

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

Для науковців, викладачів, студентів.

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). A table of contents and the summaries of the articles are located on the Web-site <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

For scientist, professors, students.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР	М.Ф. Городній, д-р фіз.-мат. наук, проф.
РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ	В.Г. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); О.В. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. (відп. секр.); Ю.А. Дрозд, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.В. Кириченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Б.М. Кіфоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.В. Козаченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Г.Л. Кулініч, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.В. Мелешко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.С. Мішура, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л.В. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І.О. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М.О. Перестюк, чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А.П. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; О.М. Станжицький, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.І. Сущанський, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А.Ф. Улітко, чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І.О. Шевчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Адреса редколегії	03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 2, корп. 7, механіко-математичний факультет; ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua
Затверджено	Вченою радою механіко-математичного факультету 12.10.09 (протокол № 2)
Атестовано	Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/7 від 09.06.99
Зареєстровано	Міністерством інформації України. Свідоцтво про державну реєстрацію КІ № 251 від 31.10.97
Засновник та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	01601, Київ-601, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43; ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

ЗМІСТ

Грінюк Ю. Про істотний спектр одного матричного неелептичного диференціального оператора.....	4
Кірік А., Тищенко С. Узагальнені простори функцій, побудовані за поліномами Лагера (частина 2).....	8
Романенко І. Розв'язність задачі Діріхле зі сталими коефіцієнтами в області з кутовою точкою.....	13
Самусенко П. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь із запізненням аргументу і виродженням у точці.....	20
Чайковський А. Визначені на вісі розв'язки диференціальних рівнянь з запізненням аргументу.....	26
Будницька Т. Топологічна класифікація афінних відображень з $С В С$	28
Лукова Н., Пришляк О. Функції загального положення на тривимірних многовидах з межею.....	32
Курченко О. Теорема Бакстерового типу для строго субгаусових випадкових полів.....	35
Зубченко В. Гранична поведінка довгострокової відсоткової ставки в узагальненій стохастичній моделі відсоткової ставки Кокса – Інгерсолла - Росса.....	38
Яценко Я. Формули знаходження максимізатора експотенційної функції корисності у біноміальній моделі ринку.....	42
Сумарюк М. Степеневі ряди, що породжують вільні напівгрупи.....	47
Яровой Л., Степахо І. Підвищення чутливості лазерних віброметрів у присутності завад.....	49
Лісіна О. Побудова 3D атомарних радіальних базисних функцій, що породжуються оператором Гельмгольца.....	53

CONTENTS

Grinyk Y. On the essential spectrum of a matrix non-elliptic differential operator	4
Kirik A., Tyschenko S. Generalized spaces of functions built by using Laguerre polynomials (part 2).....	8
Romanenko I. About solvability of Dirichlet problem with constant coefficients in corner point domain	13
Samusenko P. Asymptotic integration of the singularly perturbed system of the delay differential equations with degeneration in a point	20
Chaikovskiy A. Defined on the axis solutions of differential equations with argument's delay	26
Budnytska T. Topological classification of affine maps from \mathbf{C} to \mathbf{C}	28
Lukova N., Prishlyak A. Functions in general position on 3-manifolds with boundary	32
Kurchenko O. Baxter type theorem for strong subgaussian random fields	35
Zubchenko V. Limit behavior of the long-term return in the extended Cox-Ingersoll-Ross stochastic interest rate model.....	38
Iatsenko I. The formulas to calculate the utility function maximizer in binomial market model	42
Sumaryuk M. Power series that generate free semigroups	47
Yarvoi L., Stepakhno I. The increase of laser doppler vibrometer sensitivity	49
Lisina O. Construction of 3D atomic radial functions which are generated by Helmholtz operator	53

ПРО ІСТОТНИЙ СПЕКТР ОДНОГО МАТРИЧНОГО НЕЕЛІПТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

*Досліджується істотний спектр однієї нееліптичної граничної задачі
The essential spectrum of a non-elliptic boundary value problem is studied*

Вступ. Задача вивчення спектру систем диференціальних операторів змішаного порядку часто виникає в математичній фізиці (див., наприклад, [6; 14]). Найбільш загальні результати для еліптичних за Дугласом-Ніренбергом систем були отримані в [11]. Абстрактний підхід до дослідження істотного спектру блочних матричних операторів був запропонований в [10] (див. також [9; 13]). В роботах [12; 5; 15] цей підхід застосовувався до матричних диференціальних операторів. Зокрема, в [15; 16] було знайдено істотний спектр класу матричних диференціальних операторів змішаного порядку, пов'язаного з моделлю лінійних коливань ідеально провідної нев'язкої плазми у зовнішньому магнітному полі (див. [14]). Ці результати були розвинуті і узагальнені в роботах [1; 2; 4]. В даній роботі ми продовжуємо дослідження [2; 4].

Розглянемо нееліптичні диференціальні оператори вигляду

$$L = \begin{pmatrix} -\rho^{-1}\partial_1\rho a\partial_1 + b_{11} & -\rho^{-1}\partial_1\rho a\partial_2 + b_{12} & -\rho^{-1}i\partial_1\rho c_1 \\ -\rho^{-1}\partial_2\rho a\partial_1 + b_{21} & -\rho^{-1}\partial_2\rho a\partial_2 + b_{22} & -\rho^{-1}i\partial_2\rho c_1 \\ -ic_2\partial_1 & -ic_2\partial_2 & d \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$D(L) = \left\{ f = (f_1, f_2, f_3)^t \in (L^2(\Omega, \rho))^3 \mid \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \in W_2^1(\Omega), \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2|_{\partial\Omega} = 0, f_3 \in W_2^1(\Omega) \right\}$$

у просторі $H = (L^2(\Omega, \rho))^3$. Тут $L^2(\Omega, \rho)$ – ваговий простір квадратично сумовних на Ω функцій з вагою ρ , $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена сильно ліпшицева область, тобто для кожної точки границі $\partial\Omega$ існує окіл цієї точки U , що в деякій ортогональній системі координат $U \cap \Omega = \{(y_1, y_2) \in U \mid y_2 = g(y_1)\}$ і функція g задовольняє умову Ліпшиця. $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$. Будемо також припускати, що функції a, ρ, c_1, c_2 задовольняють умову Ліпшиця на $\bar{\Omega}$, $b_{ij}, d \in C(\bar{\Omega})$. Крім того, нехай функції a, ρ додатні на $\bar{\Omega}$ (функції b_{ij}, d, c_1, c_2 можуть приймати комплексні значення).

Істотним спектром замкненого оператора S , що діє в банаховому просторі E , називається множина тих $\lambda \in \mathbb{C}$, при яких оператор $S - \lambda$ не є фредгольмовим. Фредгольмовим називається замкнений оператор, який має скінченновимірне ядро і образ якого є замкненим підпростором скінченної корозмірності. Теорема Вейля (див [3]) стверджує, що істотний спектр зберігається при відносно компактних збуреннях.

Частинний випадок (1), коли $b_{12}(x) = b_{21}(x) = 0$, $b_{11}(x) = b_{22}(x) = b(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, а область Ω є обмеженою і кусково класу C^2 всі кути якої опуклі (не більші 180°), був розглянутий в [15]. При цьому оператор L розглядався на області

$$D(L) = \left\{ f = (f_1, f_2, f_3)^t \in (W_2^1(\Omega))^3 \mid \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \in W_2^1(\Omega), \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \quad (2)$$

Було показано, що за наведених вище умов оператор L допускає замикання і істотний спектр цього замикання рівний $\sigma_{\text{ess}}(\bar{L}) = b(\bar{\Omega}) \cup \left(d - \frac{c_1 c_2}{a} \right)(\bar{\Omega})$.

У роботі [2] був розглянутий випадок $b_{12}(x) = b_{21}(x) = 0$, $x \in \bar{\Omega}$ з різними коефіцієнтами $b_1(x) = b_{11}(x)$, $b_2(x) = b_{22}(x)$, $x \in \bar{\Omega}$ для оператора виду (1). При цьому була знята умова на гладкість границі $\partial\Omega$ і було показано, що в такому разі оператор L допускає замикання і істотний спектр цього замикання рівний $\sigma_{\text{ess}}(\bar{L}) = \bigcup_{x \in \bar{\Omega}} \bar{I}(b_1(x), b_2(x)) \cup \left(d - \frac{c_1 c_2}{a} \right)(\bar{\Omega})$. Тут $\bigcup_{x \in \bar{\Omega}} \bar{I}(b_1(x), b_2(x))$ – відрізок комплексної площини з кінцями в точках $b_1(x)$ та $b_2(x)$.

У роботі [4] було запропоновано абстрактний підхід до вивчення істотного спектра оператора L виду (1) з областю визначення типу (2) у випадку гладкої області Ω . Нарешті, в [1] розглядалося узагальнення результатів [15] на n -вимірний випадок.

Дана робота продовжує дослідження [2; 4; 15]. Зокрема, результати [4] переносяться на довільні обмежені сильно ліпшицеві області. Основним результатом є наступна теорема.

Теорема 1. Нехай Ω – обмежена сильно ліпшицева область і функції $a, \rho, b_{ij}, d, c_1, c_2$ задовольняють вище-

наведеним умовам. Припустимо, що симетризована матриця $B^s(x) = \begin{pmatrix} b_{11}(x) & \frac{b_{12}(x)+b_{21}(x)}{2} \\ \frac{b_{12}(x)+b_{21}(x)}{2} & b_{22}(x) \end{pmatrix}$ є дійсною

для всіх $x \in \bar{\Omega}$. Нехай $\lambda_1^s(x) \leq \lambda_2^s(x)$ власні числа матриці $B^s(x)$, $m = \min\{\lambda_1^s(x), x \in \bar{\Omega}\}$, $M = \max\{\lambda_2^s(x), x \in \bar{\Omega}\}$. Тоді оператор L виду (1) допускає замикання \bar{L} і істотний спектр цього замикання рівний $\sigma_{\text{ess}}(\bar{L}) = [m, M] \cup \left(d - \frac{c_1 c_2}{a}\right)(\bar{\Omega})$.

Пояснимо основні етапи доведення теореми. Нехай оператор T діє з простору $(L^2(\Omega, \rho))^2$ в $L^2(\Omega, \rho^{-1})$ і визначається наступним чином

$$D(T) = \left\{ f = (f_1, f_2)^t \in (L^2(\Omega, \rho))^2 \mid \nabla^t f \in L^2(\Omega, \rho), \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$Tf = \rho a^{\frac{1}{2}} \nabla^t f, \quad f \in D(T).$$

Символами ∇, ∇^t будемо позначати градієнт і дивергенцію. Зауважимо, що нормальна складова на границі є коректно визначеною у випадку сильно ліпшицевої області для функцій $f \in (L^2(\Omega, \rho))^2$, у яких $\nabla^t f \in L^2(\Omega, \rho)$ (див. [6]). Оператор T є замкненим і спряжений до нього оператор T^* має вигляд

$$D(T^*) = W_2^1(\Omega), \quad T^*g = -\rho^{-1} \nabla a^{\frac{1}{2}} g, \quad g \in D(T^*).$$

Введемо самоспряжений оператор $A = T^*T$. Зрозуміло, що

$$D(A) = \left\{ f = (f_1, f_2)^t \in (L^2(\Omega, \rho))^2 \mid \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \in W_2^1(\Omega), \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$Af = -\rho^{-1} \nabla \rho a \nabla^t f, \quad f \in D(A).$$

У роботі [15] розглядався оператор A^0 , заданий диференціальним виразом (1) на області визначення

$$D(A^0) = \left\{ f = (f_1, f_2)^t \in (W_2^1(\Omega))^2 \mid \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \in W_2^1(\Omega), \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

$$A^0 f = -\rho^{-1} \nabla \rho a \nabla^t f, \quad f \in D(A^0).$$

Було показано, що оператор A^0 є істотно самоспряженим у випадку обмеженої області Ω з границею кусково класу C^2 , усі кути якої опуклі. Зокрема, $\bar{A}^0 = A$. Розглянемо оператор $\hat{A} = TT^*$. Маємо

$$\hat{A}g = -\rho a^{\frac{1}{2}} \nabla^t \rho^{-1} \nabla a^{\frac{1}{2}} g, \quad D(\hat{A}) = \left\{ g \in W_2^1(\Omega) \mid \nabla^t \rho^{-1} \nabla a^{\frac{1}{2}} g \in L^2(\Omega), \nu^t \nabla a^{\frac{1}{2}} g|_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \quad (3)$$

Доведення в [15] істотно використовує те, що для вказаного класу областей

$$D(\hat{A}) = \left\{ g \in W_2^1(\Omega) \mid a^{\frac{1}{2}} g \in W_2^2(\Omega), \nu^t \nabla a^{\frac{1}{2}} g|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

У випадку загальної сильно ліпшицевої області це твердження є, взагалі кажучи, невірним (див., наприклад, [8]). Це вимагає відповідної модифікації доведення теореми 1.

Позначимо $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Нехай P – ортогональний проектор на ядро оператора A . Це ядро має вигляд

$$\text{Ker } A = \left\{ f = (f_1, f_2)^t \in (L^2(\Omega, \rho))^2 \mid \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 = 0, \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Аргументи [4, 15] показують, що

$$\sigma_{\text{ess}}(\bar{L}) = \sigma_{\text{ess}}(A+B) \cup \left(d - \frac{c_1 c_2}{a}\right)(\bar{\Omega}).$$

Множина $\text{Ker } A$ є підпростором $(L^2(\Omega, \rho))^2$, а тому сама є гільбертовим простором з індукованим з $(L^2(\Omega, \rho))^2$ скалярним добутком. Розглянемо в $\text{Ker } A$ оператор

$$\hat{B}f = PBf, \quad f \in \text{Ker } A. \quad (4)$$

В [15] було показано, що $\sigma_{\text{ess}}(A+B) = \sigma_{\text{ess}}(\hat{B})$. Отже, $\sigma_{\text{ess}}(PBP) = \sigma_{\text{ess}}(\hat{B}) \cup \{0\}$. Остаточо,

$$\sigma_{\text{ess}}(\bar{L}) = \sigma_{\text{ess}}(\hat{B}) \cup \left(d - \frac{c_1 c_2}{a} \right) (\bar{\Omega}). \quad (5)$$

Для знаходження $\sigma_{\text{ess}}(\hat{B})$ в кожній точці $x_0 \in \Omega$ будується сингулярна послідовність функцій $\{f_n, n \geq 1\}$ з носіями, що лежать у відкритих паралелограмах ω_n таких, що $x_0 \in \omega_n \subset \Omega$. При цьому ω_n стягуються до точки x_0 . Область Ω можна представити у вигляді $\Omega = \omega_n \cup (\Omega \setminus \omega_n)$, $n \geq 1$. Аналогічно, [4] можна розглядати ортогональні суми операторів типу A та $\hat{\Delta}$ на областях ω_n та $\Omega \setminus \omega_n$ (A' та $\hat{\Delta}'$ відповідно). Ортогональну суму проекторів на ядра операторів типу A розглянутих на областях ω_n та $\Omega \setminus \omega_n$ позначимо P' . При цьому $\Omega \setminus \omega_n$ обов'язково містить кути по 225° що не дозволяє безпосередньо застосувати результати [4, 15]. Для вирішення цієї проблеми потрібно внести зміни в наведені в цих роботах аргументи. Зокрема, це стосується областей визначення операторів A , $\hat{\Delta}$ і відповідної модифікації доведення теореми 1.

Для $\lambda \in \rho(\hat{\Delta})$ визначимо допоміжний оператор $Q^0(\lambda)$ наступним чином

$$D(Q^0(\lambda)) = \left\{ f = (f_1, f_2)^t \in (L^2(\Omega, \rho))^2 \left| \begin{array}{l} \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \in W_2^1(\Omega), \\ \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$Q^0(\lambda) := \rho^{-1} \nabla a^2 (\hat{\Delta} - \lambda)^{-1} \rho a^2 \nabla^t f, \quad f \in D(Q^0(\lambda)).$$

Подібний оператор, але з іншою областю визначення розглядався в [15]. Елементарні викладки показують, що $Q^0(\lambda)$ є обмеженим на своїй області визначення оператором, а отже, може бути по неперервності розширений до обмеженого на всьому просторі $(L^2(\Omega, \rho))^2$ оператора $Q(\lambda)$. Позначимо $R^0(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}(I + Q^0(\lambda))$, $\lambda \in \rho(\hat{\Delta})$. Нехай

$R(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}(I + Q(\lambda))$, $\lambda \in \rho(\hat{\Delta})$ – замикання $R^0(\lambda)$ в $(L^2(\Omega, \rho))^2$. Тоді

$$R(\lambda) = (A - \lambda)^{-1}, \quad \lambda \in C \setminus R. \quad (6)$$

Використовуючи спектральну теорему отримаємо

$$P = -\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda (A - \lambda)^{-1}, \quad P' = -\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda (A' - \lambda)^{-1} \quad (7)$$

При $\lambda \in \rho(\hat{\Delta})$ визначимо $V^0(\lambda)$ як оператор з простору $(L^2(\Omega, \rho))^2$ в $L^2(\Omega, \rho^{-1})$

$$D(V^0(\lambda)) = \left\{ f = (f_1, f_2)^t \in (L^2(\Omega, \rho))^2 \left| \begin{array}{l} \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \in W_2^1(\Omega), \\ \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$V^0(\lambda) := (\hat{\Delta} - \lambda)^{-1} \rho a^2 \nabla^t f, \quad f \in D(V^0(\lambda)).$$

Оператор $V^0(\lambda)$ є обмеженим на своїй області визначення у просторі $L^2(\Omega, \rho^{-1})$, а також (враховуючи обмеженість $Q^0(\lambda)$) одночасно у просторі $W_2^1(\Omega)$. Позначимо неперервне продовження оператора $V^0(\lambda)$ з усього простору $(L^2(\Omega, \rho))^2$ в $L^2(\Omega, \rho^{-1})$ через $V(\lambda)$. Зрозуміло, що неперервне продовження оператора $V^0(\lambda)$ з $(L^2(\Omega, \rho))^2$ в $W_2^1(\Omega)$ буде таким самим. Використовуючи компактність вкладення простору $W_2^1(\Omega)$ в $(L^2(\Omega))^2$, отримаємо компактність оператора $V(\lambda)$. З компактності $V^*(\lambda)$ отримаємо компактність $\rho^{-1} \nabla a^2 (\hat{\Delta} - \lambda)^{-1}$ як оператора з $L^2(\Omega)$ в $(L^2(\Omega))^2$.

У просторі $(L^2(\Omega, \rho))^2$ розглянемо оператор

$$D(A_M) = \left\{ f = (f_1, f_2)^t \in (L^2(\Omega, \rho))^2 \left| \begin{array}{l} \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \in W_2^1(\Omega), \\ \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right. \right\},$$

$$A_M f = -\rho^{-1} \nabla \rho a \nabla^t f, \quad f \in D(A_M).$$

Нехай P_M – ортогональний проектор на ядро оператора A_M . Доведення теореми 1 спирається на метод сингулярних послідовностей і наступні леми (пор., [2; 4; 15]).

Лема 1. Нехай відкритий паралелограм ω такий, що $\bar{\omega} \subset \Omega$ і неперервна функція α фінітна в ω , тоді оператори $P\alpha - \alpha P'$, $P_M\alpha - \alpha P'$ є компактним.

Лема 2. Для довільної функції b неперервної на $\bar{\Omega}$ оператор $Pb - bP$ є компактним.

Лема 3. Нехай Ω – обмежена, сильно ліпшицева область. Визначимо матрицю $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді оператор $P\rho^{-1}\tilde{B}P = 0$.

Зауважимо, що доведення лем 1, 2 спирається на рівності (6), (7) і компактність оператора $V(\lambda)$. Лема 3 дозволяє перейти до симетризованої матриці B і явно обчислити $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{B})$. Пояснимо доведення леми 3.

Нехай спочатку $\rho \equiv 1$. Доведемо, що для всіх $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A$ виконується $\tilde{B}f \in (\text{Ker } A)^\perp$. З [6; 8] відомо, що $(\text{Ker } A)^\perp = \left\{ g = \begin{pmatrix} \partial_1 h \\ \partial_2 h \end{pmatrix} \middle| h \in W_2^1(\Omega) \right\}$. Зокрема, розклад $(L^2(\Omega))^2 = \text{Ker } A \oplus (\text{Ker } A)^\perp$ збігається з відомим розкладом Вейля.

Множина $W = \left\{ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in (C_0^\infty(\Omega))^2 \middle| \nabla^t w = \partial_1 w_1 + \partial_2 w_2 = 0 \right\}$ (це так звані фінітні соленоїдальні поля) є щільною в просторі $\text{Ker } A$ (див. [8]). Покажемо, що для всіх $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A$, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in W$ виконується $(\tilde{B}f, g) = 0$. Довизначимо функції g_1, g_2 нулем на $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ і збережемо для них те саме позначення. При цьому $g_1, g_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, і на \mathbb{R}^2 виконується рівність $\partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 = 0$. Отже, форма $-g_2 dx_1 + g_1 dx_2$ є точною, а тому існує функція $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ така, що $\partial_1 h = -g_2$ і $\partial_2 h = g_1$. Використовуючи формулу інтегрування частинами (формулу Гріна), маємо

$$\left(\tilde{B} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} f_2 \\ -f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right) = (f, \nabla h) = -(\nabla^t f, h) + \int_{\partial\Omega} \nu^t f \cdot \bar{h} d\sigma = 0.$$

Розглянемо тепер випадок довільного ρ . Зауважимо, що множина $\text{Ker } A$ не залежить від функції ρ . Але в просторах $(L^2(\Omega))^2$ і $(L^2(\Omega, \rho))^2$ будуть різні ортогональні доповнення до цієї множини, які ми позначимо відповідно $(\text{Ker } A)_1^\perp$ і $(\text{Ker } A)^\perp$. Зрозуміло, що для всіх $f \in (L^2(\Omega, \rho))^2$ (а внаслідок еквівалентності норм також для всіх $f \in (L^2(\Omega))^2$) має місце $Pf \in \text{Ker } A$ і $\tilde{B}Pf \in (\text{Ker } A)_1^\perp$. Зокрема, для для всіх $g \in \text{Ker } A$ виконується $(\tilde{B}Pf, g) = 0$. Позначимо через $(\cdot, \cdot)_\rho$ скалярний добуток у просторі $(L^2(\Omega, \rho))^2$. Тоді отримаємо, що для всіх $f \in (L^2(\Omega))^2$, $g \in \text{Ker } A$

$$(\rho^{-1}\tilde{B}Pf, g)_\rho = \int_\Omega \rho^{-1}\tilde{B}Pf \cdot \bar{g}\rho dx = \int_\Omega \tilde{B}Pf \cdot \bar{g} dx = (\tilde{B}Pf, g) = 0.$$

Отже, $\rho^{-1}\tilde{B}Pf \in (\text{Ker } A)^\perp$ і $P\rho^{-1}\tilde{B}P = 0$.

Для матриці B , що задовольняє умови теореми 1 запишемо рівність

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{b_{12} + b_{21}}{2} \\ \frac{b_{12} + b_{21}}{2} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{b_{12} - b_{21}}{2} \\ \frac{b_{21} - b_{12}}{2} & 0 \end{pmatrix} = B^s + \frac{b_{12} - b_{21}}{2} \tilde{B}.$$

Зрозуміло, що матриця B^s є симетричною. Тоді

$$\begin{aligned} PBP &= PB^sP + P \frac{b_{12} - b_{21}}{2} \tilde{B}P = \\ &= PB^sP + \frac{b_{12} - b_{21}}{2} \rho P \rho^{-1} \tilde{B}P + \left(P \frac{b_{12} - b_{21}}{2} \rho - \frac{b_{12} - b_{21}}{2} \rho P \right) \rho^{-1} \tilde{B}P = PB^sP + \left(P \frac{b_{12} - b_{21}}{2} \rho - \frac{b_{12} - b_{21}}{2} \rho P \right) \rho^{-1} \tilde{B}P. \end{aligned}$$

В останній рівності була використана лема 1. Використовуючи неперервність функції $\frac{b_{12}-b_{21}}{2}\rho$ і лему 2 отримаємо, що $PBP - PB^sP$ є компактним оператором. Розглянемо оператор L з коефіцієнтами, визначеними матрицею B^s , і відповідний оператор \hat{B}^s , визначений рівністю (3). Використовуючи (4) отримаємо

$$PBP - PB^sP = \begin{pmatrix} \hat{B} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{B}^s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{B} - \hat{B}^s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\hat{B} - \hat{B}^s$ є компактним оператором в $\text{Ker } A$, а тому $\sigma_{\text{ess}}(\hat{B}) = \sigma_{\text{ess}}(\hat{B}^s)$ і, враховуючи (5), отримаємо твердження теореми.

Висновки. Результати [4] узагальнені на випадок довільної сильно ліпшицевої обмеженої області $\Omega \subset R^2$.

1. Грінук Ю. М. Істотний спектр одного матричного диференціального оператора // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. – 2003. – №9. – С. 9–13. 2. Гринук Ю. Н., Константинов А. Ю. О существенном спектре одной граничной задачи // Доклады НАН Украины. – 2002. – №7. – С. 12–16. 3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов – Москва, 1972. 4. Константинов А. Ю. О существенном спектре одного класса матричных дифференциальных операторов // Функци. анализ и его прил. – 2002. – Том 36 вып. 3. – С. 76–78. 5. Константинов А. Ю. Спектральный анализ одного класса матричных дифференциальных операторов // Функци. анализ и его прил. – 1997 – Том 31, вып. 3. – С. 77–80. 6. Колачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан Операторные методы в линейной гидродинамике – Москва, 1989. 7. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей – М, 1991. 8. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса – Москва, 1981. 9. Шкаликов А. А. О существенном спектре матричных операторов // Матем. заметки. – 1995. – № 58. – С. 945–949. 10. Atkinson F. V., Langer H., Mennicken R., Shkalikov A. A. The essential spectrum of some matrix operators // Math. Nachr. – 1994. – Vol. 167. – P. 5–20. 11. Grubb G., Geymonat G. // The essential spectrum of elliptic systems of mixed order // Math. Annal. – 1977. – Vol. 227, № 3. – P. 247–276. 12. Hardt V., Mennicken R., Naboko S. Systems of singular differential operators of mixed order and applications to 1-dimensional MHD problems // Math. Nachr. – 1999. – № 205. – P. 19–68. 13. Konstantinov A. Yu. Spectral theory of some matrix differential operators of mixed order // Укр. мат. журн. – 1998. – № 50. – С. 1064–1072. 14. Lifshitz A. E. Magnetohydrodynamics and spectral theory. – Dodrecht, 1989. 15. Langer H., Moller M. The essential spectrum of a non-elliptic boundary value problem // Math. Nachr. – 1996. – № 178. – P. 233–248. 16. Raikov G. D. The spectrum of an ideal magnetohydrodynamic model with translational symmetry // Asymptotic Analysis – 1990. – № 3. – P. 1–35.

