкин Л.И. Элементы теории аналитических функций многих переменных. К.: Наукова думка, 1977.– 167 с. 12. Chen C.S., Brebbia C.A. and Power H. Boundary element methods using compactly supported radial basis functions // Commun. Numer. Meth. Engng., 15, 1999. – P. 137–150. 13. Chen W. and Tanaka M. New Insights in Boundary-only and Domain-type RBF Methods // Inter. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulation, 1, 2000. – P. 145–152. 14. Chen W., Hon Y.C. Numerical convergence of boundary knot method in the analysis of Helmholtz, modified Helmholtz, and convection-diffusion problems // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 15, 2003. – P. 1859–1875. 15. Ingber M.S., Chen C.S., Tanski J.A. A mesh free approach using radial basis functions and parallel domain decomposition for solving three-dimensional diffusion equations // International Journal For Numerical Methods In Engineering, 60, 2004. – P. 2183–2201. 16. Muleskov A.S., Golberg M.A. and Chen C.S. Particular solutions of Helmholtz-type operators using higher order polyharmonic splines // Comput. Mech., 23, 1999. – P. 411–419.

Надійшла до редколегії 09.04.09