Надійшла до редколегії 09.10.08

УДК 513.88: 517.98

А. Кірік, асп., С.Тищенко, доц.
E-mail: alona_kirik@univ.kiev.ua, tish_serg@univ.kiev.ua

УЗАГАЛЬНЕНІ ПРОСТОРИ ФУНКЦІЙ, ПОБУДОВАНІ ЗА ПОЛІНОМАМИ ЛАГЕРРА (ЧАСТИНА 2)

Побудовані простори основних та узагальнених функцій однієї змінної, використовуючи поліноми Лагерра. Наведений опис простору основних функцій як множини цілих функцій певного порядку росту скінченного типу. Будується сім'я гільбертових просторів, елементи яких записуються у вигляді рядів Фур'є, побудованих за класичними поліномами Лагерра, коефіцієнти Фур'є яких задовольняють певній умові спадання.

Spaces of trial and generalized functions of one variable using Lagerre polinomials are built. The description of nuclear space of trial functions as set of entire functions certain order of growth and finite type is given. The family of Hilbert spaces elements of which are written as Fur'e series built by means on classical Lagerre polynomials, coefficients Fur'e of which satisfy certain condition of decreasing are built.

1. Вступ

У попередній роботі авторів [4] була побудована і досліджена двопараметрична сім'я просторів основних $L_{s,\beta}(R_+^1)$ і узагальнених $L_{-s,-\beta}(R_+^1)$ функцій однієї змінної, записаних у вигляді рядів Фур'є, побудованих за поліномами Лагерра, коефіцієнти Фур'є яких задовольняють певній умові спадання. У даній роботі описується двопараметрична сім'я просторів основних та узагальнених функцій, також записаних у вигляді рядів Фур'є, використовуючи інші умови спадання на коефіцієнти Фур'є. В результаті отримуємо інший клас функцій певного порядку росту скінченного типу. Наводиться опис ядерного простору функцій однієї змінної, який є перетином по параметру s двопараметричної сім'ї просторів основних функцій.

2. Основні результати роботи

У попередній роботі авторів [4] наводяться всі необхідні визначення й поняття, які стосуються просторів основних та узагальнених функцій.

Нехай $0 \leq \beta < \infty$ є фіксованим. Для кожного $s \geq 1$ визначимо гільбертів простір $N_{s,\beta}(R_+^1)$ як множину

$$N_{s,\beta}(R_+^1) = \{u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k l_k(x) \in L^2(R_+, e^{-x} dx) : \|u\|_{s,\beta}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 k^s (k!)^\beta < \infty\}, (u, v)_{s,\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \overline{v_k} k^s (k!)^\beta,$$

де $(u_k)_{k=0}^{\infty}, (v_k)_{k=0}^{\infty}$ – коефіцієнти Фур'є розкладу функцій $u(x), v(x)$ за ортонормованим базисом із поліномів Лагерра $(l_k(\cdot))_{k=0}^{\infty}$ у просторі $L^2(R_+, e^{-x} dx)$, $\|\cdot\|_{s,\beta}$ – норма у просторі $N_{s,\beta}(R_+^1)$. Ортонормований базис у просторі

$N_{s,\beta}(R_+^1)$ утворюють вектори $(l_k(\cdot) k^{-\frac{s}{2}} (k!)^{-\frac{\beta}{2}})_{k=0}^{\infty}$. Оскільки $\|\cdot\|_{s,\beta} \geq \|\cdot\|_{L^2}$, то вкладення $N_{s,\beta}(R_+^1) \subset L^2(R_+, e^{-x} dx)$ є то-

пологічним, причому сім'я гільбертових просторів $(N_{s,\beta}(R_+^1))_{s \geq 1, \beta}$ є напрямленою за вкладенням, що дозволяє визначити в якості їх проєктивної границі простір $N_\beta(R_+^1) = \text{pr} \lim_{s \rightarrow \infty} N_{s,\beta}(R_+^1)$. Згідно [2, с.111], цей простір буде ядерним.

Маючи ланцюжок просторів основних функцій $(N_{s,\beta}(R_+^1))_{s \geq 1, \beta}$ відносно нульового $L^2(R_+, e^{-x} dx)$, згідно загальної схеми (див. [2, гл.1]) можна побудувати ланцюжок негативних просторів $(N_{-s,\beta}(R_+^1))_{s \geq 1, \beta}$, кожен з яких буде мати вигляд $N_{-s,\beta}(R_+^1) = \{\xi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k l_k(x) : \|\xi\|_{-s,\beta}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2 k^{-s} (k!)^{-\beta} < \infty\}$, $(\xi, \eta)_{-s,\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k} k^{-s} (k!)^{-\beta}$. Із тієї ж загальної схеми $(N_\beta(R_+^1))' = \bigcup_{s=1}^{\infty} N_{-s,\beta}(R_+^1) \supset \dots \supset N_{-s,\beta}(R_+^1) \supset \dots \supset L^2(R_+, e^{-x} dx) \supset \dots \supset N_{s,\beta}(R_+^1) \supset \dots \supset \bigcap_{s=1}^{\infty} N_{s,\beta}(R_+^1) = N_\beta(R_+^1)$.

3. Опис простору $N_\beta(R_+^1)$

При кожному $s \geq 1, \beta \geq 0$ уведемо гільбертів простір $N_{s,\beta}(R_+^1) = \{u(x) \in L^2(R_+, e^{-x} dx) : \|u\|_{s,\beta}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 k^s (k!)^\beta < \infty\}$, де $(u_k)_{k=0}^{\infty}$ – коефіцієнти Фур'є розкладу функції $u(x)$ за ортонормованим базисом із поліномів Лагерра $(l_k(\cdot))_{k=0}^{\infty}$ у просторі $L^2(R_+, e^{-x} dx)$, $\|u\|_{s,\beta}$ – норма у просторі $N_{s,\beta}(R_+^1)$. $(N_\beta(R_+^1))' = \bigcup_{s=1}^{\infty} N_{-s,\beta}(R_+^1) \supset \dots \supset N_{-s,\beta}(R_+^1) \supset \dots \supset L^2(R_+, e^{-x} dx) \supset \dots \supset N_{s,\beta}(R_+^1) \supset \dots \supset \bigcap_{s=1}^{\infty} N_{s,\beta}(R_+^1) = N_\beta(R_+^1)$.

Нехай $Z^\gamma(C^1)$ – множина цілих функцій порядку росту не вище γ скінченного типу, а її звуження на $R_+^1 = (0, +\infty)$ – $Z^\gamma(R_+^1)$. Наведемо опис функцій із простору $N_\beta(R_+^1)$.

Теорема 1. $N_\beta(R_+^1)$ як множина співпадає з $Z^\gamma(R_+^1)$, де $\gamma = \frac{2}{2+\beta}, \beta > 0$.

Доведення. Спочатку доведемо пряме включення $N_\beta(R_+^1) \subseteq Z^\gamma(R_+^1)$. Розглянемо довільну функцію $u(x) \in N_\beta(R_+^1)$. В силу означення простору $N_{s,\beta}(R_+^1)$ будемо мати:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k l_k(x), \tag{1}$$

причому $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 k^s (k!)^\beta < \infty, s \geq 1$. Перерозкладемо функцію $u(x)$ в ряд Тейлора в околі нуля: $u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{u}_j x^j$.

Підрахуємо значення коефіцієнтів \hat{u}_j . Маємо: $l_k(x) = (-1)^k k! \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2 (k-n)!}$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k l_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k (-1)^k k! \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2 (k-n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j u_{n+j} (n+j)!}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_n x^n,$$

де $\hat{u}_n = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j u_{n+j} (n+j)!}{j!}$. Отримаємо $\sum_{k=0}^{\infty} u_k l_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_n x^n$.

Знайдемо радіус збіжності ряду (1), використовуючи формулу Стірлінга $j! = j^{j+\frac{1}{2}} e^{-j} \sqrt{2\pi} \alpha_j$ ($\alpha_j \rightarrow 1, j \rightarrow \infty$) та

оцінки $\frac{(n+j)!}{j!} \leq n^j e^j, \left(\frac{(n+j)!}{j! n!}\right)^{2-\beta} \leq (2^{n+j})^{2-\beta} = 2^{n(2-\beta)} \cdot 2^{j(2-\beta)}$. Отримаємо

$$\begin{aligned} \left| \hat{u}_n \right| &= \left| \frac{1}{(n!)^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j u_{n+j} (n+j)!}{j!} \right| \leq \frac{1}{(n!)^2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(|u_{n+j}| (n+j)^{\frac{\beta}{2}} ((n+j)!)^{\frac{\beta}{2}} \right) \left(\frac{(n+j)!}{j! (n+j)^{\frac{\beta}{2}} ((n+j)!)^{\frac{\beta}{2}}} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{(n!)^2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} |u_{n+j}|^2 (n+j)^s ((n+j)!)^\beta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{((n+j)!)^2}{(j!)^2 (n+j)^s ((n+j)!)^\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{(n!)^2} \|u\|_{s,\beta} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{((n+j)!)^{2-\beta}}{(j!)^2 (n+j)^s} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\|u\|_{s,\beta}}{(n!)^2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{(n+j)!}{j! n!} \right)^{2-\beta} \frac{(n+j)^{-s}}{(j!)^\beta (n!)^{\beta-2}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{\|u\|_{s,\beta}}{(n!)^{1+\frac{\beta}{2}}} 2^{\frac{n}{2}(2-\beta)} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{j(2-\beta)} (n+j)^{-s}}{(j!)^\beta} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Знову застосовуючи формулу Стірлінга $(n!)^{1+\beta/2} = n^{(n+1/2)(1+\beta/2)} e^{-n(1+\beta/2)} (\sqrt{2\pi})^{1+\beta/2} \alpha_n$, $\alpha_n \rightarrow 1$ та оцінку

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} (n+j)^{-s} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{n^{s/2}}, \text{ маємо } \frac{\|u\|_{s,\beta}}{(n!)^{1+\beta/2}} 2^{\frac{n}{2}(2-\beta)} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{j(2-\beta)} (n+j)^{-s}}{(j!)^{\beta}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\|u\|_{s,\beta}}{n^{s/2} n^{(n+1/2)(1+\beta/2)}} 2^{\frac{n}{2}(2-\beta)} e^{n(1+\beta/2)} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{j(2-\beta)}}{(j!)^{\beta}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad s > 1;$$

Дослідимо збіжність ряду $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{j(2-\beta)}}{(j!)^{\beta}}$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{j(2-\beta)}}{(j!)^{\beta}} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{j(2-\beta)}}{(j^{j+1/2} e^{-j} \sqrt{2\pi\alpha_j})^{\beta}} \leq C_{j,\beta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2j} e^{j\beta}}{2^{j\beta} j^{\beta} j^{j/2}} = C_{j,\beta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4^j}{j^{j/2}} \left(\frac{e}{2j} \right)^{j\beta} = \\ &= C_{j,\beta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(4e^{\beta})^j}{(2^{\beta} j^{\beta})^j j^{j/2}} = C_{j,\beta} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{4e^{\beta}}{2^{\beta} j^{\beta}} \right)^j \frac{1}{j^{j/2}}. \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{\left(\frac{4e^{\beta}}{2^{\beta} j^{\beta}} \right)^j \frac{1}{j^{j/2}}} &= \frac{4e^{\beta}}{2^{\beta} j^{\beta}} \frac{1}{2\sqrt[j]{j^{\beta}}} = 0, \quad \beta > 0. \end{aligned}$$

Отже, ряд збігається при всіх $\beta > 0$. Звідси $\frac{\|u\|_{s,\beta}}{n^{s/2} n^{(n+1/2)(1+\beta/2)}} 2^{\frac{n}{2}(2-\beta)} e^{n(1+\beta/2)} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{j(2-\beta)}}{(j!)^{\beta}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\|u\|_{s,\beta}}{n^{s/2} n^{(n+1/2)(1+\beta/2)}} 2^{\frac{n}{2}(2-\beta)} C_{\beta} e^{n(1+\beta/2)}$, $s \geq 1, \beta > 0$;

Остаточно $\left| \hat{u}_n \right| \leq C_{s,\beta} \|u\|_{s,\beta} \frac{(2^{(2-\beta)} e^{(2+\beta)})^{n/2}}{n^{s/2} n^{(n+1/2)(1+\beta/2)}}$, $s \geq 1, \beta > 0$

Звідси, для радіуса збіжності розглядуваного ряду отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \hat{u}_n \right|^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(C_{s,\beta} \|u\|_{s,\beta} \frac{(2^{(2-\beta)} e^{(2+\beta)})^{n/2}}{n^{s/2} n^{(n+1/2)(1+\beta/2)}} \right)^{\frac{1}{n}} = \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (C_{s,\beta})^{\frac{1}{n}} \|u\|_{s,\beta}^{\frac{1}{n}} \frac{(2^{(2-\beta)} e^{(2+\beta)})^{1/2}}{n^{s/2n} n^{(1+1/2n)(1+\beta/2)}} \leq C_{s,\beta}' (2^{(2-\beta)} e^{(2+\beta)})^{1/2} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{s/2n} n^{(1+1/2n)(1+\beta/2)}} = 0. \end{aligned}$$

Ряд має нескінченний радіус збіжності, а отже збігається абсолютно і рівномірно при всіх дійсних x .

Нехай $u(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{u}_j z^j$ – ціла аналітична функція $z \in C^1$, що є продовженням в комплексну площину функції $u(x) \in N_{\beta}(R_+^1)$. Оцінимо порядок росту ρ отриманої цілої функції за формулою

$$\rho = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left(k \ln k / \ln \left| \frac{1}{u_k} \right| \right) \tag{2}$$

Отже $\left| \hat{u}_n \right|^{-1/n} \geq \left(C_{s,\beta} \|u\|_{s,\beta} \frac{(2^{(2-\beta)} e^{(2+\beta)})^{n/2}}{n^{s/2} n^{(n+1/2)(1+\beta/2)}} \right)^{-1/n} = C_{s,\beta}^{-1/n} \|u\|_{s,\beta}^{-1/n} \frac{n^{s/2n} n^{(1+1/2n)(1+\beta/2)}}{2^{(1-\beta/2)} e^{(1+\beta/2)}}$.

Звідси $\ln \left| \hat{u}_n \right|^{-1/n} \geq -\frac{1}{n} \ln C_{s,\beta} - \frac{1}{n} \ln \|u\|_{s,\beta} + \ln A(s,\beta) + \frac{s}{2n} \ln n + \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \ln n$, де $A(s,\beta) = \frac{1}{2^{(1-\beta/2)} e^{(1+\beta/2)}}$.

Підставляючи оцінку для $\ln \left| \hat{u}_n \right|^{-1/n}$ в (2), отримаємо:

$$\begin{aligned} \rho &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{-\frac{1}{n} \ln C_{s,\beta} - \frac{1}{n} \ln \|u\|_{s,\beta} + \ln A(s,\beta) + \frac{s}{2n} \ln n + \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \ln n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-\frac{1}{n \ln n} \ln C_{s,\beta} - \frac{1}{n \ln n} \ln \|u\|_{s,\beta} + \frac{\ln A(\beta)}{\ln n} + \frac{s \ln n}{2n \ln n} + \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left(1 + \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{\beta}{2}} = \frac{2}{2 + \beta}. \end{aligned}$$

Отже, $\rho \leq \frac{2}{2 + \beta}$. Для $\rho = \frac{2}{2 + \beta}$ необхідно оцінити ще й тип σ функції $u(z)$. Згідно формулі

$$(\sigma \epsilon \rho)^{\frac{1}{p}} = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{\frac{1}{p}} \sqrt[p]{|u_k|}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \text{маємо: } (\rho \sigma \epsilon)^{\frac{1}{p}} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{p}} \left| u_n \right|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{p}} \left(C_{s,\beta} \|u\|_{s,\beta} \frac{(2^{(2-\beta)} e^{(2+\beta)})^{n/2}}{n^{s/2} n^{(n+1/2)(1+\beta/2)}} \right)^{\frac{1}{n}} = \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{p}} C_{s,\beta}^{\frac{1}{n}} \|u\|_{s,\beta}^{\frac{1}{n}} \frac{(2^{(2-\beta)} e^{(2+\beta)})^{1/2}}{n^{s/2n} n^{(1+1/2n)(1+\beta/2)}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{p}} C_{s,\beta}^{\frac{1}{n}} \|u\|_{s,\beta}^{\frac{1}{n}} \frac{2^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2}}}{n^{s/2n+(1+\beta/2)+1/2n(1+\beta/2)}} = \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{p}-s/2n-(1+\beta/2)-1/2n(1+\beta/2)} C_{s,\beta}^{\frac{1}{n}} \|u\|_{s,\beta}^{\frac{1}{n}} 2^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{2s+2+\beta}{4n}} C_{s,\beta}^{\frac{1}{n}} \|u\|_{s,\beta}^{\frac{1}{n}} 2^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2}} = \\ &= 2^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2}} \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{2s+2+\beta}{4n}} = 2^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2}} \limsup_{n \rightarrow \infty} (n^n)^{-\frac{2s+2+\beta}{4}} = 2^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2}} = A^{-1}(s,\beta). \end{aligned}$$

Звідси $\sigma \epsilon \rho \leq (2^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2}})^p$. Для типу σ маємо оцінку:

$$\sigma \leq \frac{(2^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2}})^p}{\epsilon \rho} = \frac{(2+\beta) 2^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2}}}{2e} = (2+\beta) 2^{\frac{2-\beta}{2} - \frac{2}{2} - \frac{2+\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2} - \frac{2}{2} - \frac{2+\beta}{2}} = (2+\beta) 2^{\frac{2-\beta}{2} - 1 - \frac{2+\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2} - 1 - \frac{2+\beta}{2}} = (2+\beta) 2^{-2+\beta} e^{-2+\beta}.$$

Отже, $\sigma \leq (2+\beta) 2^{-2+\beta}$. Оскільки ця нерівність має місце для будь-якого $s \geq 1$, тип σ функції $u(z)$ залежить тільки від β і є скінченним. Таким чином, показано, що має місце включення: $N_\beta(R_+^1) \subseteq Z^\gamma(C^1, R_+^1)$.

Доведемо обернене включення.

Нехай $f(z) = \sum_{k=0}^\infty f_k z^k$ – довільна функція із $Z^\gamma(C^1)$. Покажемо, що її звуження $f(x)$ ($x \in R_+^1$) належить простору $N_\beta(R_+^1)$. Для цього перерозкладемо функцію $f(x) = \sum_{k=0}^\infty f_k x^k$ в ряд по поліномам Лагерра і оцінимо коефіцієнти одержаного ряду. При цьому використаємо формулу

$$x^k = k! \sum_{n=0}^k C_k^n l_n(x) = k! \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} l_n(x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

$$\begin{aligned} \text{Звідси } \sum_{k=0}^\infty f_k x^k &= \sum_{k=0}^\infty f_k \left(k! \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} l_n(x) \right) = \sum_{n=0}^\infty l_n(x) \left(\sum_{k=n}^\infty f_k \frac{(k!)^2}{n!(k-n)!} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^\infty l_n(x) \left(\sum_{i=0}^\infty f_{n+i} \frac{((n+i)!)^2}{n!i!} \right) = \sum_{n=0}^\infty \check{f}_n l_n(x), \text{ де позначено } \check{f}_n = \sum_{i=0}^\infty f_{n+i} \frac{((n+i)!)^2}{n!i!}. \end{aligned}$$

оцінку $\frac{((n+i)!)^2}{n!i!} = \frac{n!(n+1) \dots (n+i) \cdot i!(i+1) \dots (i+n)}{n!i!} \leq (n+i)^i \cdot (i+n)^n = (n+i)^{n+i}$.

Маємо $\left| \check{f}_n \right| = \left| \sum_{i=0}^\infty f_{n+i} \frac{((n+i)!)^2}{n!i!} \right| \leq \sum_{i=0}^\infty |f_{n+i}| \frac{((n+i)!)^2}{n!i!} \leq \sum_{i=0}^\infty |f_{n+i}| (n+i)^{n+i}$. Розглянемо наступні два випадки.

1) Якщо порядок росту ρ функції $f(z) = \sum_{k=0}^\infty f_k z^k$ менше $\frac{2}{2+\beta}$, тобто $0 < \rho < \frac{2}{2+\beta}$, то маємо $|f_{n+i}| (n+i)^{n+i} \leq C' (n+i)^{-\delta(n+i)}$, де $\delta = \frac{1}{\rho} - 1$, причому $\delta > \frac{\beta}{2}$. Використовуючи цю оцінку, при довільному $s \geq 1, \beta > 0$ для квадрату норми $\|f\|_{s,\beta}^2$ функції $f(x)$ ($x \in R_+^1$) одержимо

$$\begin{aligned} \|f\|_{s,\beta}^2 &= \sum_{n=0}^\infty \left| \check{f}_n \right|^2 n^s (n!)^\beta \leq \sum_{n=0}^\infty n^s (n!)^\beta \left(\sum_{i=0}^\infty |f_{n+i}| (n+i)^{n+i} \right)^2 \leq (C')^2 \sum_{n=0}^\infty n^s (n!)^\beta \left(\sum_{i=0}^\infty \frac{1}{(n+i)^{\delta(n+i)}} \right)^2 = \\ &= (C')^2 \sum_{n=0}^\infty n^s (n!)^\beta \left(\sum_{i=0}^\infty \frac{1}{(n+i)^{\delta} n^{\delta} (n+i)^{\delta i}} \right)^2 \leq (C')^2 \sum_{n=0}^\infty (n!)^\beta \frac{n^s}{n^{2\delta n}} \left(\sum_{i=0}^\infty \frac{1}{i^{\delta i}} \right)^2. \end{aligned}$$

При довільних фіксованих $s \geq 1, \delta > 0$ мають місце граничні рівності:

a) $\lim_{i \rightarrow \infty} i \sqrt[i]{\left(\frac{1}{i^\delta}\right)^i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i^\delta} = 0$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^s}{n^{2\delta n}} (n!)^\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n!}{n^n}\right)^\beta \frac{n^s}{n^{2\delta n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\beta+\epsilon}} \sqrt[n]{(n!)^\beta n^s} = 0$, де $2\delta > \beta, 2\delta = \beta + \epsilon$.

За ознакою збіжності Коші, обидва числових ряди є збіжними. Це і означає, що $\|f\|_{s,\beta}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| f_n \right|^2 n^s (n!)^\beta < \infty$.

2) Якщо ж порядок росту $\rho = \frac{2}{2+\beta}$, то із формули (2) випливає, що для коефіцієнтів f_k ряду Фур'є можемо отримати

оцінку: $|f_k| \leq C \frac{(\sigma \rho)^{k/\rho}}{k^{k/\rho}} \leq C^n \left(\frac{2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}}{k^{1/\rho}} \right)^k$. Отже, $|f_k| \leq C^n \left(\frac{2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}}{k^{1/\rho}} \right)^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Звідси, для $n, i = 0, 1, 2, \dots$ мати-

мемо $|f_{n+i}|(n+i)^{n+i} \leq C^n \left(\frac{2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}}{(n+i)^{1/\rho}} \right)^{n+i} (n+i)^{n+i} = C^n \frac{\left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2} \right)^n \left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2} \right)^i}{(n+i)^{(n+i)\delta}}$, де $\delta = 1 - \frac{1}{\rho} = \frac{\beta}{2} > 0$. Використовуючи

останню оцінку, при довільному $s \geq 1$ для квадрату норми $\|f\|_{s,\beta}^2$ функції $f(x)$ ($x \in R_+^1$) одержимо

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left| f_n \right|^2 n^s (n!)^\beta &\leq \sum_{n=0}^{\infty} n^s (n!)^\beta \left(\sum_{i=0}^{\infty} |f_{n+i}|(n+i)^{n+i} \right)^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} n^s (n!)^\beta \left(\sum_{i=0}^{\infty} C^n \frac{\left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2} \right)^n \left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2} \right)^i}{(n+i)^{(n+i)\delta}} \right)^2 \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^\beta n^s \left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2} \right)^{2n} \left(\sum_{i=0}^{\infty} C^n \frac{\left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2} \right)^i}{(n+i)^{\beta/2} (n+i)^{\beta/2}} \right)^2 \leq (C^n)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^\beta n^s}{n^{n\beta}} \left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2} \right)^{2n} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2} \right)^i}{n^{\beta/2}} \right)^2 \end{aligned}$$

Дослідимо збіжність рядів використовуючи ознаку Коші та оцінки нижче:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^\beta n^s}{n^{n\beta}} \left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2} \right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right)^\beta \left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2} \right)^2 = \frac{1}{e^\beta} \frac{4}{2^\beta} e^2 e^\beta = \frac{4e^2}{2^\beta};$$

$$\frac{4e^2}{2^\beta} < 1; 4e^2 < 2^\beta; \log_2 4e^2 < \log_2 2^\beta; \beta > 2 + 2 \log_2 e.$$

$$2) \lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{\frac{\left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2} \right)^i}{n^{\beta/2}}} = \frac{2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}}{n^{\beta/2}}, \frac{2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}}{n^{\beta/2}} < 1; 2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2} < n^{\beta/2}; n > 2^{\frac{2-\beta}{\beta}} e^{\frac{2+\beta}{\beta}}.$$

Виберемо $n_0 = 2^{\frac{2-\beta}{\beta}} e^{\frac{2+\beta}{\beta}}$. Тоді $\forall n > n_0$ ряд збігається. Це також означає, що $\|f\|_{s,\beta}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| f_n \right|^2 n^s (n!)^\beta < \infty$.

Теорема повністю доведена.

Як наслідок, має місце наступна теорема.

Теорема 2. $M_\beta(R_+^1)$ як множина співпадає з $Z^\gamma(R_+^1)$, де

$$M_\beta(R_+^1) = \{u(x) \in L^2(R_+, e^{-x} dx) : \|u\|_\beta^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 (k!)^\beta < \infty\}, \beta \geq 0.$$

4. Висновки

Дана робота є продовженням попередньої роботи авторів [4], в якій була побудована і досліджена двопараметрична сім'я просторів основних $L_{s,\beta}(R_+^1)$ і узагальнених $L_{-s,-\beta}(R_+^1)$ функцій однієї змінної, записаних у вигляді рядів Фур'є, побудованих за поліномами Лагерра, коефіцієнти Фур'є яких задовольняють певній умові спадання. На відміну від попередньої, у даній роботі використовуються інші умови спадання на коефіцієнти Фур'є.

Основним результатом є опис ядерного простору основних функцій однієї змінної, який є перетином по параметру s двопараметричної сім'ї просторів основних функцій, у термінах множини цілих функцій певного порядку росту скінченного типу. Побудовані простори та їх тензорні добутки можуть використовуватись у задачах математичного опису фізичних систем, які зустрічаються у квантовій теорії поля й статистичній фізиці.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – М., 1966. – Т.2. 2. Березанский Ю.М. Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – К., 1978. 3. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. – М., 1979. 4. Кірік, С. Тищенко. Узагальнені простори функцій, побудовані за поліномами Лагерра (частина 1) // Вісн. Київ. націон. ун-ту ім.Т. Шевченка. Математика. Механіка. -2007. – Вип.17-18. 5. Суэтин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М., 1976.

УДК 517.9

І. Романенко, канд. фіз.-мат. наук., доц.
E-mail: igrom@univ.kiev.ua

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ОБЛАСТІ З КУТОВОЮ ТОЧКОЮ

Досліджено існування та єдиність розв'язку еліптичної крайової задачі зі сталими коефіцієнтами у двовимірній нескінченній кутовій області. Детально досліджено та уточнено апіорні оцінки розв'язку такої задачі та характер залежності сталих в апіорних оцінках від даних задачі.

The existence and uniqueness of solution of linear elliptic boundary value problem with constant coefficients in 2-dimensional unbounded angular domain are investigated. An a priori estimates of such a problem solution are obtained and the character of a priori constants dependence of the problem data had been investigated.

1. Короткий огляд літератури та визначення основного напрямку досліджень. Крайові задачі з кутовими точками вже протягом більш ніж 40 останніх років є об'єктом дослідження ряду фахівців. Фундаментально у цьому напрямку є, безумовно, робота [3], в якій закладено основи методики та отримано базові результати, важливі для дослідження задач з кінчними та кутовими точками. Важливі результати було отримано і в роботах інших дослідників, наприклад, [1,4,5,6].

Більшість робіт із дослідження задач з кутовими та кінчними точками містять апіорні оцінки розв'язку. Однак, характер залежності констант у таких апіорних оцінках від даних задачі не встановлено, що заважає застосовувати отримані результати до дослідження нелінійних крайових задач у куткових та кінчних областях. Другою вадою наявних результатів є формулювання теорем розв'язності у термінах аналізу особливих точок оператора розв'язку похідної еліптичної крайової задачі з комплексним параметром. Це, фактично, суттєво звужує діапазон застосування результатів, наприклад, роботи [2].

Саме тому основним напрямком дослідження у даній роботі стало уточнення характеру залежності сталих в апіорних оцінках розв'язку від даних еліптичної крайової задачі в області з кутовою точкою, а також отримання теорем про розв'язність у термінах лише даних вихідної задачі.

2. Основні позначення. Нехай Ω – область у просторі R^2 з межею, яка гладка усюди, крім початку координат, а у точці 0 її границя збігається з кутом, який має вершину у цій точці. Будемо позначати за допомогою $V_{p,\delta}^{(m)}(\Omega)$

простір Соболева з вагою та нормою $\|u\|_{p,\delta,\Omega}^{(m)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} r^{p(\frac{\delta}{2} - m + |\alpha|)} |D^\alpha u|^p dx dy \right)^{1/p}$. Позначимо також за допомогою

$V_{p,\delta}^{m-1/p}(\partial\Omega)$ простір граничних значень на $\partial\Omega$ функцій з $V_{p,\delta}^{(m)}(\Omega)$ з нормою

$\|v\|_{p,\delta,\Omega}^{m-1/p} = \inf \left\{ \|u\|_{p,\delta,\Omega}^{(m)} : u \in V_{p,\delta}^{(m)}(\Omega), u|_{\partial\Omega} = v \right\}$. Ці простори в n -вимірному випадку було введено, наприклад, у [3]

при $p = 2$ та у [4] при $p \neq 2$.

3. Апіорна оцінка у випадку задачі для рівняння Пуассона. Розглянемо найпростішу крайову задачу з умовами Діріхле у нескінченному куті між променями під кутами α , $\alpha + \gamma$ до напрямку осі Ox:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad \alpha < \arg(x, y) < \alpha + \gamma, \quad (1)$$

$$u|_{\arg(x,y)=\alpha} = g_\alpha(x, y), \quad u|_{\arg(x,y)=\alpha+\gamma} = g_{\alpha+\gamma}(x, y), \quad (2)$$

де $\arg(x, y)$ – значення аргументу точки з координатами (x, y) , розташованої на площині R^2 .

Нехай $K(\alpha, \alpha + \gamma) = \{(x, y) \in R^2 : \alpha < \arg(x, y) < \alpha + \gamma\}$, а k – невід'ємне ціле число. Будемо розглядати розв'язок u задачі (1) – (2) у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha + \gamma))$. Від функцій правих частин будемо вимагати виконання включень

$$f \in V_{2,\delta}^{(k)}(K(\alpha, \alpha + \gamma)), \quad g \in V_{2,\delta}^{\left(\frac{3+k}{2}\right)}(\partial K(\alpha, \alpha + \gamma)), \quad (3)$$

$$\text{де } g(x, y) = \begin{cases} g_\alpha(x, y), & \arg(x, y) = \alpha, \\ g_{\alpha+\gamma}(x, y), & \arg(x, y) = \alpha + \gamma. \end{cases}$$

Задача (1), (2) добре досліджена (див. [3, 6]). Згідно з роботою [3] до задачі (1), (2) можна послідовно застосувати набір перетворень:

1. Перехід до полярних координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$;

2. Заміна $\tau = \ln r$;

3. Перетворення Фур'є $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau, \varphi) e^{-i\lambda\tau} d\tau$.

Після виконання послідовності кроків 1 – 3 задача (1), (2) перейде у крайову задачу для диференціального рівняння з комплексним параметром:

$$\frac{d^2 \hat{u}}{d\varphi^2} - \lambda^2 \hat{u} = \hat{f}(\varphi, \lambda), \quad \alpha < \varphi < \alpha + \gamma, \quad (4)$$

$$\hat{u}(\alpha) = \hat{g}_\alpha, \quad \hat{u}(\alpha + \gamma) = \hat{g}_{\alpha + \gamma}, \quad (5)$$

де \hat{u} , \hat{f} , \hat{g}_α , $\hat{g}_{\alpha + \gamma}$ – функції та величини, що з'явилися внаслідок застосування кроків 1 – 3 відповідно до функцій u , f , g_α , $g_{\alpha + \gamma}$. Розв'язок задачі (4) – (5) досліджується у просторі Соболева $W_2^{(2+k)}(\alpha, \alpha + \gamma)$.

Відомо ([3]), що оператор, який встановлює розв'язок задачі (4), (5) по правих частинах цієї задачі, буде мероморфною функцією з полюсами $\lambda_l = \frac{\pi l}{\gamma} i$, $l \in Z$. Відомо також, що з умови $\mu \neq \frac{\pi l}{\gamma}$, $l \in Z$ впливає виконання на прямій $\text{Im } \lambda = \mu$ апіорної оцінки для розв'язку \hat{u} задачі (4) – (5):

$$\|\hat{u}\|_{2,(\alpha, \alpha + \gamma)}^{(2+k)} + |\lambda|^{2+k} \|\hat{u}\|_{2,(\alpha, \alpha + \gamma)} \leq C_1 \left(\|\hat{f}\|_{2,(\alpha, \alpha + \gamma)}^{(k)} + |\lambda|^k \|\hat{f}\|_{2,(\alpha, \alpha + \gamma)} + |\lambda|^{k + \frac{3}{2}} (|\hat{g}_\alpha| + |\hat{g}_{\alpha + \gamma}|) \right). \quad (6)$$

На базі нерівності (6) шляхом почергового застосування у зворотному порядку кроків, обернених до кроків 1-3, можна довести наступний факт щодо розв'язності задачі (1) – (2):

Якщо для правих частин задачі (1) – (2) виконані умови (3), а числа k , δ , γ задовольняють нерівності $\mu = k - \frac{\delta}{2} + 1 \neq \frac{l\pi}{\gamma}$, $l \in Z$, то задача (1) – (2) у класі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha + \gamma))$ буде мати єдиний розв'язок u , для якого буде справедливою апіорна оцінка

$$\|u\|_{2,\delta,K(\alpha, \alpha + \gamma)}^{(2+k)} \leq C_2 \left(\|f\|_{2,\delta,K(\alpha, \alpha + \gamma)}^{(k)} + \|g\|_{2,\delta,\partial K(\alpha, \alpha + \gamma)}^{\left(\frac{3}{2} + k\right)} \right). \quad (7)$$

На жаль, наявні на нинішній момент роботи з даного напрямку не містять дослідження характеру залежності сталі C_1 , C_2 від параметрів задачі (1) – (2). Як ми побачимо в подальшому, встановлення такого характеру залежності є принциповим у питаннях одержання апіорних оцінок розв'язків крайових задач, відмінних від задач для рівняння Пуассона. Тому виконаємо таке дослідження.

Нескладно встановити, що розв'язок задачі (4) – (5) можна знайти за формулою

$$\hat{u} = \hat{g}_\alpha \frac{\text{sh } \lambda(\alpha + \gamma - \varphi)}{\text{sh } \lambda \gamma} + \hat{g}_{\alpha + \gamma} \frac{\text{sh } \lambda(\varphi - \alpha)}{\text{sh } \lambda \gamma} + \frac{1}{\lambda} \int_\alpha^\varphi \hat{f}(s) \text{sh } \lambda(\varphi - s) ds - \frac{\text{sh } \lambda(\varphi - \alpha)}{\lambda \text{sh } \lambda \gamma} \int_\alpha^{\alpha + \gamma} \hat{f}(s) \text{sh } \lambda(\alpha + \gamma - s) ds. \quad (8)$$

Інтегральні доданки формули (8) можемо переписати у вигляді

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\lambda} \int_\alpha^\varphi \hat{f}(s) \text{sh } \lambda(\varphi - s) ds - \frac{\text{sh } \lambda(\varphi - \alpha)}{\lambda \text{sh } \lambda \gamma} \int_\alpha^{\alpha + \gamma} \hat{f}(s) \text{sh } \lambda(\alpha + \gamma - s) ds = \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_\alpha^\varphi \hat{f}(s) \left(\text{sh } \lambda(\varphi - s) - \frac{\text{sh } \lambda(\varphi - \alpha)}{\lambda \text{sh } \lambda \gamma} \text{sh } \lambda(\alpha + \gamma - s) \right) ds - \int_\varphi^{\alpha + \gamma} \hat{f}(s) \frac{\text{sh } \lambda(\varphi - \alpha) \text{sh } \lambda(\alpha + \gamma - s)}{\lambda \text{sh } \lambda \gamma} ds = \\ &= -\frac{1}{\lambda} \int_\alpha^\varphi \hat{f}(s) \frac{\text{sh } \lambda(\alpha + \gamma - \varphi) \text{sh } \lambda(s - \alpha)}{\lambda \text{sh } \lambda \gamma} ds - \int_\varphi^{\alpha + \gamma} \hat{f}(s) \frac{\text{sh } \lambda(\alpha + \gamma - s) \text{sh } \lambda(\varphi - \alpha)}{\lambda \text{sh } \lambda \gamma} ds. \end{aligned} \quad (9)$$

Позначимо $\lambda = t + i\mu$ і оцінимо останній вираз на прямій $\{t + i\mu : t \in (-\infty, +\infty)\}$. Шляхом тотожних перетворень можна отримати

$$|\text{sh } \lambda \sigma| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\text{ch } 2t\sigma - \cos 2\mu\sigma}.$$

З останньої рівності можемо вивести

$$\left| \frac{\text{sh } \lambda(\alpha + \gamma - \varphi) \text{sh } \lambda(s - \alpha)}{\lambda \text{sh } \lambda \gamma} \right| = \frac{\sqrt{\text{ch } 2t(\alpha + \gamma - \varphi) - \cos 2\mu(\alpha + \gamma - \varphi)} \sqrt{\text{ch } 2t(s - \alpha) - \cos 2\mu(s - \alpha)}}{\sqrt{2} \sqrt{\text{ch } 2t\gamma - \cos 2\mu\gamma}}, \quad (10)$$

$$\left| \frac{\text{sh } \lambda(\alpha + \gamma - s) \text{sh } \lambda(\varphi - \alpha)}{\lambda \text{sh } \lambda \gamma} \right| = \frac{\sqrt{\text{ch } 2t(\alpha + \gamma - s) - \cos 2\mu(\alpha + \gamma - s)} \sqrt{\text{ch } 2t(\varphi - \alpha) - \cos 2\mu(\varphi - \alpha)}}{\sqrt{2} \sqrt{\text{ch } 2t\gamma - \cos 2\mu\gamma}}. \quad (11)$$

Вирази (10), (11) парні по t . Тому ми можемо оцінювати їх лише для $t > 0$. Шляхом винесення з-під коренів у (10), (11) визначальних доданків, а також урахування тих фактів, що при $\alpha < s < \varphi$ буде виконуватись нерівність $\gamma + s - \varphi < \gamma$, а при $\alpha < \varphi < s$ справедлива нерівність $\gamma + \varphi - s < \gamma$, можемо оцінити

$$\left| \frac{\text{sh } \lambda(\alpha + \gamma - \varphi) \text{sh } \lambda(s - \alpha)}{\lambda \text{sh } \lambda \gamma} \right| \leq \frac{C_3}{|\sin \mu\gamma|}, \quad \left| \frac{\text{sh } \lambda(\alpha + \gamma - s) \text{sh } \lambda(\varphi - \alpha)}{\lambda \text{sh } \lambda \gamma} \right| \leq \frac{C_3}{|\sin \mu\gamma|}. \quad (12)$$

де C_3 – числова стала, яка не залежить від t , μ , α , γ .

Вирази з гіперболічними синусами у перших двох доданках із суми (8) можна оцінити аналогічно:

$$\left| \frac{\text{sh } \lambda(\alpha + \gamma - \varphi)}{\text{sh } \lambda\gamma} \right| \leq \frac{C_4}{|\sin \mu\gamma|}, \quad \left| \frac{\text{sh } \lambda(\varphi - \alpha)}{\text{sh } \lambda\gamma} \right| \leq \frac{C_4}{|\sin \mu\gamma|}, \quad (13)$$

де C_4 – числова стала, яка не залежить від t, μ, α, γ .

Зауважимо також, що

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+\gamma} \left| \frac{\text{sh } \lambda(\varphi - \alpha)}{\text{sh } \lambda\gamma} \right|^2 d\varphi &= \frac{1}{4|\text{sh } \lambda\gamma|^2} \int_{\alpha}^{\alpha+\gamma} |\text{ch } 2\lambda(\varphi - \alpha) - 2| d\varphi \leq \frac{1}{4|\text{sh } \lambda\gamma|^2} \int_{\alpha}^{\alpha+\gamma} (e^{2t(\varphi - \alpha)} + 3) d\varphi \leq \\ &\leq \frac{t^{-1}(e^{2t\gamma} - 1) + 6\gamma}{8|\text{ch } 2t\gamma - \cos 2\mu\gamma|} = \frac{1}{|\lambda|} \frac{|\lambda|(e^{2t\gamma} - 1) + 6\gamma|\lambda|}{8|\text{ch } 2t\gamma - \cos 2\mu\gamma|} \leq \frac{C_5}{|\lambda|}, \end{aligned} \quad (14)$$

стала C_5 залежить від γ, μ неперервним чином, але не залежить від t, α .

Внаслідок подання (9), нерівностей (12), (13), (14) нерівності Коші-Буняковського, та елементарних інтегральних оцінок, можемо легко отримати нерівність вигляду

$$\|\hat{u}\|_{2,(\alpha,\alpha+\gamma)} \leq \frac{C_6}{|\sin \mu\gamma|} \left(\frac{1}{|\lambda|} \|\hat{f}\|_{2,(\alpha,\alpha+\gamma)} + \frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} (|\hat{g}_{\alpha}| + |\hat{g}_{\alpha+\gamma}|) \right), \quad (16)$$

в якій числова стала C_6 залежить від γ, μ неперервним чином, але не залежить від t, α .

Повністю аналогічно до отримання нерівності (14) можна одержати оцінки і для похідних функції \hat{u} до потрібного порядку. Загалом, отримуємо оцінку норми розв'язку задачі (4) – (5) у просторі Соболева

$$\|\hat{u}\|_{2,(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(2+k)} + |\lambda|^{2+k} \|\hat{u}\|_{2,(\alpha,\alpha+\gamma)} \leq \frac{C_7}{|\sin \mu\gamma|} \left(\|\hat{f}\|_{2,(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(k)} + |\lambda|^k \|\hat{f}\|_{2,(\alpha,\alpha+\gamma)} + |\lambda|^{\frac{k+3}{2}} (|\hat{g}_{\alpha}| + |\hat{g}_{\alpha+\gamma}|) \right), \quad (17)$$

в якій числова стала C_7 залежить від γ, μ неперервним чином, але не залежить від t, α . Зауважимо, що оцінка (17) уточнює нерівність (6) у частині характеру залежності сталої від даних задачі.

Внаслідок нерівності (17) за стандартною методикою, запропонованою у [3], можемо отримати апіорну оцінку розв'язку задачі (1), (2), яка уточнює нерівність (7):

$$\|u\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(2+k)} \leq \frac{C_8}{|\sin \mu\gamma|} \left(\|f\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(k)} + \|g\|_{2,\delta,\partial K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{\left(\frac{3+k}{2}\right)} \right). \quad (18)$$

Тут C_8 – числова стала, яка залежить від γ, μ неперервним чином, але не залежить від α .

4. Розв'язність та апіорна оцінка у випадку найпростішої задачі з параметром. Нехай d – деяка додатна дійсна стала, $\alpha, \gamma \in [0, 2\pi), \gamma \neq \pi$. Розглянемо крайову задачу Діріхле у нескінченному куті між променями під кутами $\alpha, \alpha + \gamma$ до напрямку осі Ox :

$$u_{xx} + d^2 u_{yy} = f(x, y), \quad \alpha < \arg(x, y) < \alpha + \gamma, \quad (19)$$

$$u|_{\arg(x,y)=\alpha} = g_{\alpha}(x, y), \quad u|_{\arg(x,y)=\alpha+\gamma} = g_{\alpha+\gamma}(x, y), \quad (20)$$

На жаль, безпосереднє застосування методу, викладеного в [3], до дослідження задачі (1) – (2) у загальному випадку призводить до аналізу спектральної задачі з комплексним параметром, для якої не вдається встановити розташування особливих точок оператора розв'язку і, як наслідок – довести аналог наведеного вище твердження.

Однак, задачу (19) – (20) можна за допомогою заміни

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y}{d} \quad (21)$$

звести до задачі вигляду (1) – (2):

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = F(\xi, \eta), \quad \tilde{\alpha} < \arg(\xi, \eta) < \tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}, \quad (22)$$

$$U|_{\arg(\xi,\eta)=\tilde{\alpha}} = G_{\tilde{\alpha}}(\xi, \eta), \quad U|_{\arg(\xi,\eta)=\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}} = G_{\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}}(\xi, \eta), \quad (23)$$

де $\arg(\xi, \eta) = \tilde{\alpha}, \arg(\xi, \eta) = \tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}$ – промені, що виникають з променів $\arg(x, y) = \alpha, \arg(x, y) = \alpha + \gamma$ відповідно після виконання заміни (21), $U(\xi, \eta) = u(\xi, d\eta), F(\xi, \eta) = f(\xi, d\eta), G_{\tilde{\alpha}}(\xi, \eta) = g_{\alpha}(\xi, d\eta), G_{\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}}(\xi, \eta) = g_{\alpha+\gamma}(\xi, d\eta)$.

При виконанні заміни (21) стандартний простір з вагою $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha + \gamma))$ у координатах x, y переходить у координатах ξ, η у простір $\tilde{V}_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}))$, норму в якому можна знайти за формулою

$$\|\tilde{U}\|_{2,\delta,K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})}^{(2+k)} = \left(d \sum_{i+i_2 \leq 2+k} \int_{K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})} (\xi^2 + d^2 \eta^2)^{\frac{\delta}{2} - 2 - k + i + i_2} \left| \frac{1}{d^{i_2}} \frac{\partial^{i+i_2} U}{\partial \xi^{i_1} \partial \eta^{i_2}} \right|^2 d\xi d\eta \right)^{1/2}.$$

З очевидної нерівності $\min\{1; d^2\} \cdot (\xi^2 + \eta^2) \leq \xi^2 + d^2 \eta^2 \leq \max\{1; d^2\} \cdot (\xi^2 + \eta^2)$ нескладно встановити, що норма простору $\tilde{V}_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}))$ буде еквівалентною до норми простору $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}))$, тобто будуть справедливи нерівності

$$C_9(d, k, \delta) \|U\|_{2,\delta,K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})}^{(2+k)} \leq \|\tilde{U}\|_{2,\delta,K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})}^{(2+k)} \leq C_{10}(d, k, \delta) \|U\|_{2,\delta,K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})}^{(2+k)}, \quad (24)$$

причому залежність сталих C_9, C_{10} від $d \in (0, +\infty)$ є неперервною. Можна також встановити оцінки, аналогічні до нерівностей (24), до функцій F та G , де $G(\xi, \eta) = \begin{cases} G_{\tilde{\alpha}}(\xi, \eta), & \arg(\xi, \eta) = \tilde{\alpha}, \\ G_{\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}}(\xi, \eta), & \arg(\xi, \eta) = \tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}. \end{cases}$

Внаслідок оцінки (24) ми можемо розглядати розв'язок задачі (22), (23) у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}))$. Використовуючи наведений раніше результат з [3], а також нерівність (18), можна стверджувати, що задача (22), (23) буде розв'язною однозначно у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}))$ тоді й лише тоді, коли

$$\mu = k - \frac{\delta}{2} + 1 \neq \frac{l\pi}{\tilde{\gamma}}, \quad l \in Z, \quad (25)$$

а розв'язок U задачі (22), (23) буде задовольняти нерівність

$$\|U\|_{2,\delta,K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})}^{(2+k)} \leq \frac{C_{11}}{|\sin \mu \tilde{\gamma}|} \left(\|F\|_{2,\delta,K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})}^{(k)} + \|G\|_{2,\delta,\partial K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})}^{\left(\frac{3+k}{2}\right)} \right), \quad (26)$$

де C_{11} – числова стала, яка залежить від $\tilde{\gamma}$, μ неперервним чином, але не залежить від α .

Внаслідок цього факту, а також нерівностей (24) і аналогічних до них нерівностей для функцій F та G , отримаємо, що при виконанні умови (25) задача (19), (20) буде однозначно розв'язною у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha + \gamma))$, а її розв'язок u буде задовольняти нерівність

$$\|u\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(2+k)} \leq \frac{C_{12}(d, k, \delta, \tilde{\gamma})}{|\sin \mu \tilde{\gamma}|} \left(\|f\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(k)} + \|g\|_{2,\delta,\partial K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{\left(\frac{3+k}{2}\right)} \right), \quad (27)$$

де стала C_{12} залежить від $d, k, \delta, \tilde{\gamma}$, причому залежність від $d \in (0, +\infty)$ є неперервною.

Основним питанням, на яке потрібно відповісти для визначення розв'язності задачі (19), (20) у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha + \gamma))$, є величина кута $\tilde{\gamma}$ в умові (25). Зауважимо, що в загальному випадку величина кута $\tilde{\gamma}$ залежить не лише від параметрів γ та d , але й від параметру α .

Справді, нескладно перекопатись у тому, що при заміні координат (21) промені $\{\arg(x, y) = \tilde{\alpha}\}, \{\arg(x, y) = \tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}\}$ будуть розташовані у тих же квадрантах, що й промені $\{\arg(x, y) = \alpha\}, \{\arg(x, y) = \alpha + \gamma\}$ відповідно. Враховуючи це, тригонометричну формулу

$$\operatorname{ctg} \tilde{\gamma} = \operatorname{ctg}(\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}) = \frac{\operatorname{ctg}(\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}) \operatorname{ctg} \tilde{\alpha} + 1}{\operatorname{ctg} \tilde{\alpha} - \operatorname{ctg}(\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})} = \frac{d^2 \operatorname{ctg}(\alpha + \gamma) \operatorname{ctg} \alpha + 1}{d(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}(\alpha + \gamma))}, \quad (28)$$

а також властивості функції ctg , можна встановити, що

$$\tilde{\gamma} = \operatorname{arccotg} \left(\frac{d^2 \operatorname{ctg}(\alpha + \gamma) \operatorname{ctg} \alpha + 1}{d(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}(\alpha + \gamma))} \right) + \pi \left[\frac{\gamma}{\pi} \right], \quad (29)$$

де $[\]$ – функція цілої частини дійсного числа.

Таким чином, доведено лему про розв'язність задачі (19), (20):

Лема 1. Нехай праві частини задачі (19), (20) задовольняють умову (3). Тоді з виконання умови (25), в якій $\tilde{\gamma}$ визначена рівністю (29), випливає існування та єдиність розв'язку задачі (19), (20) у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha + \gamma))$, а також виконання для розв'язку априорної оцінки (27), стала C_{12} в якій залежить лише від $d, k, \delta, \tilde{\gamma}$, причому ця залежність є неперервною.

Доведемо лему, яка встановлює достатні умови розв'язності задачі (19), (20) для довільного $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Лема 2. Позначимо

$$D_* = \min \left\{ d \operatorname{ctg} \gamma - \frac{1}{2} \left(d - \frac{1}{d} \right) \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}; d \operatorname{ctg} \gamma + \frac{1}{2} \left(d - \frac{1}{d} \right) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right\}, \quad (30)$$

$$D^* = \max \left\{ d \operatorname{ctg} \gamma - \frac{1}{2} \left(d - \frac{1}{d} \right) \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}; d \operatorname{ctg} \gamma + \frac{1}{2} \left(d - \frac{1}{d} \right) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right\}, \quad (31)$$

$$\tilde{\gamma}_{\min} = \operatorname{arccctg} D_* + \left[\frac{\gamma}{\pi} \right] \pi, \quad \tilde{\gamma}_{\max} = \operatorname{arccctg} D_* + \left[\frac{\gamma}{\pi} \right] \pi. \quad (32)$$

Нехай числа k, δ задовольняють умову

$$\frac{(l-1)\pi}{\tilde{\gamma}_{\min}} < \left| k - \frac{\delta}{2} + 1 \right| < \frac{l\pi}{\tilde{\gamma}_{\max}} \quad (33)$$

при деякому натуральному l , такому, що $l < \frac{\tilde{\gamma}_{\max}}{\tilde{\gamma}_{\max} - \tilde{\gamma}_{\min}}$, а праві частини задачі (19), (20) задовольняють умову (3).

Тоді для довільного $\alpha \in [0, 2\pi)$ у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha + \gamma))$ існує єдиний розв'язок задачі (19), (20), для якого виконана апіорна оцінка

$$\|u\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(2+k)} \leq \frac{C_{13}(d,k,\delta,\tilde{\gamma}_{\min},\tilde{\gamma}_{\max})}{\min\{|\sin \mu \tilde{\gamma}_{\min}|, |\sin \mu \tilde{\gamma}_{\max}|\}} \left(\|f\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(k)} + \|g\|_{2,\delta,\partial K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)} \right) \quad (34)$$

де величина μ визначена з (25), стала C_{13} залежить лише від $d, k, \delta, \tilde{\gamma}_{\min}, \tilde{\gamma}_{\max}$, причому залежність від $d \in (0, +\infty)$ є неперервною.

Доведення. При перетворенні координат (21) величина $\operatorname{ctg} \tilde{\gamma}$ може бути знайдена за формулою (29). Використовуючи елементарні тригонометричні перетворення, можемо встановити еквівалентну формулу

$$\operatorname{ctg} \tilde{\gamma} = \frac{d^2 \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg}^2 \alpha + (1-d^2) \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma}{d(\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1)}. \quad (35)$$

Знайдемо мінімальне та максимальне значення виразу (35) при $\alpha \in [0, 2\pi)$. Оскільки при цьому $\operatorname{ctg} \alpha$ пробігає весь діапазон від $-\infty$ до $+\infty$ включно, то у виразі (35) можемо зробити заміну $t = \operatorname{ctg} \alpha$ і дослідити на мінімальне та максимальне значення вираз

$$h(t) = \frac{d^2 \operatorname{ctg} \gamma t^2 + (1-d^2)t + \operatorname{ctg} \gamma}{d(t^2 + 1)} = d \operatorname{ctg} \gamma - \left(d - \frac{1}{d} \right) \frac{t + \operatorname{ctg} \gamma}{t^2 + 1}, \quad t \in [-\infty; +\infty].$$

Нескладно встановити, що точками екстремумів виразу $H(t) = \frac{t + \operatorname{ctg} \gamma}{t^2 + 1}$ будуть значення $t_{1,2} = -\operatorname{ctg} \gamma \pm \frac{1}{\sin \gamma}$,

а значення $H(t)$ у цих точках становлять $H(t_1) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$, $H(t_2) = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$. Тому мінімальне та максимальне значення $h(t)$ можна знайти за формулами $\min_{t \in R} h(t) = \min\{h(t_1); h(t_2)\}$, $\max_{t \in R} h(t) = \max\{h(t_1); h(t_2)\}$, з яких підстановкою значень $t_{1,2}$ отримаємо вирази (30), (31) відповідно.

З формул (30), (31), враховуючи той факт, що при заміні координат (21) промені $\{\arg(x, y) = \tilde{\alpha}\}$, $\{\arg(x, y) = \tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}\}$ будуть розташовані у тих же квадрантах, що й промені $\{\arg(x, y) = \alpha\}$, $\{\arg(x, y) = \alpha + \gamma\}$ відповідно, а також властивості функції ctg , можемо встановити, що мінімальне та максимальне значення кута $\tilde{\gamma}$ при заміні (21) та зміні $\alpha \in [0, 2\pi)$ можна знайти відповідно за формулами (32), а повний діапазон зміни кута $\tilde{\gamma}$ становитиме $[\tilde{\gamma}_{\min}, \tilde{\gamma}_{\max}]$. Застосовуючи результат леми 1, можемо стверджувати, що задача (1), (2) буде однозначно розв'язною у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha + \gamma))$ при довільному $\alpha \in [0, 2\pi)$ тоді й лише тоді, коли для усіх $\tilde{\gamma} \in [\tilde{\gamma}_{\min}, \tilde{\gamma}_{\max}]$ числа k, δ будуть задовольняти умову (25). Звідси нескладно отримати достатність виконання умови (33) для існування розв'язку задачі (19), (20) при довільному $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Для отримання оцінки (34) потрібно оцінити максимальне значення виразу $\frac{C_{12}(d,k,\delta,\tilde{\gamma})}{|\sin \mu \tilde{\gamma}|}$ при зміні $\alpha \in [0, 2\pi)$.

В силу неперервної залежності C_{12} від $\tilde{\gamma}$ можемо обрати $C_{13} = \max_{\tilde{\gamma} \in [\tilde{\gamma}_{\min}, \tilde{\gamma}_{\max}]} C_{12}(d, k, \delta, \tilde{\gamma})$. З нерівностей (33) дістаємо, що $(l-1)\pi < |\mu| \tilde{\gamma} < l\pi$ при $\tilde{\gamma} \in [\tilde{\gamma}_{\min}, \tilde{\gamma}_{\max}]$, і отже $\sin \mu \tilde{\gamma} \neq 0$ для $\tilde{\gamma} \in [\tilde{\gamma}_{\min}, \tilde{\gamma}_{\max}]$. Враховуючи характер поведінки

функції $\sin t$ при $t \in ((l-1)\pi, l\pi)$, отримаємо нерівність $\min_{[\tilde{\gamma}_{\min}, \tilde{\gamma}_{\max}]} |\sin \mu \tilde{\gamma}| = \min\{|\sin \mu \tilde{\gamma}_{\min}|, |\sin \mu \tilde{\gamma}_{\max}|\}$. Тоді з нерівності (27) дістаємо апіорну оцінку (34).

Лема 3. Нехай стала d в задачі (19), (20) приймає значення з проміжку $[d_1, d_2] \subset R^+$. Позначимо

$$\begin{aligned} D_*(d_1, d_2) &= \min_{d \in [d_1, d_2]} \left\{ d \operatorname{ctg} \gamma - \frac{1}{2} \left(d - \frac{1}{d} \right) \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}; d \operatorname{ctg} \gamma + \frac{1}{2} \left(d - \frac{1}{d} \right) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right\}, \\ D^*(d_1, d_2) &= \max_{d \in [d_1, d_2]} \left\{ d \operatorname{ctg} \gamma - \frac{1}{2} \left(d - \frac{1}{d} \right) \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}; d \operatorname{ctg} \gamma + \frac{1}{2} \left(d - \frac{1}{d} \right) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right\}, \\ \tilde{\gamma}_{\min}(d_1, d_2) &= \operatorname{arccctg} D^*(d_1, d_2) + \left[\frac{\gamma}{\pi} \right] \pi, \quad \tilde{\gamma}_{\max}(d_1, d_2) = \operatorname{arccctg} D_*(d_1, d_2) + \left[\frac{\gamma}{\pi} \right] \pi. \end{aligned} \quad (36)$$

Нехай числа k, δ, d_1, d_2 задовольняють умову

$$\frac{(l-1)\pi}{\tilde{\gamma}_{\min}(d_1, d_2)} < \left| k - \frac{\delta}{2} + 1 \right| < \frac{l\pi}{\tilde{\gamma}_{\max}(d_1, d_2)} \quad (37)$$

з деяким натуральним l , таким, що $l < \frac{\tilde{\gamma}_{\max}(d_1, d_2)}{\tilde{\gamma}_{\max}(d_1, d_2) - \tilde{\gamma}_{\min}(d_1, d_2)}$.

Нехай праві частини задачі (19), (20) задовольняють умову (3).

Тоді для довільних $\alpha \in [0, 2\pi)$, $d \in [d_1, d_2]$ у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha + \gamma))$ існує єдиний розв'язок задачі (19), (20), для якого виконана апіорна оцінка

$$\|u\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(2+k)} \leq \frac{C_{14}(d, k, \delta, \gamma_{\min}, \gamma_{\max})}{\min\{|\sin \mu \tilde{\gamma}_{\min}|, |\sin \mu \tilde{\gamma}_{\max}|\}} \left(\|f\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(k)} + \|g\|_{2,\delta,\partial K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(\frac{3}{2}+k)} \right), \quad (38)$$

стала C_{14} в якій залежить лише від $k, \delta, d_1, d_2, \tilde{\gamma}_{\min}(d_1, d_2), \tilde{\gamma}_{\max}(d_1, d_2)$.

Доведення. З доведення леми 2 ми можемо отримати, що для довільних $d > 0$ та $\alpha \in [0, 2\pi)$ будуть справедливими нерівності

$$\begin{aligned} \min \left\{ d \operatorname{ctg} \gamma - \frac{1}{2} \left(d - \frac{1}{d} \right) \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}; d \operatorname{ctg} \gamma + \frac{1}{2} \left(d - \frac{1}{d} \right) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right\} &\leq \operatorname{ctg} \tilde{\gamma} \leq \\ &\leq \max \left\{ d \operatorname{ctg} \gamma - \frac{1}{2} \left(d - \frac{1}{d} \right) \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}; d \operatorname{ctg} \gamma + \frac{1}{2} \left(d - \frac{1}{d} \right) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Тоді для $d \in [d_1, d_2]$ отримуємо нерівність

$$D_*(d_1, d_2) \leq \operatorname{ctg} \tilde{\gamma} \leq D^*(d_1, d_2),$$

де $D_*(d_1, d_2), D^*(d_1, d_2)$ визначені у формулюванні теореми. Звідси можемо отримати, що повний діапазон зміни кута $\tilde{\gamma}$ при $\alpha \in [0, 2\pi), d \in [d_1, d_2]$ становитиме $[\tilde{\gamma}_{\min}(d_1, d_2), \tilde{\gamma}_{\max}(d_1, d_2)]$. Крім того, нерівності (37) гарантують для довільних $\alpha \in [0, 2\pi), d \in [d_1, d_2]$ виконання умов

$$(l-1)\pi < \mu |\tilde{\gamma}_{\min}| \leq \mu \tilde{\gamma} \leq \mu |\tilde{\gamma}_{\max}| < l\pi, \quad (39)$$

де параметр μ визначено у формулі (25). Тоді при кожному $\alpha \in [0, 2\pi), d \in [d_1, d_2]$ будуть справедливими умови леми 1 і задача (19), (20) має єдиний розв'язок у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha + \gamma))$.

Додатково з нерівностей (39) можемо отримати, що $\sin \mu \tilde{\gamma} \neq 0$ для $\tilde{\gamma} \in [\tilde{\gamma}_{\min}, \tilde{\gamma}_{\max}]$. Враховуючи характер поведінки функції $\sin t$ при $t \in ((l-1)\pi, l\pi)$, отримаємо нерівність $\min_{[\tilde{\gamma}_{\min}, \tilde{\gamma}_{\max}]} |\sin \mu \tilde{\gamma}| = \min\{|\sin \mu \tilde{\gamma}_{\min}|, |\sin \mu \tilde{\gamma}_{\max}|\}$. Тоді з нерівності (34) дістаємо апіорну оцінку (38).

5. Результати для задачі з довільними сталими коефіцієнтами. Нехай a, b, c – дійсні сталі, $\alpha, \gamma \in [0, 2\pi), \gamma \neq \pi$. Розглянемо крайову задачу Діріхле:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f(x, y), \quad \alpha < \arg(x, y) < \alpha + \gamma, \quad (40)$$

$$u|_{\arg(x,y)=\alpha} = g_\alpha(x, y), \quad u|_{\arg(x,y)=\alpha+\gamma} = g_{\alpha+\gamma}(x, y). \quad (41)$$

Будемо розглядати розв'язок u задачі (40) – (41) у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha + \gamma))$.

Від коефіцієнтів a, b, c будемо вимагати виконання умови еліптичності, а також додатності коефіцієнтів a, c . Ці вимоги можна записати у термінах нерівностей

$$4ac - b^2 > 0, \quad a > 0. \quad (42)$$

Доведемо ряд теорем про розв'язність та існування апіорної оцінки для розв'язку задачі (40), (41).

Теорема 1. Нехай праві частини задачі (40), (41) задовольняють умову (3), а для коефіцієнтів a, b, c виконана умова (42). Позначимо

$$d = \sqrt{\frac{a+c - \operatorname{sign}(a-c)\sqrt{b^2+(a-c)^2}}{a+c + \operatorname{sign}(a-c)\sqrt{b^2+(a-c)^2}}}, \quad (43)$$

і нехай величина $\tilde{\gamma}$ визначена за допомогою формули

$$\tilde{\gamma} = \operatorname{arccctg} \left(\frac{d^2 \operatorname{ctg}(\alpha + \beta + \gamma) \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) + 1}{d(\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) - \operatorname{ctg}(\alpha + \beta + \gamma))} \right) + \pi \left[\frac{\gamma}{\pi} \right], \quad (44)$$

де

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{arccctg} \frac{b}{c-a}, & c \neq a, \\ \frac{\pi}{4}, & c = a. \end{cases} \quad (45)$$

Тоді з виконання умови (25) випливає існування та єдиність розв'язку задачі (40), (41) у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha + \gamma))$, а також виконання для розв'язку апіорної оцінки

$$\|u\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(2+k)} \leq \frac{C_{15}(a,b,c,k,\delta,\gamma)}{|\sin \mu \tilde{\gamma}|} \left(\|f\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(k)} + \|g\|_{2,\delta,\partial K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)} \right),$$

причому залежність C_{15} від змінних a, b, c буде неперервною на множині коефіцієнтів $\{a \geq c\}$ або на множині $\{a \leq c\}$.

Доведення: Зробимо у задачі (40), (41) заміну

$$\xi = x \cos \beta - y \sin \beta, \quad \eta = x \sin \beta + y \cos \beta. \quad (46)$$

Тоді рівняння (40) набуде вигляду

$$\begin{aligned} & (a+c+(a-c)\cos 2\beta - b\sin 2\beta)u_{\xi\xi} + 2((a-c)\sin 2\beta + b\cos 2\beta)u_{\xi\eta} + \\ & + (a+c-(a-c)\cos 2\beta + b\sin 2\beta)u_{\eta\eta} = F(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (47)$$

де $F(\xi, \eta)$ – функція, яка виникає з функції $f(x, y)$ внаслідок виконання заміни (46) та множення на 2.

Нехай кут β у заміні (46) визначено рівністю (45). Тоді рівняння (47) набуде вигляду

$$\left(a+c+\operatorname{sign}(a-c)\sqrt{b^2+(a-c)^2} \right) u_{\xi\xi} + \left(a+c-\operatorname{sign}(a-c)\sqrt{b^2+(a-c)^2} \right) u_{\eta\eta} = F(\xi, \eta),$$

а крайову задачу (40), (41) можна переписати у формі

$$u_{\xi\xi} + \frac{a+c-\operatorname{sign}(a-c)\sqrt{b^2+(a-c)^2}}{a+c+\operatorname{sign}(a-c)\sqrt{b^2+(a-c)^2}} u_{\eta\eta} = F(\xi, \eta), \quad \alpha + \beta < \arg(x, y) < \alpha + \beta + \gamma, \quad (48)$$

$$u|_{\arg(\xi,\eta)=\alpha+\beta} = G_{\alpha+\beta}(\xi, \eta), \quad U|_{\arg(\xi,\eta)=\alpha+\beta+\gamma} = G_{\alpha+\beta+\gamma}(\xi, \eta), \quad (49)$$

де $G_{\alpha+\beta}(\xi, \eta)$, $G_{\alpha+\beta+\gamma}(\xi, \eta)$ – функції, які виникають відповідно з функцій $g_a(x, y)$, $g_{a+\gamma}(x, y)$ внаслідок виконання заміни.

Введення позначення (43) зводить крайову задачу (48), (49) до вигляду, аналогічного вигляду задачі (19), (20). Тому з леми 1 випливає твердження стосовно існування та єдиності розв'язку задачі (48), (49) та наявності для нього апіорної оцінки (27) у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma))$. Нескладно переконатись у тому, що на множині $\{a \geq c\}$ або на множині $\{a \leq c\}$ залежність коефіцієнта d , визначеного за допомогою формули (43), від коефіцієнтів a, b, c , буде неперервною. Враховуючи також те, що заміна (46) є заміною повороту координат і не змінює значення норм функцій у (27), отримуємо твердження теореми відносно апіорної оцінки.

Теорема 2. Нехай праві частини задачі (40), (41) задовольняють умову (3), а для коефіцієнтів a, b, c виконана умова (42). Нехай величина d визначена за допомогою (43), а величини $\tilde{\gamma}_{\min}, \tilde{\gamma}_{\max}$ – з формул (32). Нехай при деякому натуральному l , такому, що $l < \frac{\tilde{\gamma}_{\max}}{\tilde{\gamma}_{\max} - \tilde{\gamma}_{\min}}$, справедливі нерівності (33).

Тоді для довільного $\alpha \in [0, 2\pi)$ у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha + \gamma))$ існує єдиний розв'язок задачі (40), (41), для якого виконана апіорна оцінка

$$\|u\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(2+k)} \leq \frac{C_{16}(a,b,c,k,\delta,\tilde{\gamma}_{\min},\tilde{\gamma}_{\max})}{\min\{|\sin \mu \tilde{\gamma}_{\min}|, |\sin \mu \tilde{\gamma}_{\max}|\}} \left(\|f\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(k)} + \|g\|_{2,\delta,\partial K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)} \right),$$

причому залежність C_{16} буде неперервною на множині коефіцієнтів $\{a \geq c\}$ або на множині $\{a \leq c\}$.

Доведення. Після виконання у задачі (40), (41) заміни (46) за умови (45) можемо отримати задачу (48), (49). Після цього твердження теореми є наслідком леми 2.

Теорема 3. Нехай праві частини задачі (40), (41) задовольняють умову (3), а для коефіцієнтів a, b, c виконана умова (42).

Припустимо, що коефіцієнти a, b, c змінюються в замкненій обмеженій множині, яка є підмножиною множини $\{a \geq c\}$ або $\{a \leq c\}$, при цьому величина d , визначена за допомогою (43), приймає значення з проміжку $[d_1, d_2]$.

Нехай величини $\tilde{\gamma}_{\min}(d_1, d_2), \tilde{\gamma}_{\max}(d_1, d_2)$ визначені з формул (36) і задовольняють умову (37) при деякому натуральному l , такому, що $l < \frac{\tilde{\gamma}_{\max}(d_1, d_2)}{\tilde{\gamma}_{\max}(d_1, d_2) - \tilde{\gamma}_{\min}(d_1, d_2)}$.

Тоді для довільного $\alpha \in [0, 2\pi)$ у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha + \gamma))$ існує єдиний розв'язок задачі (40), (41), для якого виконана апріорна оцінка

$$\|u\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(2+k)} \leq \frac{C_{17}(k, \delta, d_1, d_2, \tilde{\gamma}_{\min}, \tilde{\gamma}_{\max})}{\min\{|\sin \mu \tilde{\gamma}_{\min}|, |\sin \mu \tilde{\gamma}_{\max}|\}} \left(\|f\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(k)} + \|g\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(\frac{3}{2}+k)} \right),$$

причому залежність C_{17} буде неперервною на множині коефіцієнтів $\{a \geq c\}$ або на множині $\{a \leq c\}$.

Доведення. Після виконання у задачі (40), (41) заміни (45) за умови (47) можемо отримати задачу (48), (49). Після цього твердження теореми є наслідком леми 3.

6. Висновки. Лінійні еліптичні задачі в областях з кутовими та кінчними точками на нинішній момент досить добре досліджені. Однак істотною перешкодою у розповсюдженні результатів стосовно розв'язності еліптичних задач на нелінійні задачі є відсутність зручних для застосування апріорних оцінок розв'язків цих задач. Результати даної роботи, хоча й отримані для найпростішого випадку, дозволяють говорити про можливість встановлення таких оцінок, а також уточнюють доведені іншими дослідниками апріорні оцінки розв'язку.

Отримані твердження дають підставу говорити про можливість розповсюдження отриманих результатів принаймні на випадок задачі з кутовою точкою у просторах розмірності більше, ніж 2. Цілком можливо, що техніка отримання подібних оцінок у задачах з кінчною точкою буде суттєво відрізнятись від наведеної у даній роботі.

1. Джафаров Р.М. Весовые априорные оценки решения квазилинейной задачи Дирихле в области с конической точкой // Труды ИПММ НАН Украины. – 1998. – Т. 2. – С. 55-63. 2. Коваленко О.В. Априорна оцінка розв'язку лінійної еліптичної крайової задачі в області з кінчною точкою // Вісн. Київ. ун-ту. Математика. Механіка. – 2005. – Вип. 13 – 14. – С. 25 – 29. 3. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Труды Моск. мат. о-ва. -1967. – Т. 16. – с. 209 – 292. 4. Мазья В.Г. Оценки L_p – средних и асимптотика решений эллиптических краевых задач в конусе. II. Операторы с переменными коэффициентами // Mathematische Nachrichten. – 1988. – Bd 137. – S. 113 – 139. 5. Мазья В.Г., Платневский Б.А. Об асимптотике фундаментальных решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Проблемы матем. анализа. – 1979. – Вып. 7. – с. 100 – 145. 6. Фуфаев В.В. К задаче Дирихле для областей с углами // ДАН. – 1960. – Т. 131, № 1. – с. 37 – 39.

Надійшла до редколегії 16.03.09

УДК 517.943

П. Самусенко, канд.фіз.-мат.наук, доц.
E-mail: psamusenko@ukr.net

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ І ВИРОДЖЕННЯМ У ТОЧЦІ

У роботі побудовано асимптотичний розв'язок основної початкової задачі для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням аргументу і виродженням у точці.

The asymptotic solution of the initial-value problem for the singularly perturbed systems of the delay differential equations with degeneration in a point is constructed in work.

Вступ

Системи диференціальних рівнянь з малим запізненням аргументу розглядалися в роботах Ю.О. Рябова, А. Халаяна, А.М. Родіонова, Дж. Като, А.Б. Васильєвої, В.І. Рожкова тощо. Зокрема, А.М. Родіонов [3] побудував асимптотичне розв'язання розв'язку початкової задачі за степенями малого запізнення. Аналогічне твердження для систем диференціальних рівнянь з малим відхиленням отримала А.Б. Васильєва [1, с. 246-266]. Поведінку розв'язків у випадку, коли запізнення $\tau = \tau(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ досліджував К. Кук [6].

Лінійні системи диференціальних рівнянь із запізненням аргументу розглядалися С.Ф. Фещенком та М.І. Шкілем [5]. А саме, використовуючи метод кроків, у випадку сталого запізнення вони розв'язали основну початкову задачу. Більше того, С.Ф. Фещенко та М.І. Шкіль розробили алгоритм побудови асимптотичного розв'язку регулярно збуреної системи диференціальних рівнянь, який може застосовуватись і за умови змінного запізнення аргументу.

Об'єкт та методи досліджень

У даній роботі досліджується основна початкова задача

$$\varepsilon B(t) \frac{dx}{dt} = f(x(t, \varepsilon), x(t - \varepsilon, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad t \in [\varepsilon; T], \quad (1)$$

$$x_{|_{0 \leq t \leq \varepsilon}} = \varphi(t), \quad (2)$$

де $B(t)$ – квадратна матриця n -го порядку, $f(x(t, \varepsilon), x(t - \varepsilon, \varepsilon), t, \varepsilon)$ та $\varphi(t)$ – вектор-функції розмірності n , $x(t, \varepsilon)$ – шукана n -вимірна вектор-функція, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $0 \leq \varepsilon_0 \ll 1$.

Нехай мають місце умови:

- 1) $B(t) \in C_{[0; T]}^\infty$;
 - 2) вектор-функція $f(x, [x], t, \varepsilon)$ ($[x(t) = x(t - \varepsilon)]$) має нескінченну кількість неперервних частинних похідних за всіма змінними на множині $G = \{x, [x], t, \varepsilon : \|x\| \leq a, \|[x]\| \leq a, 0 \leq t \leq T, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$, $\|\varphi(t)\| < a$, $t \in [0; \varepsilon_0]$;
 - 3) $\varphi(t) \in C_{[0; \varepsilon]}^\infty$;
 - 4) рівняння $f(x, x, t, 0) = 0$ на множині $D = \{x, x, t : \|x\| \leq a, 0 \leq t \leq T\}$ має неперервний розв'язок $x = \psi(t)$;
 - 5) в'язка матриць $f_x(\psi(0), \psi(0), 0, 0) - \lambda B(0)$, де $f_x(\psi(0), \psi(0), 0, 0)$ – квадратна матриця n -го порядку, стовпцями якої є $\frac{\partial f_i(x, [x], 0, 0)}{\partial x_j} \Big|_{(x, [x], t) = (\psi(0), \psi(0), 0)}$, $i, j = \overline{1, n}$ – регулярна, має $n - 1$ простих "скінченних" і один "нескінчений" елементарних дільників;
 - 6) $f_{[x]}(\psi(0), \psi(0), 0, 0) = 0$;
 - 7) $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = \overline{1, n - 1}$, де λ_i – власні значення матриці $f_x(\psi(0), \psi(0), 0, 0)$ відносно $B(0)$.
- Тоді існуватимуть неособливі матриці $P(t)$ та $Q(t)$ такі, що

$$P(t)(f_x(\psi(t), \psi(t), t, 0) + f_{[x]}(\psi(t), \psi(t), t, 0))Q(t) = \Omega(t), \quad P(t)B(t)Q(t) = H(t),$$

$$\text{де } \Omega(t) = \begin{pmatrix} \omega_1(t) & 0 \\ 0 & \Omega_2(t) \end{pmatrix}, \quad H(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) & 0 \\ 0 & H_2(t) \end{pmatrix}, \quad \Omega_0 \equiv \Omega(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}, \quad H_0 \equiv H(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix},$$

$W = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}\}$, E_{n-1} – одинична матриця $(n - 1)$ -го порядку. Не обмежуючи загальності вважатимемо, що

$$f_x(\psi(t), \psi(t), t, 0) + f_{[x]}(\psi(t), \psi(t), t, 0) = \Omega(t), \quad B(t) = H(t).$$

Розв'язок задачі (1), (2) шукатимемо у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t, \varepsilon) + \Pi x(\tau, \varepsilon), \tag{3}$$

де $\bar{x}(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \bar{x}_s(t)$ – регулярний ряд, а $\Pi x(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_s x(\tau)$ – примежевий ряд, $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ [1, с. 248].

Запишемо $f(x(t, \varepsilon), [x(t, \varepsilon)], t, \varepsilon)$ у вигляді

$$f(x(t, \varepsilon), [x(t, \varepsilon)], t, \varepsilon) = f(\bar{x}(t, \varepsilon), [\bar{x}(t, \varepsilon)], t, \varepsilon) + f(\bar{x}(\varepsilon\tau, \varepsilon) + \Pi x(\tau, \varepsilon), [\bar{x}(\varepsilon\tau, \varepsilon) + \Pi x(\tau, \varepsilon)], \varepsilon\tau, \varepsilon) - f(\bar{x}(\varepsilon\tau, \varepsilon), [\bar{x}(\varepsilon\tau, \varepsilon)], \varepsilon\tau, \varepsilon) \equiv \bar{f}(t, \varepsilon) + \Pi f(\tau, \varepsilon)$$

і розкладемо вектор-функції $\bar{f}(t, \varepsilon)$ та $\Pi f(\tau, \varepsilon)$ у формальні ряди за степенями ε :

$$\bar{f}(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \bar{f}_s(t), \quad \Pi f(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_s f(\tau).$$

Тут, зокрема,

$$\bar{f}_0(t) = f(\bar{x}_0(t), \bar{x}_0(t), t, 0), \quad \bar{f}_s(t) = (\bar{f}_x(t) + \bar{f}_{[x]}(t))\bar{x}_s(t) + f_s(t), \quad s = 1, 2, \dots,$$

$$\Pi_0 f(\tau) = f(\bar{x}_0(0) + \Pi_0 x(\tau), \bar{x}_0(0) + [\Pi_0 x(\tau)], 0, 0) - f(\bar{x}_0(0), \bar{x}_0(0), 0, 0)$$

$$\Pi_s f(\tau) = f_x(\tau)\Pi_s x(\tau) + f_{[x]}(\tau)[\Pi_s x(\tau)] + F_s(\tau), \quad s = 1, 2, \dots,$$

елементи матриць $\bar{f}_x(t)$, $\bar{f}_{[x]}(t)$ та $f_x(\tau)$, $f_{[x]}(\tau)$ обчислюються в точках $(\bar{x}_0(t), \bar{x}_0(t), t, 0)$ та $(\bar{x}_0(0) + \Pi_0 x(\tau), \bar{x}_0(0) + [\Pi_0 x(\tau)], 0, 0)$ відповідно; вектор-функції $f_s(t)$ та $F_s(\tau)$ певним чином виражаються через $\bar{x}_i(t)$, $[\bar{x}_i(t)]$ та $\Pi_i x(\tau)$, $[\Pi_i x(\tau)]$, $i < s$.

Підставимо ряд (3) до системи (1) і зрівняємо окремо вирази, що залежать від t і τ :

$$\varepsilon B(t) \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(t, \varepsilon), \quad t \in [\varepsilon; T], \tag{4}$$

$$B(\varepsilon\tau) \frac{d\Pi x}{d\tau} = \Pi f(\tau, \varepsilon), \quad \tau \geq 1. \tag{5}$$

Початкова умова (2) при цьому набуде вигляду $\bar{x}(t, \varepsilon)|_{0 \leq t \leq \varepsilon} + \Pi x(\tau, \varepsilon)|_{0 \leq \tau \leq 1} = \varphi(t)$. Звідси

$$\begin{aligned} & (\Pi_0 x(\tau) + \varepsilon \Pi_1 x(\tau) + \dots)_{|_{0 \leq \tau \leq 1}} = \varphi(\varepsilon \tau) - \bar{x}_0(\varepsilon \tau) - \varepsilon \bar{x}_1(\varepsilon \tau) - \dots = \\ & = (\varphi(0) - \bar{x}_0(0)) + \varepsilon(\varphi'(0)\tau - \bar{x}'_0(0)\tau - \bar{x}_1(0)) + \dots + \varepsilon^s \left(\frac{\varphi^{(s)}(0)}{s!} \tau^s - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\bar{x}_k^{(s-k)}(0)}{(s-k)!} \tau^{s-k} - \bar{x}_s(0) \right) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

У тотожностях (4), (5) зрівняємо коефіцієнти біля однакових степенів ε . Зокрема, при ε^0 матимемо:

$$f(\bar{x}_0(t), \bar{x}_0(t), t, 0) = 0,$$

$$H_0 \frac{d\Pi_0 x(\tau)}{d\tau} = f(\bar{x}_0(0) + \Pi_0 x(\tau), \bar{x}_0(0) + [\Pi_0 x(\tau)]_0, 0) - f(\bar{x}_0(0), \bar{x}_0(0), 0, 0).$$

Звідси $\bar{x}_0(t) = \psi(t)$, $t \in [0; T]$, і тому

$$H_0 \frac{d\Pi_0 x(\tau)}{d\tau} = f(\psi(0) + \Pi_0 x(\tau), \psi(0) + [\Pi_0 x(\tau)]_0, 0). \quad (7)$$

Надалі припускати:

8) $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$, де $\varphi_1(0)$ та $\psi_1(0)$ – перші компоненти векторів $\varphi(0)$ та $\psi(0)$ відповідно;

9) функція $f_1(x, [x], t, \varepsilon)$ не містить x_2, x_3, \dots, x_n ;

10) система (7) має розв'язок $\Pi_0 x = \Pi_0 x(\tau)$, $\tau \geq 1$, такий, що $\Pi_0 x(1) = \varphi(0) - \psi(0)$ і $\Pi_0 x(\tau) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$, причому $\|\psi(t) + \Pi_0 x(t/\varepsilon)\| < a$, $t \in [0; T]$.

З умов 8), 9) випливає, що $\Pi_{01} x(\tau) \equiv 0$, $\tau \geq 1$.

Останні $n-1$ рівнянь системи (7) запишемо наступним чином:

$$\frac{d\Pi_{02} x(\tau)}{d\tau} = W\Pi_{02} x(\tau) + G_2(\Pi_0 x(\tau), [\Pi_0 x(\tau)]), \quad \tau \geq 1, \quad (8)$$

де $G(\Pi_0 x(\tau), [\Pi_0 x(\tau)]) = f(\psi(0) + \Pi_0 x(\tau), \psi(0) + [\Pi_0 x(\tau)]_0, 0) - \Omega_0 \Pi_0 x(\tau)$ ($\Pi_{02} x(\tau)$ – вектор-функція, що містить $n-1$ останніх компонент $\Pi_0 x(\tau)$), $G_2(\Pi_0 x(\tau), [\Pi_0 x(\tau)])$ побудована аналогічно.

Використовуючи метод послідовних наближень, розв'яжемо систему (8) на кожному з піввідрізків $[l; l+1)$, $l = \overline{1, l_0 - 1}$. При цьому $\Pi_{02} x(0) = \varphi_2(0) - \psi_2(0)$. Покладемо $c_{l_0} = \lim_{\tau \rightarrow l_0} \Pi_{02} x(\tau)$ і $P = \sup_{l_0 - 1 \leq \tau < l_0} \|\Pi_{02} x(\tau)\|$.

Оскільки $\Pi_{02} x(\tau) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$, то вважатимемо, що $\max\{\|c_{l_0}\|, P\} < \delta$, де δ – довільне фіксоване число.

Зазначимо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існуватиме число $\eta(\varepsilon)$ таке, що

$$\|G(u, [\omega]) - G(v, [\omega])\| < \frac{\varepsilon}{k_0} \|u - v\| \quad \text{і} \quad \|G(u, v)\| < \frac{\varepsilon}{k_0} (\|u\| + \|v\|)$$

(число k_0 визначимо нижче) для всіх $\|u\| \leq \eta(\varepsilon)$, $\|v\| \leq \eta(\varepsilon)$, $\|[\omega]\| \leq \eta(\varepsilon)$.

Розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$\Pi_{02} x(\tau) = \exp(W(\tau - l_0))c_{l_0} + \int_{l_0}^{\tau} \exp(W(\tau - s))G_2(\Pi_0 x(s), [\Pi_0 x(s)])ds, \quad (9)$$

$\tau \in [l_0; l_0 + 1)$. Для розв'язання системи (10) скористаємось методом послідовних наближень. Нехай $\Pi_{02}^{(0)} x(\tau) = \exp(W(\tau - l_0))c_{l_0}$,

$$\Pi_{02}^{(k+1)} x(\tau) = \exp(W(\tau - l_0))c_{l_0} + \int_{l_0}^{\tau} \exp(W(\tau - s))G_2(\Pi_0^{(k)} x(s), [\Pi_0 x(s)])ds, \quad k = 0, 1, \dots \quad (10)$$

Тоді $\|\Pi_{02}^{(0)} x(\tau)\| \leq e^{\lambda(\tau - l_0)} \|c_{l_0}\|$, де $\lambda = \max\{\text{Re } \lambda_1, \dots, \text{Re } \lambda_{n-1}\}$. Число $k_0 > 1$ підберемо так, щоб

$$\frac{1}{k_0} (e^{\lambda(\tau - l_0)} \|c_{l_0}\| + P) \leq e^{\lambda(\tau - l_0)} \|c_{l_0}\|.$$

Тоді $\|\Pi_{02}^{(1)} x(\tau) - \Pi_{02}^{(0)} x(\tau)\| \leq \varepsilon e^{\lambda(\tau - l_0)} \|c_{l_0}\|$ і $\|\Pi_{02}^{(1)} x(\tau)\| \leq (1 + \varepsilon) e^{\lambda(\tau - l_0)} \|c_{l_0}\| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} e^{\lambda(\tau - l_0)} \|c_{l_0}\|$.

Вважатимемо, що $\frac{\delta}{1 - \varepsilon} < \eta(\varepsilon)$.

Припустимо, що $\|\Pi_{02}^{(k)} x(\tau) - \Pi_{02}^{(k-1)} x(\tau)\| \leq \varepsilon^k e^{\lambda(\tau - l_0)} \|c_{l_0}\|$ і $\|\Pi_{02}^{(k)} x(\tau)\| \leq (1 + \varepsilon + \dots + \varepsilon^k) e^{\lambda(\tau - l_0)} \|c_{l_0}\| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} e^{\lambda(\tau - l_0)} \|c_{l_0}\|$.

Тоді $\|\Pi_{02}^{(k+1)} x(\tau) - \Pi_{02}^{(k)} x(\tau)\| \leq \varepsilon^{k+1} e^{\lambda(\tau - l_0)} \|c_{l_0}\|$ і $\|\Pi_{02}^{(k+1)} x(\tau)\| \leq (1 + \varepsilon + \dots + \varepsilon^{k+1}) e^{\lambda(\tau - l_0)} \|c_{l_0}\| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} e^{\lambda(\tau - l_0)} \|c_{l_0}\|$.

Тому, використовуючи метод послідовних наближень, можна довести існування та єдиність розв'язку $\Pi_{02}x = \Pi_{02}x(\tau)$, $\tau \in [l_0; l_0 + 1)$, системи (9) такого, що $\|\Pi_{02}x(\tau)\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon} e^{\lambda(\tau-l_0)} \|c_{l_0}\|$, $\tau \in [l_0; l_0 + 1)$.

Покладемо $c_{l_0+1} = \lim_{\tau \rightarrow l_0+1} \Pi_{02}x(\tau)$. Тоді $\|c_{l_0+1}\| \leq \frac{e^\lambda}{1-\varepsilon} \|c_{l_0}\|$. Використовуючи метод послідовних наближень, можна аналогічно довести існування та єдиність розв'язку $\Pi_{02}x = \Pi_{02}x(\tau)$, системи (9) на піввідрізку $[l_0 + k; l_0 + k + 1)$. При цьому $\|\Pi_{02}x(\tau)\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \left(\frac{e^\lambda}{1-\varepsilon}\right)^k e^{\lambda(\tau-l_0-k)} \|c_{l_0}\|$, $\tau \in [l_0 + k; l_0 + k + 1)$, $k = 0, 1, \dots$

А тому для досить малого ε існуватимуть сталі $c^{(0)} > 0$ та κ_0 , $\lambda < \kappa_0 < 0$, такі, що $\|\Pi_0x(\tau)\| \leq c^{(0)} e^{\kappa_0\tau}$, $\tau \geq 1$.

Відповідну малість сталих ε та δ можна гарантувати вибором досить великого l_0 . Зазначимо, що за побудовою $\Pi_0x(\tau) \in C_{[1; \infty)}^\infty$.

У тотожностях (4), (5) зрівняємо коефіцієнти при ε^1 :

$$(\bar{f}_x(t) + \bar{f}_{[x]}(t))\bar{x}_1(t) = B(t) \frac{d\Psi(t)}{dt} - f_1(t), \quad H_0 \frac{d\Pi_1x(\tau)}{d\tau} = f_x(\tau)\Pi_1x(\tau) + a(\tau), \quad (11)$$

$$\text{де } a(\tau) = f_{[x]}(\tau)[\Pi_1x(\tau)] + F_1(\tau) - \tau \frac{dB(0)}{dt} \frac{d\Pi_0x(\tau)}{d\tau}.$$

З умов 6), 7) випливає, що $\det(\bar{f}_x(0) + \bar{f}_{[x]}(0)) \neq 0$. А тому $\bar{x}_1(t) = (\bar{f}_x(t) + \bar{f}_{[x]}(t))^{-1} \left(B(t) \frac{d\Psi(t)}{dt} - f_1(t) \right)$, $t \leq t_0 \leq T$.

Із системи (11) дістаємо

$$\Pi_{11}x(\tau) = -a_1(\tau), \quad (12)$$

$$\frac{d\Pi_{12}x(\tau)}{d\tau} = W\Pi_{12}x(\tau) + b(\tau), \quad (13)$$

де $\{b(\tau)\}_i = \sum_{l=1}^n (\{f_x(\tau)\}_{il} - \delta_{il}\lambda_i) \{\Pi_1x(\tau)\}_i + \{a(\tau)\}_i$, $i = \overline{2, n}$, δ_{ik} – символ Кронекера.

Звідси

$$\Pi_{12}x(\tau) = \exp(W(\tau-1))c_1 + \int_1^\tau \exp(W(\tau-s))b(s)ds, \quad \tau \geq 1. \quad (14)$$

Тоді, як і в попередньому випадку, можна показати, що система (12), (14) має єдиний розв'язок $\Pi_1x = \Pi_1x(\tau)$, $\tau \geq 1$. Зазначимо, що $\|\Pi_1x(\tau)\| \leq c^{(1)} e^{\kappa_1\tau}$, $\tau \geq 1$, $\lambda < \kappa_1 < 0$.

11) Нехай $\varphi'_1(0) - \psi'_1(0) + f_{\varepsilon 1}(\psi(0), \psi(0), 0, 0) = 0$.

Тоді сталу $c_1 > 0$ можна підібрати так, щоб мала місце рівність $\Pi_1x(1) = \varphi'_1(0) - \psi'_1(0) - \bar{x}_1(0)$.

Зрівнюючи коефіцієнти біля ε^s , $s \geq 1$, приходимо до умови:

$$12) \Pi_{s1}x(1) = \frac{\varphi_1^{(s)}(0)}{s!} - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\bar{x}_{k1}^{(s-k)}(0)}{(s-k)!} - \bar{x}_{s1}(0), \quad s \geq 1.$$

Тоді сталу c_k , що виникає під час інтегрування, можна підібрати так, щоб

$$\Pi_{s1}x(1) = \frac{\varphi_1^{(s)}(0)}{s!} - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\bar{x}_{k1}^{(s-k)}(0)}{(s-k)!} - \bar{x}_{s1}(0), \quad s \geq 1.$$

Зазначимо, що умови 11), 12) матимуть місце якщо, наприклад, $\varphi_1(t) = \psi_1(t) = const$, $t \geq \varepsilon$, $f_{1\varepsilon}(\psi(t), \psi(t), t, \varepsilon) \equiv 0$, $t \in [0; t_0]$, $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$.

За побудовою, $\|\Pi_{s1}x(\tau)\| \leq c^{(s)} e^{\kappa_s\tau}$, $\tau \geq 1$, $\lambda < \kappa_s < 0$, $s = 2, 3, \dots$

Покажемо, що побудований формальний розв'язок (3) є рівномірним асимптотичним розв'язком "точного" розв'язку задачі (1), (2) на відрізку $[0; t_0]$, $t_0 \leq T$.

Для цього в системі (1) зробимо заміну

$$x(t, \varepsilon) = x_m(t, \varepsilon) + y(t, \varepsilon), \quad (15)$$

де $x_m(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^m \varepsilon^s (\bar{x}_s(t) + \Pi_sx(\tau))$, а $y(t, \varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція. Дістанемо

$$\varepsilon B(t) \frac{dy}{dt} = g(y(t, \varepsilon), [y(t, \varepsilon)]_t, t, \varepsilon), \quad (16)$$

де $g(y(t, \varepsilon), [y(t, \varepsilon)]_t, t, \varepsilon) = f(x_m(t, \varepsilon) + y(t, \varepsilon), [x_m(t, \varepsilon) + y(t, \varepsilon)]_t, t, \varepsilon) - \varepsilon B(t) \frac{dx_m(t, \varepsilon)}{dt}$.

За побудовою $\|g(0,0,t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{m+1})$, $t \in [0; t_0]$. При цьому

$$y(t, \varepsilon)_{0 \leq t \leq \varepsilon} = O(\varepsilon^{m+1}). \tag{17}$$

Нехай θ_i , $i = \overline{1, n-1}$, – власні вектори матриці Ω_0 відносно H_0 , $\tilde{\theta}$, ξ_i , $i = \overline{1, n-1}$, та $\tilde{\xi}$ – елементи нуль-простору матриць H_0 , $(\Omega_0 - \lambda_i H_0)^*$ та H_0^* відповідно. Вважатимемо, що

$$(H_0 \theta_i, \xi_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n-1}, \quad (\Omega_0 \tilde{\theta}, \tilde{\xi}) = 1$$

[4, с. 32]. Зауважимо, що вектори θ_i , $i = \overline{1, n-1}$, $\tilde{\theta}$, та ξ_i , $i = \overline{1, n-1}$, $\tilde{\xi}$ – лінійно незалежні на відрізку $[0; T]$.

За умов, накладених на матриці H_0 та Ω_0 , система $\varepsilon H_0 \frac{dy}{dt} = \Omega_0 y$, має $n-1$ формальних лінійно незалежних розв'язків $y_i(t, \varepsilon) = \theta_i \exp\left(\frac{t}{\varepsilon} \lambda_i\right)$, $i = \overline{1, n-1}$.

Утворимо матриці $P_1 = [\Xi, \tilde{\xi}]^*$, $Q_1 = [\Theta, \tilde{\theta}]$, де $\Xi = [\xi_1, \dots, \xi_{n-1}]$, $\Theta = [\theta_1, \dots, \theta_{n-1}]$. У системі (16) покладемо

$$y(t, \varepsilon) = Q_1 z(t, \varepsilon) \tag{18}$$

і домножимо її обидві частини зліва на P_1 :

$$\varepsilon P_1 B(t) Q_1 \frac{dz}{dt} = P_1 \Omega_0 Q_1 z + h(z, [z], t, \varepsilon), \tag{19}$$

$$h(z, [z], t, \varepsilon) = P_1 g(Q_1 z, [Q_1 z], t, \varepsilon) - P_1 \Omega_0 Q_1 z.$$

Оскільки $\Xi^* \Omega_0 \Theta = W$, $\tilde{\xi}^* \Omega_0 \tilde{\theta} = 0$ та $\Xi^* \Omega_0 \tilde{\theta} = 0$, то система (19) набуде вигляду

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \Xi^* B(t) \Theta & \Xi^* B(t) \tilde{\theta} \\ \tilde{\xi}^* B(t) \Theta & \tilde{\xi}^* B(t) \tilde{\theta} \end{pmatrix} \frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u + h(z, [z], t, \varepsilon). \tag{20}$$

Доведемо існування та єдиність розв'язку системи (20) такого, що

$$z(\varepsilon, \varepsilon) = Q_1^{-1}(\varphi(\varepsilon) - x_m(\varepsilon, \varepsilon)). \tag{21}$$

Для цього розглянемо рівняння

$$z(t, \varepsilon) = V(t, \varepsilon) V^{-1}(\varepsilon, \varepsilon) Q_1^{-1}(\varphi(\varepsilon) - x_m(\varepsilon, \varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^t V(t, \varepsilon) V^{-1}(s, \varepsilon) l(z(s, \varepsilon), [z(s, \varepsilon)], s, \varepsilon) ds, \tag{22}$$

де $V(t, \varepsilon)$ – фундаментальна матриця системи

$$\varepsilon \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \tilde{\xi}^* B(t) \tilde{\theta} \end{pmatrix} \frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z,$$

$$l(z, [z], s, \varepsilon) = (P_1 B(s) Q_1)^{-1} \left(-\varepsilon \begin{pmatrix} \Xi^* (B(s) - B(0)) \Theta & \Xi^* B(s) \tilde{\theta} \\ \tilde{\theta}^* B(s) \Theta & 0 \end{pmatrix} V'(s, \varepsilon) V^{-1}(s, \varepsilon) z + h(z, [z], s, \varepsilon) \right).$$

Надалі припускаємо виконання умов:

13) $\tilde{\xi}^* B(t) \tilde{\theta} = td(t)$, причому $d(0) < 0$;

14) $|b_{i1}(t)| + |b_{ij}(t)| = O(t^2)$, $i, j = \overline{2, n}$, $b_{ij}(t)$ – компоненти матриці $B(t)$.

Тоді, використовуючи метод послідовних наближень, можна показати, що рівняння (22) на відрізку $[\varepsilon; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $z = z(t, \varepsilon)$ для якого правильна рівність (21), причому $\|z(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^m)$.

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1) – 14). Тоді для всіх $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ на відрізку $[\varepsilon; t_0]$, $t_0 \leq T$, існує єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$ задачі (1), (2), такий, що

$$\|x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^m). \tag{23}$$

Розглянемо випадок, коли умова 7) не виконується. Припустимо, що:

15) рівняння $f(x, x, t, 0) = 0$ на множині D має нескінченно диференційовний розв'язок $x = \psi(t, \alpha)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-m})$, α_i , $i = \overline{1, n-m}$, – деякі параметри;

16) в'язка матриць $f_x(\psi(t, \alpha), \psi(t, \alpha), t, 0) + f_{[x]}(\psi(t, \alpha), \psi(t, \alpha), t, 0) - \lambda B(t)$, $t \in (0; T]$ має n "скінченних" елементарних дільників;

17) $\text{Re} \lambda_i(t) < 0$, $t \in (0; T]$; $\text{Re} \lambda_i(t) \leq 0$, $t \in [0; T]$, і $\lambda_i(0) \neq 0$, $i = \overline{2, m}$; $\lambda_i(t) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{m+1, n}$, де $\lambda_i(t)$ – власні значення матриці $f_x(\psi(t, \alpha), \psi(t, \alpha), t, 0) + f_{[x]}(\psi(t, \alpha), \psi(t, \alpha), t, 0)$ відносно $B(t)$.

Розв'язок задачі (1), (2) шукатимемо у вигляді (3), причому $\bar{x}(t, \varepsilon) = \bar{x}_0(t) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \bar{x}_s(t, \varepsilon)$.

Нехай

$$\begin{aligned} \bar{f}(t, \varepsilon) &= f(\bar{x}_0(t), \bar{x}_0(t), t, 0) + \varepsilon(\bar{f}_x(0)\bar{x}_1(t, \varepsilon) + f_1(t, \varepsilon)) + \dots + \\ &+ \varepsilon^s(\bar{f}_x(0)\bar{x}_s(t, \varepsilon) + f_s(t, \varepsilon)) + \dots \equiv \bar{f}_0(t) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \bar{f}_s(t, \varepsilon), \\ f_s(t, \varepsilon) &= \frac{\bar{f}_x(t) - \bar{f}_x(0)}{\varepsilon} \bar{x}_{s-1}(t, \varepsilon) + \frac{\bar{f}_{[x]}(t)}{\varepsilon} \bar{x}_{s-1}(t, \varepsilon) + \tilde{f}_s(t, \varepsilon), \quad s \geq 2, \end{aligned}$$

$f_1(t, \varepsilon) = \tilde{f}_1(t, \varepsilon)$; вектори $\tilde{f}_s(t, \varepsilon)$ певним чином виражаються через $\bar{x}_i(t, \varepsilon)$, $i < s$.

Задачу (1), (2) розглядатимемо на відрізку $[\varepsilon; k\varepsilon]$, число k визначимо нижче. Зазначимо, що $\bar{x}_0(t) = \psi(t, \alpha)$, $t \in [0; T]$, а $\Pi_s x(\tau)$, $s \geq 0$, будуються аналогічно до попереднього випадку. Припускаючи виконання раніше наведених умов, вважатимемо, що $\psi(t) = \psi(t, \alpha(t))$.

Для визначення $\bar{x}_s(t, \varepsilon)$, $s \geq 1$, в системі (4) зрівняємо коефіцієнти біля ε^s . Зокрема, біля ε^1 матимемо:

$$\Omega_0 \bar{x}_1(t, \varepsilon) = B(t) \frac{d\bar{x}_0(t)}{dt} - f_1(t, \varepsilon). \tag{24}$$

Система (24) сумісна тоді і тільки тоді, коли $R \left(B(t) \frac{d\bar{x}_0(t)}{dt} - f_1(t, \varepsilon) \right) = 0$, або $RB(t)\psi_\alpha(t, \alpha(t)) \frac{d\alpha}{dt} = Rf_1(t, \varepsilon)$,

де $R - ((n-m) \times n)$ -матриця, рядками якої є власні вектори матриці Ω_0^* , що відповідають нульовому власному значенню. За побудовою $\det(RB(t)\psi_\alpha(t, \alpha(t))) \neq 0$, $t \in [\varepsilon; k\varepsilon]$. А тому матимемо

$$\frac{d\alpha}{dt} = (RB(t)\psi_\alpha(t, \alpha(t)))^{-1} Rf_1(t, \varepsilon). \tag{25}$$

18) Нехай система (25) має розв'язок $\alpha = \alpha(t)$, $t \in [0; k\varepsilon]$, такий, що $\|\psi(t, \alpha(t)) + \Pi_0 x(t, \varepsilon)\| < a$, $t \in [0; k\varepsilon]$.

Тоді $\bar{x}_1(t, \varepsilon) = \psi_\alpha(0, \alpha(0))\beta(t) + \tilde{x}_1(t, \varepsilon)$, де $\beta(t)$ – поки що довільна $(n-m)$ -вимірний вектор-функція, а $\tilde{x}_1(t, \varepsilon)$ – деякий частинний розв'язок системи (24).

З умови 11) випливає існування сталих c_1 та $\beta(0) = \beta_0$ таких, що $\Pi_1 x(1) = \varphi'(0) - \psi'(0, \alpha(0)) - \bar{x}_1(0, \varepsilon)$.

При цьому функція $\beta = \beta(t)$, $t \in [0; k\varepsilon]$, для якої $\beta(0) = \beta_0$, визначатиметься з лінійної системи диференціальних рівнянь. На s -му кроці вираз для $\bar{x}_s(t, \varepsilon)$ міститиме довільну $(n-m)$ -вимірну вектор-функцію $\gamma(t)$. Умова 12) дозволяє відповідним чином визначити $\gamma(0) = \gamma_0$, а потім з умови сумісності для $\bar{x}_{s+1}(t, \varepsilon)$ отримати лінійну систему, звідки знайти $\gamma = \gamma(t)$.

Зазначимо, що число k , $k > 1$, можна підібрати так, щоб рівняння (22) мало єдиний розв'язок $z = z(t, \varepsilon)$, $t \in [\varepsilon; k\varepsilon]$, причому $\|z(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^m)$.

Теорема 2. Нехай виконуються умови 1) – 3), 5), 6), 8) – 13), 15) – 18). Тоді для всіх $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ на відрізку $[\varepsilon; k\varepsilon]$, $k > 1$, існує єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$ задачі (1), (2) такий, що має місце оцінка (23).

Розглянемо тепер систему (1) на відрізку $[k\varepsilon; t_0]$, $t_0 \leq T$. Нехай

$$x(k\varepsilon, \varepsilon) = x_\varepsilon, \tag{26}$$

x_ε побудований за формулами (15), (18), (22) при $t = k\varepsilon$.

Розв'язок системи (1) на відрізку $[k\varepsilon; t_0]$ шукатимемо у вигляді $x(t, \varepsilon) = \bar{x}_0(t) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s x_s(t)$. Як і раніше, підставляючи ряд $x(t, \varepsilon)$ до системи (1) і зрівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів ε , дістаємо

$$\begin{aligned} f(\bar{x}_0(t), \bar{x}_0(t), t, 0) &= 0, \\ (\bar{f}_x(t) + \bar{f}_{[x]}(t))x_s(t) &= B(t) \frac{dx_{s-1}(t)}{dt} - f_s(t), \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{27}$$

Нехай $F(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) & F_2(t) \\ F_3(t) & F_4(t) \end{pmatrix} \equiv \bar{f}_x(t) + \bar{f}_{[x]}(t)$, де $F_1(t)$ – квадратна матриця m -го порядку. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що $\det F_1(t) \neq 0$, $t \in [k\varepsilon; t_0]$, $t_0 \leq T$.

Система (27) при $s = 1$ сумісна тоді і тільки тоді, коли

$$K^*(t)B(t)\psi_\alpha(t, \alpha) \frac{d\alpha}{dt} = K^*(t)f_1(t), \tag{28}$$

де $K(t) = \begin{pmatrix} (F_3(t)F_1^{-1}(t))^* \\ -E_{n-m} \end{pmatrix}$.

Як і в [2, с. 12] можна показати, що $\det(K^*(t)B(t)\Psi_\alpha(t, \alpha)) \neq 0, t \in [k\varepsilon; t_0]$. Більше того, якщо $\|F_1^{-1}(t)F_2(t)\| = O(t)$ і $\|F_3(t)F_1^{-1}(t)\| = O(1), t \in [k\varepsilon; t_0]$, або $\|F_1^{-1}(t)F_2(t)\| = O(1)$ і $\|F_3(t)F_1^{-1}(t)\| = O(t), t \in [k\varepsilon; t_0]$, то враховуючи структуру матриці $K^*(t)B(t)\Psi_\alpha(t, \alpha)$, існуватиме стала $c > 0$ така, що $\det(K^*(t)B(t)\Psi_\alpha(t, \alpha)) \geq c, t \in [k\varepsilon; t_0]$.

19) Нехай система (28) має розв'язок $\alpha = \alpha(t), t \in [k\varepsilon; t_0]$, для якого $\|\Psi(t, \alpha(t))\| < a, t \in [k\varepsilon; t_0]$.

Тоді $x_1(t) = \Psi_\alpha(t, \alpha)\alpha_1(t) + \tilde{x}_1(t)$, де $\alpha_1(t)$ – поки що невизначена $(n - m)$ -вимірний вектор-функція, а $\tilde{x}_1(t)$ – деякий частинний розв'язок системи (27) при $s = 1$.

Аналогічно можна довести сумісність систем (27) для $s \geq 2$.

20) Нехай $\|x_s(t)\| = O(1), t \in [k\varepsilon; t_0], s \geq 1$.

Зробивши в системі (1) заміну (15), де $x_m(t, \varepsilon) = \bar{x}_0(t) + \sum_{s=1}^m \varepsilon^s x_s(t)$, дістанемо

$$\varepsilon B(t) \frac{dy}{dt} = q(y(t, \varepsilon), [y(t, \varepsilon)], t, \varepsilon), \tag{29}$$

$q(y(t, \varepsilon), [y(t, \varepsilon)], t, \varepsilon) = f(x_m(t, \varepsilon) + y(t, \varepsilon), [x_m(t, \varepsilon) + y(t, \varepsilon)], t, \varepsilon) - \varepsilon B(t) \frac{dx_m(t, \varepsilon)}{dt}$. За побудовою $\|q(0, 0, t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{m+1}), t \in [k\varepsilon; t_0]$.

21) Нехай система (29) на відрізку $[k\varepsilon; t_0]$ має розв'язок $y = y(t, \varepsilon)$ такий, що $\|y(t, \varepsilon)\| = O(1), t \in [k\varepsilon; t_0]$, і $y(\varepsilon, \varepsilon) = x_\varepsilon - x_m(k\varepsilon, \varepsilon)$.

Теорема 3. Нехай виконуються умови 1), 2), 5), 15) – 17), 19) – 21). Тоді для $t \in [k\varepsilon; t_0], t_0 \leq T, \varepsilon \in (0; \varepsilon_1], \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, задача (1), (26) має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$.

Наслідок. Якщо виконуються умови теорем 2 та 3, то для $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1], \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, задача (1), (2) на відрізку $[\varepsilon; t_0], t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$.

Результати та їх обговорення

Результати роботи обговорювались на Міжнародній конференції "Боголюбівські читання 2007" (28 – 30 серпня 2007 р., м. Київ).

Висновки

У роботі доведено теореми про існування та єдиність розв'язку основної початкової задачі для сингулярно збудованої системи диференціальних рівнянь із запізненням аргументу і виродженням у точці як у некритичному, так і у критичному випадках. При цьому побудовано рівномірне асимптотичне розв'язання зазначеного розв'язку.

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с. 2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. – М.: Изд-во Моск. ун-ва, 1978. – 106 с. 3. Родионов А.М. Применение метода возмущений к линейным уравнениям с распределенным запаздыванием // ЖВММФ, 1964. – 4, 2. – С. 358–363. 4. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с. 5. Феценко С.Ф., Шкіль Н.І., Підченко Ю.П., Сотниченко Н.А. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – К.: Наук. думка, 1981. – 294 с. 6. Cooke K. Functional differential equations with asymptotically vanishing lag // Rend. circ. mat. Palermo, 1967. – 16, 1. – P. 39–56.

Надійшла до редколегії 05.03.09

УДК 517.98

А. Чайковський, канд. фіз.-мат. наук, доц.
E-mail: ChaikovskiyAV@ukr.net

ВИЗНАЧЕНІ НА ОСІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Наведено нові класи розв'язків, визначених на всій осі, лінійних диференціальних рівнянь з запізненням аргументу відносно абстрактних функцій. Показані диференціальні властивості всіх розв'язків, визначених на осі.

New classes of solutions, which are defined on the whole axis, of linear differential equations with argument's delay for abstract functions are given. Differential properties of any solution, which is defined on the axis, are given.

1. Вступ. Нехай $(B, \|\cdot\|)$ – комплексний банахів простір, $A \in L(B)$ – лінійний неперервний оператор в B . Розглянемо лінійне диференціальне рівняння першого порядку з запізненням аргументу

$$x'(t) = Ax(t-1) + y(t), t \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

де $y \in C(\mathbf{R}, B)$ – відома функція, $x \in C^1(\mathbf{R}, B)$ – шукана. Рівнянням такого типу присвячено чимало робіт. Проте переважно вдається або знайти розв'язки на піввісі [2,3], або обмежені чи періодичні розв'язки за умови наявності аналогічної властивості у функції y . Питання про опис розв'язків, визначених на осі, для довільного y залишається відкритим. В цій роботі буде наведено деякі класи таких розв'язків та описано їх властивості.

2. Розв'язки, визначені на вісі. В першій теоремі наводиться розв'язок рівняння (1) з довільним обмеженим операторним коефіцієнтом A за умови, що функція $y(t)$ фінітна. При цьому отриманий розв'язок, взагалі кажучи, відмінний від описаного в [4].

Теорема 1. Для кожної фінітної функції $y \in C(\mathbf{R}, B)$ рівняння (1) має визначений на всій осі розв'язок

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \int_{-\infty}^t \frac{(t-s)^k}{k!} y(s-k) ds, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Доведення. Нехай $\text{supp } y \subset [-N, N]$, $N \in \mathbf{N}$. Тоді вираз (2) може бути перетворений таким чином:

$$x(t) = 0, \quad t \leq -N,$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{p+N} A^k \int_{-\infty}^t \frac{(t-s)^k}{k!} y(s-k) ds, \quad t \in [p, p+1], \quad p \in \mathbf{Z}, \quad p \geq -N.$$

При цьому

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{p+N} A^k \int_{-\infty}^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} y(s-k) ds + y(t) = \begin{vmatrix} s-1 = \tau \\ k-1 = m \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{m=0}^{p-1+N} A^{m+1} \int_{-\infty}^{t-1} \frac{(t-1-\tau)^m}{m!} y(\tau-m) d\tau + y(t) = Ax(t-1) + y(t), \quad t \in [p, p+1], \quad p \in \mathbf{Z}, \quad p \geq -N.$$

Отже, (2) дійсно задає розв'язок рівняння (1), визначений на всій осі. Теорему 1 доведено.

Зауваження. У випадку, коли спектр $\sigma(A)$ оператора A не перетинається з подвійною спіраллю $\{ite^{it} \mid t \in \mathbf{R}\}$, в роботі [4] показано, що для всіх обмежених y (в тому числі фінітних) рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок. Наступний приклад показує, що отриманий розв'язок (2) не завжди є обмеженим.

Приклад. Нехай $u : \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty)$, $u(t) = 1, t \in [0, 1]$, $\text{supp } u \subset [-1, 2]$. Для довільного ненульового елемента $y_0 \in B$ розглянемо функцію $y(t) = y_0 u(t), t \in \mathbf{R}$. Нехай при цьому оператор A – це оператор, що діє за формулою $Ab := \alpha b, b \in B$, де $\alpha > 0$ – фіксоване. Тоді $x(t) = v(t)y_0, t \in \mathbf{R}$, де

$$v(N) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \int_{-\infty}^N \frac{(N-s)^k}{k!} u(s-k) ds \geq \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k \int_k^{k+1} \frac{(N-s)^k}{k!} u(s-k) ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k \int_k^{k+1} \frac{(N-s)^k}{k!} ds \geq \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k \frac{(N-k-1)^k}{k!}, \quad N \in \mathbf{N}.$$

Останній вираз при $N \rightarrow \infty$ прямує до $+\infty$, причому швидше будь-якого степеня N .

Наступне твердження дає умови існування і єдності розв'язку рівняння (1) в деяких класах, більш широких, ніж клас фінітних функцій. Це твердження узагальнює результат з [4].

Теорема 2. Рівняння (1) для кожного $r \geq 0$ і кожної функції

$$y \in E_r := \left\{ y \in C(\mathbf{R}, B) \mid \|y\|_r := \sup_{t \in \mathbf{R}} \frac{\|y(t)\|}{e^{rt}} < +\infty \right\}$$

має єдиний розв'язок в класі $E_r \cap C^1(\mathbf{R}, B)$ тоді й лише тоді, коли

$$\sigma(A) \cap \{(is-r)e^{r-s} \mid s \in \mathbf{R}\} = \emptyset. \tag{3}$$

Доведення. Зробимо заміну відомої та невідомої функції: $z(t) = e^{-rt} x(t), u(t) = e^{-rt} y(t), t \in \mathbf{R}$. Отримаємо рівняння $z'(t) = Ae^{-r} z(t-1) - rz(t) + u(t), t \in \mathbf{R}$, де відома функція u та невідома функція z є обмеженими. Як показано в [4], умова існування і єдності розв'язку для отриманого рівняння є такою:

$$\forall s \in \mathbf{R} : 0 \notin \sigma(-isI - Ae^{-r+is} + rI),$$

де I – одиничний оператор в B . Враховуючи теорему Данфорда про відображення спектра [1], ця умова може бути переписана у вигляді $0 \notin \{-is - \lambda e^{-r+is} + r \mid s \in \mathbf{R}, \lambda \in \sigma(A)\}$, що еквівалентно умові (3).

Теорему 2 доведено.

Наступне твердження показує, що вираз (2) задає розв'язок рівняння (1) не тільки для фінітних функцій, але й для більш широкого класу функцій y , визначеного в теоремі 2, якщо додатково накласти деякі умови на оператор A .

Теорема 3. Нехай $r > 0$ і $\|A\| < e^r$. Тоді рівняння (1) для кожної функції $y \in E_r$ має єдиний в класі $E_r \cap C^1(\mathbf{R}, B)$

розв'язок x , причому цей розв'язок задається формулою (2) і $\|x\|_r \leq \frac{e^r \|y\|_r}{re^r - \|A\|}$.

Доведення. Якщо $\|A\| < re^r$, то $\forall s \in \mathbf{R} : |(is - r)e^{r-is}| = \sqrt{s^2 + r^2} e^r \geq re^r > |\lambda|$, $\lambda \in \sigma(A)$, отже виконується умова (3). Згідно теореми 2 розв'язок існує і єдиний. Покажемо, що його можна задати формулою (2). Якщо $y \in E_r$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k \int_{-\infty}^t \frac{(t-s)^k}{k!} \|y(s-k)\| ds &\leq \|y\|_r \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k \int_{-\infty}^t \frac{(t-s)^k}{k!} e^{r(s-k)} ds = \|y\|_r e^{rt} \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k \int_0^{+\infty} \frac{s^k}{k!} e^{-r(s+k)} ds = \\ &= \|y\|_r e^{rt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k e^{-rk}}{r^{k+1} k!} \int_0^{+\infty} \tau^k e^{-\tau} d\tau = \|y\|_r e^{rt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k e^{-rk}}{r^{k+1}} = \frac{\|y\|_r e^{rt}}{r \left(1 - \frac{\|A\| e^{-r}}{r}\right)} = \frac{\|y\|_r e^{r(t+1)}}{re^r - \|A\|}, t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Тому вираз (2) має сенс і задана ним функція x належить класу E_r . Крім того, почленно продиференційований ряд (2) абсолютно та рівномірно на кожному відрізку збіжний:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k \int_{-\infty}^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \|y(s-k)\| ds &\leq \|y\|_r \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k \int_{-\infty}^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} e^{r(s-k)} ds = \|y\|_r e^{rt} \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k \int_0^{+\infty} \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} e^{-r(s+k)} ds = \\ &= \|y\|_r e^{rt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k e^{-rk}}{r^{k+1} (k-1)!} \int_0^{+\infty} \tau^{k-1} e^{-\tau} d\tau = \|y\|_r e^{rt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k e^{-rk}}{r^{k+1}} = \frac{\|y\|_r e^{rt}}{r \left(1 - \frac{\|A\| e^{-r}}{r}\right)} = \frac{\|y\|_r e^{r(t+1)}}{re^r - \|A\|}, t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Тому перевірка того, що (2) є розв'язком рівняння (1) аналогічна доведенню теореми 1.

Остання теорема показує, що диференціальні властивості довільного розв'язку рівняння (1), визначеного на всій вісі, визначаються властивостями виразу (2).

Теорема 4. Нехай рівняння (1) має розв'язок $x \in C^1(\mathbf{R}, B)$. Позначимо через $x_N(t)$ N -ту часткову суму ряду (2). Тоді x має ті ж особливості похідних до порядку N , що і x_N , тобто $x - x_N \in C^{N+1}(\mathbf{R}, B)$.

Доведення. Для похідної різниці $x - x_N$ правильна формула

$$\begin{aligned} (x(t) - x_N(t))' &= Ax(t-1) + y(t) - \left(y(t) + \sum_{k=1}^N A^k \int_{-\infty}^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} y(s-k) ds \right) = \\ &= A \left(x(t-1) - \sum_{k=0}^{N-1} A^k \int_{-\infty}^t \frac{(t-s)^k}{k!} y(s-k-1) ds \right) = A \left(x(t-1) - \sum_{k=0}^{N-1} A^k \int_{-\infty}^{t-1} \frac{(t-1-s)^k}{k!} y(s-k) ds \right) = \\ &= A(x(t-1) - x_{N-1}(t-1)), t \in \mathbf{R}, N \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Тому за індукцією маємо

$$(x(t) - x_N(t))^{(N)} = A^N (x(t-N) - x_0(t-N)) = A^N \left(x(t-N) - \int_{-\infty}^{t-N} y(s) ds \right), t \in \mathbf{R}, N \in \mathbf{N},$$

і $x - x_N \in C^{N+1}(\mathbf{R}, B)$.

3. Висновки. В роботі описано нові класи визначених на всій осі розв'язків, диференціальних рівнянь з запізненням аргументу відносно функцій зі значеннями в банановому просторі у випадку обмеженого операторного коефіцієнта. Встановлено диференціальні властивості всіх таких розв'язків.

1. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. – К., 1990. – 600 с. 2. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М., 1972. – 352 с. 3. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М., 1984. – 421 с. 4. Чайковський А.В. Про існування та єдиність обмежених розв'язків диференціальних рівнянь зі зсувами аргументу в банаховому просторі // Доповіді НАН України. – 2000. – №8 – С. 33-37.

Надійшла до редколегії 29.09.08

УДК 515.126, 517.91

Т. Будницька, асп.
Email: Budnitska_T@ukr.net

ТОПОЛОГІЧНА КЛАСИФІКАЦІЯ АФІННИХ ВІДОБРАЖЕНЬ З C В C

Отримано необхідні та достатні умови топологічної спряженості афінних відображень, що діють з C в C. Necessary and sufficient conditions for topological conjugacy of affine maps from C to C are obtained.

1. Вступ

Всюди в роботі розглядаються матриці над полем дійсних чисел. Нехай $X = R^n$ або C .

Відображення $f, g: X \rightarrow X$ називаються лінійно спряженими (будемо позначати $f \overset{l}{\sim} g$), якщо існує бієктивне лінійне відображення $h: X \rightarrow X$ таке, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

Відображення $f, g: X \rightarrow X$ називаються *топологічно спряженими* (будемо позначати $f \sim^t g$), якщо існує гооморфізм $h: X \rightarrow X$ такий, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

Афінним відображенням, що діє з R^n в R^n , називається відображення вигляду $f(x) = Ax + b$, де $A - n \times n$ матриця, $b \in R^n$ – фіксований вектор, матриця A називається *лінійною частиною* відображення f .

Афінним відображенням, що діє з C в C , називається відображення вигляду $f(z) = az + b$, де $a, b \in C$.

У роботах [2] та [3] розпочато класифікацію афінних відображень, що діють з R^n в R^n , з точністю до топологічної спряженості.

Основний результат цієї роботи – аналогічна класифікація афінних відображень, що діють з C в C ,

2. Топологічна класифікація лінійних відображень з R^2 в R^2

Для класифікації афінних відображень з C в C , з точністю до топологічної спряженості, буде використана аналогічна класифікація лінійних відображень з R^2 в R^2 , тому нагадаємо деякі відомі результати.

Якщо $f: R^2 \rightarrow R^2$ лінійне відображення, $f(x) = Ax$, то R_A – дійсна канонічна форма (ДКФ) матриці A , має вигляд однієї з матриць [4]: $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, де $a, b \in R$.

Для матриці R_A визначимо матриці A_α , $\alpha = +, -, \infty, 0$ – для яких має місце така таблиця:

Якщо матриця A_α є:	то її характеристичні числа λ задовольняють:
A_+	$0 < \lambda < 1$
A_-	$ \lambda > 1$
A_∞	$\lambda = 0$
A_0	$ \lambda = 1$

Відображення $f: R^2 \rightarrow R^2$ називається *періодичним*, якщо існує таке $k \in N$, що $f^k = id_{R^2}$. Найменше таке число k називається *періодом* відображення f . Н.Н. Kuiper, J.W. Robbin [7], [8] дали топологічну класифікацію тих лінійних відображень, що діють з R^n в R^n , відповідні матриці яких не мають характеристичних чисел, що є коренями з 1. Сформулюємо даний результат для випадку $n = 2$.

Теорема. 2.1. [7], [8]. Нехай $f, g: R^2 \rightarrow R^2$, $f(x) = Ax$, $g(x) = Cx$ – лінійні відображення, де матриці A та C не мають характеристичних чисел, що є коренями з 1.

Відображення f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли $rank(A_+) = rank(C_+)$, $sign(det(A_+)) = sign(det(C_+))$, $rank(A_-) = rank(C_-)$, $sign(det(A_-)) = sign(det(C_-))$, $A_\infty = C_\infty$, $A_0 = C_0$.

А також довели [7], що проблема класифікації лінійних відображень, з точністю до топологічної спряженості, заводить до випадку, коли A та C – періодичні матриці. А. Пуанкаре [5] показав, що для періодичних лінійних відображень, що діють з R^2 в R^2 , топологічна спряженість співпадає з лінійною спряженістю. З курсу лінійної алгебри відомо, що необхідною та достатньою умовою лінійної спряженості двох лінійних відображень є рівність дійсних канонічних форм матриць, що відповідають цим лінійним відображенням. Тому два періодичні лінійні відображення, що діють з R^2 в R^2 , $f(x) = Ax$ та $g(x) = Cx$, будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли $A_0 = C_0$.

Об'єднуючи результати, що отримали А. Пуанкаре, Н.Н. Kuiper та J.W. Robbin, маємо наступне твердження.

Твердження. 2.1. Нехай $f, g: R^2 \rightarrow R^2$, $f(x) = Ax$, $g(x) = Cx$ – лінійні відображення.

Відображення f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли $rank(A_+) = rank(C_+)$, $sign(det(A_+)) = sign(det(C_+))$, $rank(A_-) = rank(C_-)$, $sign(det(A_-)) = sign(det(C_-))$, $A_\infty = C_\infty$, $A_0 = C_0$.

3. Топологічна класифікація лінійних відображень з C в C

З топологічної класифікації лінійних відображень з R^2 в R^2 впливає топологічна класифікація лінійних відображень з C в C . Тобто має місце наступна лема.

Лема. 3.1. Нехай $f, g: C \rightarrow C$, $f(z) = az$, $g(z) = cz$, $a, c \in C$.

Відображення f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

$$\text{або } \begin{cases} 0 < |a| < 1, \\ 0 < |c| < 1, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} |a| > 1, \\ |c| > 1, \end{cases} \text{ або } a = c, \text{ або } a = \bar{c}.$$

(Тобто коли $|a|, |c|$ або одночасно менші 1 та не дорівнюють 0, або одночасно більші 1, або $a = c$, або $a = \bar{c}$).

Доведення. Відображення $f, g : C \rightarrow C$, $f(z) = az$, $g(z) = cz$, $a = a_1 + ia_2$, $c = c_1 + ic_2 \in C$ топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли топологічно спряжені відповідні лінійні відображення з R^2 в R^2 , тобто коли

$$f_{R^2}(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ де } a_1, a_2 \in R, \lambda_A^{(1)} = a, \lambda_A^{(2)} = \bar{a}, \text{ та}$$

$$g_{R^2}(x) = Cx = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ де } c_1, c_2 \in R, \lambda_C^{(1)} = c, \lambda_C^{(2)} = \bar{c},$$

топологічно спряжені.

З твердження 2.1 $f_{R^2}(x) = Ax$ та $g_{R^2}(x) = Cx$ топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли $rank(A_+) = rank(C_+)$, $sign(\det(A_+)) = sign(\det(C_+))$, $rank(A_-) = rank(C_-)$, $sign(\det(A_-)) = sign(\det(C_-))$, $A_\infty = C_\infty$, $A_0 = C_0$.

Зауважимо, що дійсні канонічні форми матриць A та C – це самі матриці A та C , відповідно, та ці матриці мають наступні властивості:

- 1) $rank(A) = 2 = rank(C)$, для будь-яких ненульових матриць A та C ;
- 2) $sign(\det(A)) = sign(a_1^2 + a_2^2) = sign(c_1^2 + c_2^2) = sign(\det(C))$, для будь-яких ненульових матриць A та C ;
- 3) $|\lambda_A^{(1)}| = |\lambda_A^{(2)}| = |a|$, $|\lambda_C^{(1)}| = |\lambda_C^{(2)}| = |c|$;
- 4) $a = c = 0$ тоді і тільки тоді, коли A та C – нульові матриці;
- 5) якщо $|a| = |c| = 1$, то $f_{R^2}(x) = Ax \stackrel{t}{\sim} g_{R^2}(x) = Cx$ тоді і тільки тоді, коли або $a = c$, або $a = \bar{c}$.

Доведення 5)-ї властивості випливає з того факту, що за твердженням 2.1 при $|a| = |c| = 1$ $f_{R^2}(x) = Ax \stackrel{t}{\sim} g_{R^2}(x) = Cx$ тоді і тільки тоді, коли $A_0 = C_0$. З рівності цих матриць випливає, що у них характеристичні числа співпадають, тобто $\{\lambda_A^{(1)}, \lambda_A^{(2)}\} = \{\lambda_C^{(1)}, \lambda_C^{(2)}\}$. Оскільки $\{\lambda_A^{(1)}, \lambda_A^{(2)}\} = \{a, \bar{a}\}$, а $\{\lambda_C^{(1)}, \lambda_C^{(2)}\} = \{c, \bar{c}\}$, тому або $a = c$, або $a = \bar{c}$. Та навпаки: якщо $a = c$, то очевидно, що $A = C$; якщо $a = \bar{c}$, то $f_{R^2}(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ та

$$g_{R^2}(x) = Cx = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ топологічно спряжені, бо існує гомеоморфізм } h : R^2 \rightarrow R^2,$$

$$h(x) = Qx = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ такий що } f = h \circ g \circ h^{-1}.$$

Використовуючи властивості 1)-5) отримаємо:

$$f_{R^2}(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ де } a_1, a_2 \in R, \lambda_A^{(1)} = a, \lambda_A^{(2)} = \bar{a} \text{ та}$$

$$g_{R^2}(x) = Cx = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ де } c_1, c_2 \in R, \lambda_C^{(1)} = c, \lambda_C^{(2)} = \bar{c},$$

топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

$$\text{або } \begin{cases} 0 < |a| < 1, \\ 0 < |c| < 1, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} |a| > 1, \\ |c| > 1, \end{cases} \text{ або } a = c, \text{ або } a = \bar{c}.$$

Отже, ми отримали необхідні та достатні умови, коли лінійні відображення $f(z) = az$ та $g(z) = cz$, $a, c \in C$ будуть топологічно спряженими.

Лемму доведено.

4. Топологічна класифікація афінних відображень з C в C

Наступна теорема дає необхідні та достатні умови топологічної спряженості афінного відображення та відповідного лінійного.

Теорема 4.1. Нехай $f, g : C \rightarrow C$, $f(z) = az + b$, $g(z) = az$, $a, b \in C$.

Відображення f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли існує $q \in C$ таке, що $f(q) = q$.

Доведення. Необхідність. $f(z) = az + b \stackrel{t}{\sim} g(z) = az$, $a, b \in C$. Отже, відображення f та g мають однакову кількість нерухомих точок.

Оскільки $g(0) = 0$, то $g(z) = az$, $a \in C$ має принаймні 1 нерухому точку, а отже й відображення $f(z) = az + b$, $a, b \in C$ теж має принаймні 1 нерухому точку (бо інакше f та g не є топологічно спряженими).

Достатність. $f \stackrel{t}{\sim} g$, бо існує гомеоморфізм $h: C \rightarrow C$, $h(z) = z + q$ такий, що $f = h \circ g \circ h^{-1}$. Справді, $f \circ h = h \circ g$ тоді і тільки тоді, коли $aq + b = q$, а ця рівність виконується, бо $q \in$ нерухомою точкою f .

Теорему доведено.

У топологічній класифікації афінних відображень з C в C основною є наступна теорема.

Теорема 4.2. Нехай $f, g: C \rightarrow C$, $f(z) = az + b$, $g(z) = cz + d$, $a, b, c, d \in C$.

Відображення f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

або $\begin{cases} 0 < |a| < 1, \\ 0 < |c| < 1, \end{cases}$ або $\begin{cases} |a| > 1, \\ |c| > 1, \end{cases}$ або $a = c$, або $a = \bar{c}$; якщо $a = c = 1$, то b та d або одночасно дорівнюють 0, або одночасно відмінні від 0.

(Тобто коли $|a|$, $|c|$ або одночасно менші 1 та не дорівнюють 0, або одночасно більші 1, або $a = c$, або $a = \bar{c}$; якщо $a = c = 1$, то b та d або одночасно дорівнюють 0, або одночасно відмінні від 0).

Доведення. Відомо, що у топологічно спряжених відображень однакова кількість нерухомих точок. Тому доведемо теорему для кожного класу афінних відображень, у яких кількість нерухомих точок однакова.

Оскільки довільне афінне відображення з C в C може мати або 1 нерухому точку, або нескінченно багато (тобто бути тотожним відображенням), або взагалі їх не мати, то маємо 3 випадки:

1) Афінні відображення, що мають тільки по 1 нерухомій точці.

Зауважимо, що довільне афінне відображення з C в C , $\phi(z) = mz + n$ має тільки 1 нерухому точку, (а саме $z = \frac{n}{1-m}$) тоді і тільки тоді, коли $m \neq 1$, $n \in C$.

Отже, відображення $f(z) = az + b$ та $g(z) = cz + d$, що мають тільки по 1 нерухомій точці, за теоремою 4.1 топологічно спряжені з відповідними лінійними відображеннями, тобто:

$$f(z) = az + b \stackrel{t}{\sim} r(z) = az, \quad a \in C \setminus \{1\}, \quad b \in C, \quad g(z) = cz + d \stackrel{t}{\sim} s(z) = cz, \quad c \in C \setminus \{1\}, \quad d \in C.$$

Очевидно, що відображення $f(z) = az + b$ та $g(z) = cz + d$, що мають тільки по 1 нерухомій точці, будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли топологічно спряжені $r(z) = az$ та $s(z) = cz$, $a, c \in C \setminus \{1\}$.

За лемою 3.1 відображення $r(z) = az$ та $s(z) = cz$, $a, c \in C \setminus \{1\}$ топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли.

або $\begin{cases} 0 < |a| < 1, \\ 0 < |c| < 1, \end{cases}$ або $\begin{cases} |a| > 1, \\ |c| > 1, \end{cases}$ або $a = c$, або $a = \bar{c}$.

Отже, $f(z) = az + b \stackrel{t}{\sim} g(z) = cz + d$, де $a, c \in C \setminus \{1\}$, $b, d \in C$, тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

або $\begin{cases} 0 < |a| < 1, \\ 0 < |c| < 1, \end{cases}$ або $\begin{cases} |a| > 1, \\ |c| > 1, \end{cases}$ або $a = c$, або $a = \bar{c}$.

2) Афінні відображення, що мають нескінченно багато нерухомих точок.

Зауважимо, що довільне афінне відображення з C в C , $\phi(z) = mz + n$ має нескінченно багато нерухомих точок, тобто є тотожним відображенням, тоді і тільки тоді, коли $m = 1$ та $n = 0$.

Отже, відображення $f(z) = az + b$ та $g(z) = cz + d$, що мають нескінченно багато нерухомих точок, топологічно спряжені, бо $f(z) = g(z) = id_C(z)$.

3) Афінні відображення, що не мають нерухомих точок.

Зауважимо, що довільне афінне відображення з C в C , $\phi(z) = mz + n$ не має нерухомих точок тоді і тільки тоді, коли $m = 1$ та $n \neq 0$. Тобто афінне відображення з C в C , що не має нерухомих точок, має вигляд $\phi(z) = z + n$, $n \in C \setminus \{0\}$.

Відображення $f(z) = z + b$ та $g(z) = z + d$, $b, d \in C \setminus \{0\}$, які не мають нерухомих точок, завжди топологічно спряжені, бо існує гомеоморфізм $h: C \rightarrow C$, $h(z) = \frac{d}{b}z$, $b, d \in C \setminus \{0\}$ такий, що $h \circ f = g \circ h$.

Об'єднуючи результати цих 3 випадків, отримаємо:

$f(z) = az + b \stackrel{t}{\sim} g(z) = cz + d$, $a, c \in C \setminus \{1\}$, $b, d \in C$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

або $\begin{cases} 0 < |a| < 1, \\ 0 < |c| < 1, \end{cases}$ або $\begin{cases} |a| > 1, \\ |c| > 1, \end{cases}$ або $a = c$, або $a = \bar{c}$.

Якщо $a = c = 1$, то відображення $f(z) = z + b$ та $g(z) = z + d$, $b, d \in C$, будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли вони є або одночасно тотожними відображеннями, або одночасно відмінними від тотожних (бо інакше відображення будуть мати різну кількість нерухомих точок). Тобто $f(z) = z + b \sim g(z) = z + d$, $b, d \in C$ тоді і тільки тоді, коли b та d або одночасно дорівнюють 0, або одночасно відмінні від 0.

Отже, $f(z) = az + b \sim g(z) = cz + d$, $a, b, c, d \in C$ тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

або $\begin{cases} 0 < |a| < 1, \\ 0 < |c| < 1, \end{cases}$ або $\begin{cases} |a| > 1, \\ |c| > 1, \end{cases}$ або $a = c$, або $a = \bar{c}$; якщо $a = c = 1$, то b та d або одночасно дорівнюють 0, або одночасно відмінні від 0.

Теорему доведено.

5. Висновки

У роботі дана класифікація, з точністю до топологічної спряженості, відображень вигляду $f(z) = az + b$, $a, b \in C$, що діють з C в C . Тобто знайдено необхідні та достатні умови коли два довільні афінні відображення з C в C будуть топологічно спряженими. Доведено теорему про топологічну спряженість такого афінного відображення з відповідним лінійним.

1. Бердон А. Геометрия дискретных групп: Пер. с англ. – М., 1986. 2. Будницька Т.В. Класифікація топологічно спряжених афінних відображень // Укр. мат. журн. – 2009. – Т.61, № 1. – с. 134–139. 3. Будницька Т.В. Топологічна класифікація афінних відображень з R^2 в R^2 // Нелінійні коливання. – 2008. – Т.11, № 4. – с. 472–480. 4. Палис Ж., ду Мелу В. Геометрическая теория динамических систем: Введение: Пер. с англ. – М., 1986. 5. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.-Л., 1947. 6. Cappell S.E., Shaneson J.L. Non-linear similarity // Ann. of Math. – 1981. – Vol. 113. – P. 315–355. 7. Kuiper N.H., Robbin J.W. Topological classification of linear endomorphisms // Invent. Math. – 1973. – Vol. 19, №2. – P. 83–106. 8. Robbin J.W. Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 78, №6. – P. 923–952.

Надійшла до редколегії 19.09.08

УДК 517.91

Н. Лукова, асп., О. Пришляк, д-р фіз.-мат.наук
Email: prishlyak@yahoo.com

ФУНКЦІЇ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ НА ТРИВИМІРНИХ МНОГОВИДАХ З МЕЖЕЮ

*Побудовано повний топологічний інваріант функцій загального положення на тривимірних многовидах з межею.
We construct the complete topological invariant of functions in general position on 3-manifolds with boundary.*

1. Вступ

Якщо M – гладкий замкнений многовид, то функція Морса на ньому буде функцією загального положення, якщо на кожному її критичному рівні міститься одна критична точка. Такі функції утворюють відкриту скрізь щільну множину у просторі всіх функцій. За лемою Морса [2], для невідродженої критичної точки p існує локальна система координат (x_1, \dots, x_n) , в якій функція має вигляд $f(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$.

Нехай M – гладкий компактний n -вимірний многовид з межею ∂M . Функція $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ є функцією загального положення, якщо

- а) усі її критичні точки – невідроджені і не лежать на межі ∂M ,
- б) обмеження f_∂ функції f на ∂M є функцією Морса загального положення,
- в) критичний рівень функції f містить одну критичну точку цієї функції і не містить критичних точок функції f_∂ .

Нехай $x \in \partial M$ – критична точка f_∂ . Індексом $\text{ind } x$ цієї критичної точки називається пара (λ, δ) , де λ – звичайний індекс, а $\delta = +1$, якщо вектор $\text{grad} f_x$ спрямований назовні і $\delta = -1$, якщо $\text{grad} f_x$ спрямований в усередину многовиду M . Якщо $x \notin \partial M$ – критична точка f , то індекс визначається звичайним чином. Аналогічно лемі Морса в околі невідродженої критичної точки f_∂ існує локальна система координат (x_1, \dots, x_n) , $x_n \geq 0$, в якій функція f має вигляд $f(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \delta x_n^2$ [4].

Нехай $f, g: M \rightarrow \mathbf{R}$ – гладкі функції. Функції f і g називаються топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $\psi: M \rightarrow M$, $\zeta: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ такі, що $f \zeta = g \psi$.

Критерії топологічної еквівалентності функцій Морса на компактних двовимірних многовидах отримані у роботах [1,5,6], а тривимірних у [3].

Основна мета роботи – дати топологічну пошарову класифікацію функцій загального положення на тривимірних многовидах з межею.

2. m-діаграми Хегора

Нехай $H \cup H' = M$ – розбиття многовиду M таке, що $H = M^1$ – об'єднання ручок, індекси яких дорівнюють 0, 1, (0, -1), (0, +1), (1, -1), $F = L^1 = \partial H = \partial H'$ – загальна поверхня з краєм многовидів H і H' . Набір $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n, u_1^m, u_2^m, \dots, u_s^m\}$ правильно вкладених кривих, що не перетинаються, на поверхні F таких, що кожне u_i – косередня сфера ручки індексу 1, а u_j^m – перетин косередньої сфери ручки індексу (1, -1) з F , називається узагальненою системою меридіан кренделя H . Набір $v = \{v_1, v_2, \dots, v_m, v_1^m, v_2^m, \dots, v_k^m\}$, що складається із середніх сфер ручок індексу 2 і перетинів середніх сфер індексу (1, +1) з F , називається узагальненою системою меридіан кренделя H' .

Трійка (F, u, v) називається m -діаграмою Хегора многовиду M , а поверхня F – поверхнею Хегора. m -діаграми (F, u, v) і (F', u', v') називаються гомеоморфними, якщо існує такий гомеоморфізм $h: F \rightarrow F'$, що $h(u) = u'$, $h(v) = v'$.

M -діаграми (F, u, v) і (F', u', v') називаються напівізотопними, якщо існують такі ізоотопії $\varphi_t, \psi_t : F \rightarrow F$, що $\varphi_0 = \psi_0 = \text{id}$, $\varphi_1(u) = u', \psi_1(v) = v'$.

Визначимо операцію додавання меридіан: під сумою $u_1 \# u_2$ двох меридіан u_1 і u_2 уздовж простої кривої α , яка з'єднує u_1 і u_2 , називається та компонента краю околу об'єднання $\partial U(u_1 \cup u_2 \cup \alpha)$, яка в цьому околі неізотопна ні u_1 , ні u_2 . Якщо один чи обидва меридіани є m -меридіани, сума визначається аналогічно. При цьому, якщо обидва меридіани є m -меридіанами, то крива $\alpha \subset \partial F$.

Позначимо через $u_1^\partial, \dots, u_p^\partial$ компоненти $\partial F \setminus \bigcup_{i=1}^s u_i^m$, $v_1^\partial, v_2^\partial, \dots, v_q^\partial$ – компоненти $\partial F \setminus \bigcup_{i=1}^k v_i^m$. M -діаграма називається упорядкованою, якщо задане відображення σ множини $\{u_1, u_2, \dots, u_n, u_1^m, u_2^m, \dots, u_s^m, u_1^\partial, \dots, u_p^\partial, v_1, v_2, \dots, v_m, v_1^m, v_2^m, \dots, v_k^m, v_1^\partial, v_2^\partial, \dots, v_q^\partial\}$ на множину $\{0, 1, 2, \dots, N+1\}$.

Упорядковані m -діаграми Хегора (УмДХ) називаються еквівалентними, якщо одну з іншої можна одержати за допомогою послідовності гомеоморфізмів, напівізотопій діаграм (пальчикових рухів, трюків Уїтні між u і v меридіанами, скорочень або введень трикутників, сторони яких складаються з дуг $u_i^m, v_j^m, \partial F$), а також таких замінів меридіанів: 1) u_i на $u_i \# u_j$, при $\sigma(u_i) < \sigma(u_j)$, 2) u_i^m на $u_i^m \# u_j$, при $\sigma(u_i^m) < \sigma(u_j)$, 3) u_i^m на $u_i^m \# u_j^m$, при $\sigma(u_i^m) < \sigma(u_j^m)$, 4) v_i на $v_i \# v_j$, при $\sigma(v_i) > \sigma(v_j)$, 5) v_i^m на $v_i^m \# v_j$, при $\sigma(v_i^m) > \sigma(v_j)$, 6) v_i^m на $v_i^m \# v_j^m$, при $\sigma(v_i^m) > \sigma(v_j^m)$, 7) u_i^m на $u_i^m \# v_j^m$, при $\sigma(u_i^m) > \sigma(v_j^m)$.

При цьому порядок σ суми дорівнює порядку першого доданку. В сьомій операції змінюється поверхня F , як на рис. 1/ (u_i^m зображено суцільною лінією, а v_j^m – штрихованою).

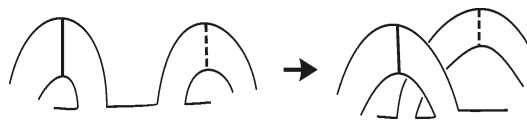


Рис. 1.

Для задання порядку на множині меридіанів, побудуємо граф Ріба функції Морса. Це орієнтований граф, що отриманий з многовида, стягненням кожної компоненти рівня в точку. При цьому, якщо компонента містить критичну точку функції, то їй відповідає вершина графа, інакше точка на ребрі. Орієнтація ребер задається напрямком зростання функції. Порядок меридіана визначається як довжина максимального орієнтованого шляху, що закінчується у вершині, яка відповідає цьому меридіану. Наприклад, якщо ручка індексу 1 або 2 приклеюється до об'єднання тільки ручок індексу 0, то порядок відповідного меридіана і цієї ручки рівний 1. Якщо вона приклеюється до об'єднання ручок, у яких максимальний порядок k , то приклеєна ручка і відповідний меридіан мають порядок $k+1$. Порядок u_i^∂ дорівнює 0, якщо вони лежать (хоча б частково) у межі ручки індексу $(0, +1)$ і більший за 0, для ручок індексу $(0, -1)$. Аналогічно, порядок v_i^∂ дорівнює $N+1$, якщо вони лежать (хоча б частково) у межі ручки індексу $(2, -1)$ і менший за $N+1$, для ручок індексу $(2, +1)$. Число N будемо називати висотою функції.

3. Геометрична пошарова еквівалентність.

Нехай M – рімановий многовид. Дві функції $f, g : M \rightarrow \mathbf{R}$ називаються *геометрично пошарово еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм $h : M \rightarrow M$, який відображає компоненти рівнів функції f в компоненти рівнів функції g , а траєкторії поля $\text{grad } f$ в траєкторії поля $\text{grad } g$, зберігаючи напрямком руху за ними.

Теорема 1. Дві функції загального положення на тривимірних ріманових многовидах з межею геометрично пошарово еквівалентні тоді і тільки тоді, коли існує гомеоморфізм між їх m -діаграми Хегора, що зберігає упорядкування.

Доведення. Необхідність. За побудовою m -діаграми Хегора на рімановому многовиді, вона за функцією Морса-Смейла визначається однозначно, з точністю до гомеоморфізма.

Достатність. Гомеоморфізм діаграм задає взаємно-однозначну відповідність між траєкторіями полів градієнтів згідно їх перетинів з поверхнею Хегора. Рівність упорядкування меридіанів забезпечує однаковий порядок приклепки ручок, а отже, і гомеоморфізм відповідних компонент критичних рівнів. Якщо викинути компоненти рівнів, що містять критичні точки, то отримаємо незв'язне об'єднання циліндрів. При цьому кожному циліндру однієї функції відповідає циліндр іншої. Задамо гомеоморфізм між відповідними областями значень на прямій і такий, що зберігає орієнтацію прямої. Тоді цей гомеоморфізм у сукупності з відповідністю між траєкторіями задає гомеоморфізм між циліндрами. Тоді гомеоморфізми циліндрів, разом з побудованими раніше гомеоморфізмами компонент критичних рівнів задають шуканий гомеоморфізм тривимірних многовидів.

4. Топологічна пошарова еквівалентність.

Дві функції $f, g : M \rightarrow \mathbf{R}$ називаються (*топологічно*) *пошарово еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм $h : M \rightarrow M$, який відображає компоненти рівнів функції f в компоненти рівнів функції g .

Теорема 2. Дві функції загального положення на тривимірних многовидах з межею будуть топологічно пошарово еквівалентними тоді і тільки тоді, коли побудовані за ними упорядковані m -діаграми Хегора будуть еквівалентні.

Доведення. За функцією загального положення побудуємо нову функцію загального положення, у якій критичні значення сідлових точок збігаються з порядком, а всі локальні мінімуми і точки індексу $(0, +1)$ мають значення 0, а локальні максимуми і точки індексу $(2, -1)$ мають значення $N+1$. Таку функцію назовемо зведеною.

Нехай $y_0 = \min f$. Для кожного локального мінімуму x_i і досить малого $\varepsilon > 0$ і околу U точки x_i змінимо функцію в цьому околі, взявши композицію функції f з дифеоморфізмом прямої, що тотожній при $y > f(x_i) + \varepsilon$ і відображає $f(x_i)$ в y_0 . Тоді значення функції будуть однаковими для всіх локальних мінімумів і нова функція буде пошарово еквівалентна початковій. Аналогічно можна змінювати значення функції в сідлових точках використовуючи ди-

феоморфізми проміжків значень на компонентах рівнів функції, які на графі Ріба утворюють ребра суміжні з вершиною x_i . Отже, за допомогою такої процедури отримаємо зведену функцію, що пошарово еквівалентна функції f .

Покажемо, що топологічна пошарова еквівалентність функцій Морса рівносильна топологічній еквівалентності зведених функцій. З означення топологічної еквівалентності випливає пошарова. Навпаки, нехай пошарова еквівалентність задана. Тоді відображення шарів, в композиції з відображенням зсуву вздовж поля градієнта до шару з тим же значенням, задає відображення шарів з однаковими значеннями, а, отже, і топологічну еквівалентність.

Використання теореми з [5] до зведених функцій завершує доведення.

5. Реалізація інваріанта функцією.

Функція порядку σ має такі властивості:

- 1) порядок $\sigma(w_i)$ кожного меридіану $w_i \in \mathbb{Z}$ цілим числом і $0 < \sigma(w_i) < N+1$;
- 2) якщо $u_i \cap v_j \neq \emptyset$, то $\sigma(u_i) < \sigma(v_j)$.

Для доведення цієї властивості досить помітити, що через точку перетину меридіанів проходить траєкторія поля градієнта, яка починається в критичній точці, яка відповідає u_i , і закінчується в точці, яка відповідає v_j . Оскільки функція зростає вздовж цієї траєкторії і траєкторія проектується на граф Ріба в ребро або орієнтований маршрут, то $\sigma(u_i) < \sigma(v_j)$;

3) якщо порядок $\sigma(w_i) > 1$, то існує меридіан w_j такий, що $\sigma(w_i) = \sigma(w_j) + 1$ і меридіани w_i та w_j можна з'єднати шляхом, який не перетинає інших меридіанів u_k , порядок яких $\sigma(u_k) > \sigma(w_j)$ і меридіанів v_k , порядок яких $\sigma(v_k) < \sigma(w_j)$. Тут w_i та w_j можуть бути меридіанами як одного типу, так і різних типів. Наприклад, $w_i = u_i$, $w_j = v_j$.

Доведення цієї властивості прямо випливає з процесу побудови порядку.

Функцію порядку σ , яка задовольняє властивостям 1)-3), будемо називати *допустимою*, а УтДХ з допустимою функцією порядку – *допустимою* УтДХ.

Теорема 3. Для кожної допустимої УтДХ існує функція загального положення, яка породжує цю УтДХ.

Доведення. УтДХ задає розклад многовида на ручки. Функція σ визначає порядок приклеювання ручок. Після приклеювання кожної ручки будемо приклеювати комір. В результаті отримаємо розклад на ручки з комірами. Стискаючи кожну ручку в (критичну) точку, отримаємо многовид з функцією на ньому, що задається за допомогою проєкцій комірів на відрізок в сумі з константами, такими щоб ці функції були узгоджені на краях комірів. Будь-яка функція загального положення, що топологічно еквівалентна побудованій функції, буде шуканою, оскільки обернена побудова приведе до заданої УтДХ.

6. Приклади підрахуваль.

Розглянемо функції на тривимірному диску D^3 , всі критичні точки яких лежать на краю. В цьому випадку порядок всіх u_i^{β} дорівнює 0, а порядок v_i^{β} дорівнює $N+1$. Оскільки ейлерова характеристика двовимірної сфери дорівнює 2, то число критичних точок парне. Існує одна m -функція з двома критичними точками. Діаграми функцій з 4 критичними точками зображено на рис. 2 (лінії u зображено суцільною лінією, а лінії v – штрихованою).

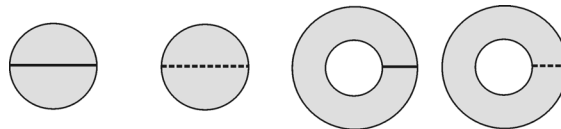


Рис. 2.

На всіх діаграмах існує по одному упорядкуванню, оскільки на них по одному меридіану. На рис. 3 зображені дві інші m -діаграми функцій з 4 критичними точками на краю.

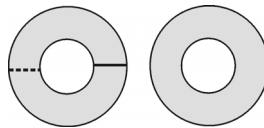


Рис. 3.

Перша діаграма має три різні упорядкування і задає функції на $S^1 \times D^2$, друга має два упорядкування і задає m -функції на $S^2 \times D^1$.

Діаграми функцій з 6 критичними точками на границі тривимірного диску зображено на рис.4.

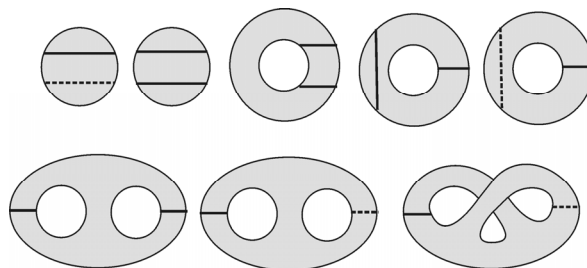


Рис. 4.

Ще 5 діаграм можна отримати, якщо в кожній із діаграм, крім першої і останніх двох, замінити суцільні лінії на штриховані, а штриховані на суцільні. Для першої діаграми можливі 3 функції порядку σ , для другої - 2, третьої - 2, четвертої - 3, п'ятої - 3, шостої - 2, сьомої - 3. Для одного оснащення четвертої діаграми можливі додавання меридіан, які призводять до третьої діаграми. Для восьмої діаграми, тільки дві функції порядку дають діаграми нееквівалентні сьомій діаграмі. Отже, всього існує $3+2 \times 2+2 \times 2+2 \times 3+2 \times 3+2 \times 2+3+2-1=31$ функція загального положення на тривимірному диску з 6 критичними точками на границі.

Нехай T – тор з виколотим відкритим диском (як остання діаграма на рис.4) і діаграма на T містить по два меридіани кожного типу, які негомтопні між собою і негомтопні 0 (при гомотопії кінці меридіан ковзають по краю T). Стягнувши край T в точку, отримаємо, що кожна система меридіанів є системою твірних фундаментальної групи тору. Матриця переходу від однієї системи до другої є матрицею з $SL(2, \mathbf{Z})$. Отже, існує нескінченно багато топологічно нееквівалентних функцій загального положення з 6 критичними точками на границі многовиду $T \times [0, 1]$.

Висновок. Побудовано повний топологічний інваріант функцій загального положення на тривимірних многовидах з межею. Ефективність цього інваріанту продемонстровано на конкретних прикладах підрахування числа нееквівалентних функцій.

1. Максименко С.І. Еквівалентність m -функцій на поверхнях// Некоторые вопросы совр. мат. Праці Ін-ту математики НАНУ, Т.25, Київ, 1998,- С.128-134. 2. Милнор Дж. Теория Морса. - М.: Мир, 1964. - 184 с. 3. Пришляк А.О. Сопряженность функций Морса // Некоторые вопросы совр. мат. Праці Ін-ту математики НАНУ, Т.25, Київ, 1998,- С.94-103. 4. Jankowski A., Rubinsztein R. Functions with non-degenerated critical points on manifolds with boundary// Comm. Math. XVI, 1972, p.99-112. 5. Kulnich E.V. On topological equivalence Morse functions on surfaces// Methods of Func. An. and Topology, N1, 1998.- P.22-28. 6. Sharko V.V. On topological equivalence Morse functions on surfaces// Int. conference at Chelyabinsk State Univ.: Low-dimensional Topology and Combinatorial Group Theory, 1996.-P.19-23.

Надійшла до редколегії 26.09.08

УДК 519.21

О. Курченко, д-р.фіз.-мат.наук

ТЕОРЕМА БАКСТЕРОВОГО ТИПУ ДЛЯ СТРОГО СУБГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

Отримані достатні умови збіжності у середньому квадратичному та з імовірністю одиниця бакстерових сум для сумісно строго субгауссових випадкових полів.

Sufficient conditions of convergence in square mean and with probability one of Baxter sums for jointly strong subgaussian random fields are obtained.

1. Вступ

Граничні теореми бакстерового типу для випадкових процесів та полів полягають у встановленні умов збіжності у певному сенсі до не випадкової сталої послідовності сум від приростів випадкових процесів чи полів. Цей напрямок започаткував Леві [21], коли встановив такий результат для стандартного броунівського руху. Бакстер [14] узагальнив цей результат для більш широкого класу гауссових випадкових процесів. Впродовж останніх десятиліть збіжність бакстерових сум для випадкових процесів і полів досліджувалася багатьма математиками. У припущеннях гауссовості теореми бакстерового типу (відомі також під назвою теореми Леві-Бакстера) для випадкових процесів отримали Гладишев [6], Рижов [11, 12], Ібрагімов та Розанов [7], Гіне та Клейн [18], Врубель [24]. Персі [22] довів теорему бакстерового типу без припущення гауссовості за рахунок умов на мішані моменти четвертого порядку випадкового процесу. Для гауссових випадкових полів (випадкових функцій кількох змінних) та випадкових полів із гауссовими приростами збіжність послідовності бакстерових сум досліджували Красницький [8], Берман [15], Арак [1], Стрет [23], Кавада [20], Део та Уонг [17], Шкляр [13], Чен Ксьонг та Пан Ксія [16], Гйон [19], Курченко [9]. Проводилися також дослідження умов збіжності послідовності бакстерових сум для окремих класів випадкових функцій. Так теореми Леві-Бакстера для строго передгауссових процесів отримали Бесклінська та Козаченко [2]. Булдігін, Мельник, Шпортюк [3,4] встановили необхідні й достатні умови збіжності послідовності бакстерових сум для дробових полів на фіксованій та зростаючій параметричних множинах. Булдігін і Козаченко отримали теорему Леві-Бакстера для сумісно строго субгауссових випадкових процесів [5].

У цій статті теорема Леві-Бакстера для сумісно строго субгауссових випадкових процесів, що отримали Булдігін і Козаченко [5], узагальнена для сумісно строго субгауссових випадкових полів. При цьому розглянуті досить загальні прирости сумісно строго субгауссового поля на багатовимірному паралелепіпеді. Одночасне обчислення бакстерових сум із приростами різних типів можна застосувати для побудови консистентних оцінок параметрів коваріаційних функцій випадкових полів. У підрозділі 2 наведено означення сумісно строго субгауссового випадкового поля. У підрозділі 3 описаний клас розглянутих приростів функцій кількох змінних на багатовимірному паралелепіпеді. Підрозділ 4 містить теорему бакстерового типу, в якій встановлена збіжність у середньому квадратичному або з імовірністю одиниця послідовності бакстерових сум для сумісно строго субгауссових випадкових полів.

2. Сумісно строго субгауссові випадкові поля

Строго субгауссові випадкові вектори та сумісно строго субгауссові випадкові процеси описані у монографії Булдігіна і Козаченка [5, гл. 7]. Нехай (Ω, F, P) – імовірнісний простір.

Означення 2.1. ([5]) Випадковий вектор $\xi: \Omega \rightarrow R^n$ називається строго субгауссовим, якщо для всіх $u \in R^n$ виконується нерівність $E \exp\{u, \xi\} \leq \exp\left\{\frac{1}{2}(Bu, u)\right\}$, де $B = E(\xi \xi^t)$ – коваріаційна матриця випадкового вектора – стовпця ξ (верхній індекс t означає транспонування).

Сукупність строго субгауссових n -вимірних векторів позначають символом $SSub(\Omega, R^n)$. Відмітимо, що строго субгауссовий випадковий вектор є субгауссовим ([5]). Центрований гауссовий випадковий вектор є строго субгауссовим.

Означення 2.2. Нехай $T \subset R^d$. Випадкове поле $\{X(t): t \in T\}$ називається сумісно строго субгауссовим, якщо для довільного натурального числа n та довільних $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ випадковий вектор $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ є строго субгауссовим.

Сумісно строго субгауссове поле є центрованим [5]. Довільне гауссове випадкове поле з нульовим середнім значенням є строго субгауссовим.

3. Прирости функції кількох змінних

Нехай d – натуральне число, p_1, p_2, \dots, p_d – невід’ємні цілі числа,

$$A = \{a_{i_1 i_2 \dots i_d} : 0 \leq i_1 \leq p_1, \dots, 0 \leq i_d \leq p_d\} \tag{1}$$

d – вимірна матриця розмірності $(p_1 + 1) \times (p_2 + 1) \times \dots \times (p_d + 1)$ з дійсними елементами.

Означення 3.1. Невід’ємне ціле число m називається порядком d -вимірної матриці (1), якщо для довільних невід’ємних цілих чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$, сума яких менша числа m , виконується рівність

$$\sum_{i_1=0}^{p_1} \dots \sum_{i_d=0}^{p_d} i_1^{\alpha_1} i_2^{\alpha_2} \dots i_d^{\alpha_d} a_{i_1 i_2 \dots i_d} = 0, \tag{2}$$

але знайдеться хоча б один набір невід’ємних цілих чисел $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d$, таких, що $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_d = m$ і

$$\sum_{i_1=0}^{p_1} \dots \sum_{i_d=0}^{p_d} i_1^{\beta_1} i_2^{\beta_2} \dots i_d^{\beta_d} a_{i_1 i_2 \dots i_d} \neq 0. \tag{3}$$

Тут $0^0 = 1$.

Приклад 3.1. d -вимірна матриця $A = \{(-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_d} : i_k \in \{0, 1\}; 1 \leq k \leq d\}$ має порядок d . Дійсно, якщо виконується нерівність $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d < d$, то хоча б для одного індексу k від одиниці до d буде виконуватися рівність

$$\alpha_k = 0. \text{ Тому в цьому випадку } \sum_{i_1=0}^1 \dots \sum_{i_d=0}^1 (-1)^{i_1 + \dots + i_d} i_1^{\alpha_1} \dots i_d^{\alpha_d} = \prod_{r=1}^d \left(\sum_{i_r=0}^1 (-1)^{i_r} i_r^{\alpha_r} \right) = 0.$$

Для вектора $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) = (1, 1, \dots, 1)$ маємо $\sum_{i_1=0}^1 \dots \sum_{i_d=0}^1 (-1)^{i_1 + \dots + i_d} i_1 \dots i_d = \prod_{r=1}^d \left(\sum_{i_r=0}^1 (-1)^{i_r} i_r \right) \neq 0$.

Приклад 3.2. Нехай $d = 1$. Вектор $a = \left((-1)^p \binom{p}{0}, (-1)^{p-1} \binom{p}{1}, \dots, \binom{p}{p} \right)$ розмірності $(p + 1)$

є вектором p -го порядку, оскільки $\sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} i^k = 0, 0 \leq k \leq p - 1; \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} i^p \neq 0$.

Лема 3.1. Нехай p_1, p_2, \dots, p_d – невід’ємні цілі числа, $a^{(r)} = (a_0^{(r)}, a_1^{(r)}, \dots, a_{p_r}^{(r)})$ – $(p_r + 1)$ -вимірний вектор з дійсними координатами, який має порядок $m_r, 1 \leq r \leq d$. Тоді d -вимірна матриця

$$A = \{a_{i_1 i_2 \dots i_d} = a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \dots a_{i_d}^{(d)} : 0 \leq i_1 \leq p_1, \dots, 0 \leq i_d \leq p_d\}, \tag{4}$$

задана набором векторів $a^{(i)} = (a_0^{(i)}, \dots, a_{p_i}^{(i)})$, $1 \leq i \leq d$, має порядок $m_1 + m_2 + \dots + m_d$.

Доведення. Для невід’ємних цілих чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ маємо

$$\sum_{i_1=0}^{p_1} \dots \sum_{i_d=0}^{p_d} i_1^{\alpha_1} i_2^{\alpha_2} \dots i_d^{\alpha_d} a_{i_1 i_2 \dots i_d} = \prod_{r=1}^d \left(\sum_{i_r=0}^{p_r} a_{i_r}^{(r)} i_r^{\alpha_r} \right). \tag{5}$$

Якщо $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d < m_1 + m_2 + \dots + m_d$, то хоча б для одного індексу $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ виконується нерівність

$\alpha_k < m_k$. Тоді $\sum_{i_k=0}^{p_k} a_{i_k}^{(k)} i_k^{\alpha_k} = 0$ і тому вираз у правій частині рівності (5) дорівнює нулю. Оскільки

$\sum_{i_k=0}^{p_k} a_{i_k}^{(k)} i_k^{m_k} \neq 0, 1 \leq k \leq d$, то при $\alpha_1 = m_1, \dots, \alpha_d = m_d$ вираз у правій частині рівності (5) відмінний від нуля.

Лема доведена.

За допомогою d -вимірної матриці A визначимо приріст функції d змінних на d -вимірному паралелепіпеді. Нехай $t = (t_1, t_2, \dots, t_d) \in R^d, h = (h_1, h_2, \dots, h_d) \in (0, +\infty)^d; Q = [t, t+h] = [t_1, t_1+h_1] \times [t_2, t_2+h_2] \times \dots \times [t_d, t_d+h_d]$ – d -вимірний паралелепіпед; $f: Q \rightarrow R$ – дійсна функція d змінних; d -вимірна матриця A визначена у рівності (1).

Означення 3.3. Приростом функції f на паралелепіпеді Q , побудованим за допомогою матриці A , називається число

$$f(Q, A) = \sum_{i_1=0}^{p_1} \dots \sum_{i_d=0}^{p_d} a_{i_1 i_2 \dots i_d} f(t_1 + i_1 \delta_1, t_2 + i_2 \delta_2, \dots, t_d + i_d \delta_d),$$

де $\delta_1 = \frac{h_1}{\max(p_1, 1)}$, $\delta_2 = \frac{h_2}{\max(p_2, 1)}$, ..., $\delta_d = \frac{h_d}{\max(p_d, 1)}$. Порядком приросту функції f на паралелепіпеді Q , побудованим за допомогою матриці A , називається порядок матриці A .

Приклад 3.3. Нехай A – d -вимірна матриця, визначена у прикладі 2.1. Тоді

$$f(Q, A) = \sum_{i_1=0}^1 \dots \sum_{i_d=0}^1 (-1)^{i_1+\dots+i_d} f(t_1+i_1h_1, \dots, t_d+i_dh_d) \quad (6)$$

Прирости (4) називають повними приростами або d -приростами. Бакстерові суми для випадкових полів за допомогою таких приростів будувалися, наприклад, у роботах [1, 8, 20].

4. Збіжність послідовності бакстерових сум

Нехай $\{X(t): t \in T\}$ – сумісно строго субгауссове випадкове поле, $I = [0, 1]^d \subset T$, T – відкрита множина в R^d ; $r(s, t) = EX(s)X(t)$, $s, t \in T$ – коваріаційна функція цього випадкового поля. Нехай, далі $\{\mu(n): n \geq 1\}$ – послідовність рівномірних розбиттів одиничного d -вимірного паралелепіпеда I ; розбиття $\mu(n)$ складається з $(b(n))^d$ конгруентних d -вимірних паралелепіпедів, $b(n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$; $X(q; A)$ – приріст випадкового поля X , побудований за допомогою матриці A . Нехай d -вимірна матриця A визначена рівністю (1). Зазначимо, що для паралелепіпедів $q, p \subset [0, 1]^d$ $E(X(q; A)X(p; A)) = r(q \times p; A \otimes A)$, де $q \times p$ – декартовий добуток паралелепіпедів $q, p \subset [0, 1]^d$, $A \otimes A = \{a_{i_1 i_2 \dots i_d} a_{j_1 j_2 \dots j_d} : 0 \leq i_1, j_1 \leq p_1, \dots, 0 \leq i_d, j_d \leq p_d\}$.

Теорема 4.1. Нехай $\{X(t): t \in T\}$ – сумісно строго субгауссове випадкове поле і для деякого показника $\alpha \in R$, додатної сталої c і матриці A з означення 3.1 виконуються наступні умови:

- 1) $(b(n))^{\alpha-d} \sum_{q \in \mu(n)} r(q \times q; A \otimes A) \rightarrow c \in R$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $V_n^{(1)} = (b(n))^{2(\alpha-d)} \sum_{q, q' \in \mu(n)} (E(X(q; A)X(q'; A)))^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- 3) $V_n^{(2)} = ((b(n))^d - 1)(b(n))^{2(\alpha-d)} \sum_{q \in \mu(n)} \left((EX^2(q; A))^2 - \frac{1}{3} EX^4(q; A) \right) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Тоді $L_n = (b(n))^{\alpha-d} \sum_{q \in \mu(n)} X^2(q; A) \rightarrow c$ у середньому квадратичному при $n \rightarrow \infty$. Якщо ряд із загальним членом

$V_n^{(i)}$, $n \geq 1$, збіжний, $i=1, 2$, то $L_n \rightarrow c$ з імовірністю одиниця при $n \rightarrow \infty$.

Доведення. Розглянемо послідовність серій випадкових величин

$$\{X(q; A): q \in \mu(n)\}, \quad n \geq 1. \quad (7)$$

Лема 1.5 [5, гл.7] стверджує, що образ строго субгауссового вектора при лінійному відображенні – строго субгауссовий вектор. Випадковий вектор у кожній серії (7) є образом при лінійному відображенні строго субгауссового вектора $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ для деякого набору точок $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 1]^d$ і тому, внаслідок цієї леми, строго субгауссовий вектор. Із нерівності (2.3) леми 2.1 монографії [1] випливає, що

$$E(L_n - EL_n)^2 \leq 2V_n^{(1)} + V_n^{(2)}, \quad n \geq 1. \quad (8)$$

Внаслідок умов 2), 3) $E(L_n - EL_n)^2 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Оскільки $(b(n))^{\alpha-d} \sum_{q \in \mu(n)} r(q \times q; A \otimes A) = EL_n$, то умова 1) означає, що $EL_n \rightarrow c$, $n \rightarrow \infty$.

Тепер перше твердження теореми випливає із нерівності $E(L_n - c)^2 \leq 2E(L_n - EL_n)^2 + 2(EL_n - c)^2$, $n \geq 1$.

Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} V_n^{(1)}$ та $\sum_{n=1}^{\infty} V_n^{(2)}$ збіжні, то і ряд із загальним членом $E(L_n - EL_n)^2$, $n \geq 1$ збігається, звідки випливає

([10], с. 24), що $L_n - EL_n \rightarrow 0$ з імовірністю одиниця при $n \rightarrow \infty$. Враховуючи, що $EL_n \rightarrow c$, $n \rightarrow \infty$, отримуємо друге твердження теореми. Теорема доведена.

Для гауссового випадкового поля $\{X(t): t \in T\}$ з нульовим математичним сподіванням має місце рівність

$$E(L_n - EL_n)^2 = 2V_n^{(1)}, \quad n \geq 1, \text{ яка дозволяє отримати}$$

Наслідок 4.1. Нехай $\{X(t): t \in T\}$ – гауссове випадкове поле з нульовим математичним сподіванням і для деякого показника $\alpha \in R$, додатної сталої c і матриці A з означення 3.1 $EL_n \rightarrow c$, $n \rightarrow \infty$, де $L_n = (b(n))^{\alpha-d} \sum_{q \in \mu(n)} X^2(q; A)$, $n \geq 1$. Тоді для збіжності у середньому квадратичному послідовності (L_n) до сталої c необхідно і достатньо щоб збігалася до нуля послідовність $(V_n^{(1)})$.

5. Висновки

Досліджені умови збіжності у середньому квадратичному та з імовірністю одиниця послідовності бакстерових сум з приростами загального виду для сумісно строго субгауссових випадкових полів.

1. Арак Т.В. О теоремах типа Леви-Бакстера для случайных полей // Теория вероятностей и ее применения. – 1972. – Том 17, вып. 1. – С. 153–160.
2. Бесклинская Е.П., Козаченко Ю.В. Сходимость в нормах пространства Орлича и теоремы Леви-Бакстера // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1986. – Вып. 35. – С. 3–6.
3. Булдигин В.В., Мельник В.М., Шпортюк В.Г. Про теорему Леви-Бакстера для дробових полів. I // Укр. матем. журн. – 1998. – Том 50, №11. – С. 1463–1476.
4. Булдигин В.В., Мельник В.М., Шпортюк В.Г. Про теорему Леви-Бакстера для дробових полів. II // Укр. матем. журн. – 1999. – Том 51, №1. – С. 12–31.
5. Булдигин В.В., Козаченко Ю.В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. – К., 1998.
6. Гладышев Е.Г. Новая предельная теорема для случайных процессов с гауссовскими приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 1961. – Том 1, вып. 6. – С. 57–66.
7. Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А. Гауссовские случайные процессы. – М., 1970.
8. Краснитский С.М. О некоторых предельных теоремах для случайных полей с гауссовскими разностями m -го порядка // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1971. – Вып. 5. – С. 71–80.
9. Курченко О.О. Збіжність F-варіації гауссового випадкового поля // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1999. – Вип. 60. – С. 98–108.
10. Ламперти Дж. Случайные процессы. Обзор математической теории. – К., 1983.
11. Рыжов Ю.М. Предельные теоремы для стационарных гауссовских процессов // Теория вероятностей и ее применения. – 1965. – Том 10, вып. 1. – С. 143–151.
12. Рыжов Ю.М. Одна предельная теорема для стационарных гауссовских процессов // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1970. – Вып. 1. – С. 178–188.
13. Шкляр Г.А. Об одной теореме типа Леви-Бакстера // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1986. – Вып. 34. – С. 129–132.
14. Baxter G. A strong limit theorem for Gaussian processes // Proc. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol. 7, No 3. – P. 522–527.
15. Berman S.M. A version of the Levy-Baxter theorem for Gaussian processes // Proc. Amer. Math. Soc. – 1967. – Vol. 18. – P. 1051–1055.
16. Chen Xiong, Pan Xia. On Levy-Baxter theorem for general two-parameter Gaussian Processes // Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. – 1991. – Vol. 26. – P. 401–410.
17. Deo C.M., Wong S.F. Champs aleatoires Gaussienne // Canad. J. Statist. – 1978. – No 6. – P. 33–40.
18. Gine E., Klein R. On quadratic variation of processes with Gaussian increments // Ann. of Probab. – 1975. – Vol. 3, No 4. – P. 716–721.
19. Guyon X. Quelques resultats sur les variations de champs gaussiens stationnaires // C.R. Acad. Sci. Paris, ser. I. – 1981. – Vol. 293. – P. 649–651.
20. Kawada T. The Levy-Baxter theorem for Gaussian random fields: a sufficient condition // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – Vol. 53, No 2. – P. 463–469.
21. Levy P. Le mouvement Brownian plan // Amer. J. Math. – 1940. – Vol. 62. – P. 487–550.
22. Percy P. The Quadratic variation of random processes // Z. fur wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete. – 1971. – Vol. 19. – P. 291–301.
23. Strait P.T. On Berman's version of the Levy-Baxter theorem // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 23, No 1. – P. 91–93.
24. Wrobel A. On the almost sure convergence of the square variation of the Brownian motion // Probability and Mathematical Statistics. – 1982. – Vol. 3, No 1. – P. 97–101.

Надійшла до редколегії 30.09.2008 р.

УДК 519.21

В. Зубченко, асп.
E-mail: v_zubchenko@ukr.net

ГРАНИЧНА ПОВЕДІНКА ДОВГОСТРОКОВОЇ ВІДСОТКОВОЇ СТАВКИ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ СТОХАСТИЧНІЙ МОДЕЛІ ВІДСОТКОВОЇ СТАВКИ КОКСА–ІНГЕРСОЛЛА–РОССА

Досліджено збіжність довгострокової відсоткової ставки в узагальненій стохастичній моделі Кокса–Інгерсолла–Росса миттєвої відсоткової ставки із лінійним коефіцієнтом зносу та додатковою випадковістю, неліпшицевою дифузійною та центрованою пуассонівською мірою.

We study long-term return convergence in the Cox-Ingersoll-Ross extended model of the short interest rate with linear drift coefficient and additional randomness, non-Lipschitz diffusion and centered Poisson measure.

Вступ

Дослідження стохастичних диференціальних рівнянь дифузійного типу із гелдеровим коефіцієнтом дифузії становить особливий інтерес у зв'язку із застосуванням у фінансах [4]. Рівняння такого типу широко використовуються для моделювання стану фінансових ринків. Зокрема, у стохастичній моделі Кокса–Інгерсолла–Росса [2] динаміка короткострокової відсоткової ставки $r(t)$ описується наступним стохастичним диференціальним рівнянням:

$$dr(t) = k(\gamma - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad (1)$$

де W – вінерівський процес, k , γ та σ – додатні сталі.

Проте природно припускати, що на реальному фінансовому ринку γ та σ будуть постійно змінюватись. Тому багато робіт присвячено узагальненню даної моделі. Зокрема, у роботі [3] розглядається узагальнена CIR–модель із лінійним коефіцієнтом зносу, додатковою випадковістю та гелдеровою дифузійною.

Але фінансові ринки за певних умов функціонують таким чином, що відсоткові ставки у деякі моменти часу мають стрибки. Тому цікаво як з практичної, так і з теоретичної точки зору розглянути узагальнення стохастичної моделі Кокса–Інгерсолла–Росса, динаміка миттєвої відсоткової ставки в якій описується стохастичним рівнянням із гелдеровою дифузійною та зі стрибковою частиною.

Особливий інтерес для банків та страхових компаній становить дослідження довгострокової відсоткової ставки

$\frac{1}{t} \int_0^t r(s)ds$, де $r(s)$ – миттєва відсоткова ставка, поведінка якої описується, наприклад, узагальненою CIR–моделлю.

Дослідження граничної поведінки при $t \rightarrow \infty$ довгострокової відсоткової ставки виявляється корисним для ефективного управління ціною стратегією довгострокових договорів страхування життя.

У даній роботі ми розглядаємо узагальнену CIR–модель відсоткової ставки, що описується стохастичним диференціальним рівнянням із лінійним коефіцієнтом зносу та додатковою випадковістю, неліпшицевою дифузійною та центрованою пуассонівською мірою. Доведено збіжність м.н. довгострокової відсоткової ставки до сталого значення, котре визначається часовим середнім процесу коефіцієнту зносу. Розглянуто двофакторну CIR–модель відсоткової ставки та доведено збіжність м.н. довгострокової відсоткової ставки до сталого значення.

Досліджуємо стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = (2\beta X(t) + \delta(t))dt + g(X(t))dW(t) + \int_{\mathbb{R}} q(X(t), y)\tilde{\nu}(dt, dy) \quad (2)$$

де $\beta \leq 0$, $\delta: \Omega \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ – випадковий процес, такий що $\int_0^t \delta(s) ds < \infty$; W – вінерівський процес; ν – пуассонівська міра, $E\nu(dt, dy) = \Pi(dy)dt$, $\tilde{\nu}(dt, dy) = \nu(dt, dy) - \Pi(dy)dt$ – центрована пуассонівська міра, Π – сигма-скінченна міра на σ -алгебрі борельових множин \mathbf{R} . Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, F, \mathbf{P}) з потоком σ -алгебр F_t , поповненим усіма подіями з F_0 нульової ймовірності. Вінерівський процес W та центрована пуассонівська міра $\tilde{\nu}$ узгоджені з потоком F_t та незалежні між собою, $X(0) = x_0$. Коефіцієнти $g(x)$ та $q(x, y)$ – не випадкові вимірні функції. Дифузія $g(x)$ – гельдерова.

Будемо припускати, що коефіцієнти рівняння (2) задовольняють наступні умови:

$$1) \beta \leq 0, \delta: \Omega \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+, \int_0^t \delta(s) ds < \infty \text{ м.н. для всіх } t.$$

$$2) \int_{\mathbf{R}} |q(x, y)|^2 \Pi(dy) - \text{обмежений.}$$

$$3) \lim_{x_1 \rightarrow x_2} \int_{\mathbf{R}} |q(x_1, y) - q(x_2, y)|^2 \Pi(dy) = 0.$$

4) $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $g(0) = 0$ та задовольняє умову Гельдера: $|g(x_1) - g(x_2)| \leq b\sqrt{|x_1 - x_2|}$ для всіх $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, b – деяка стала.

5) $q(0, y) = 0$ для будь-якого $y \in \mathbf{R}$, $q(x, y) \geq 0$ для будь-яких $x \in \mathbf{R}_+, y \in \mathbf{R}$ та задовольняє умову

$$\int_{\mathbf{R}} |q(x_1, y) - q(x_2, y)| \Pi(dy) \leq k |x_1 - x_2| \text{ для всіх } x_1, x_2 \in \mathbf{R}, k - \text{деяка стала.}$$

У роботі [1] ми показали, що за умов 1)–5) рівняння (2) має єдиний сильний розв'язок, що майже напевно невід'ємний.

Допоміжні результати

Лема 1. Нехай випадковий процес X є розв'язком стохастичного диференціального рівняння (2), для коефіцієнтів якого виконуються умови 1)–5) та $\int_0^t E\delta(s) ds < \infty$. Тоді для всіх $t \geq 0$ маємо:

$$EX(t) = e^{2\beta t} X(0) + \int_0^t e^{2\beta(t-s)} E\delta(s) ds.$$

Доведення. Скориставшись узагальненою формулою Іто, одержуємо наступне зображення розв'язку рівняння (2):

$$X(t) = e^{2\beta t} \left(X(0) + \int_0^t \delta(s) e^{-2\beta s} ds + \int_0^t e^{-2\beta s} g(X(s)) dW(s) + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} e^{-2\beta s} q(X(s), y) \tilde{\nu}(ds, dy) \right). \quad (3)$$

Тому, скориставшись мартингалними властивостями стохастичних інтегралів, для доведення твердження лемми досить показати, що $E \int_0^t g^2(X(s)) e^{-4\beta s} ds < \infty$ та $E \int_0^t \int_{\mathbf{R}} q^2(X(s), y) e^{-4\beta s} \Pi(dy) ds < \infty$. Скориставшись умовами 2) та 4), одержуємо:

$$E \int_0^t g^2(X(s)) e^{-4\beta s} ds \leq b^2 e^{-4\beta t} \int_0^t EX(s) ds \quad (4)$$

та

$$E \int_0^t \int_{\mathbf{R}} q^2(X(s), y) e^{-4\beta s} \Pi(dy) ds \leq C t e^{-4\beta t} < \infty.$$

Оцінимо $EX(t)$. Для того, щоб гарантувати скінченність оцінюваної величини, означимо послідовність $(\tau_n)_{n \geq 0}$ моментів зупинки наступним чином: $\tau_n = \inf \{s \mid X(s) \geq n\}$, та оцінимо спочатку $EX(t) 1_{\{t < \tau_n\}}$.

З рівняння (2) одержуємо:

$$\begin{aligned} EX(t) 1_{\{t < \tau_n\}} &\leq EX(0) + 2 \int_0^t \beta EX(s) 1_{\{s < \tau_n\}} ds + \int_0^t E\delta(s) ds + \\ &+ \left(E \left(\int_0^t g(X(s)) 1_{\{s < \tau_n\}} dW(s) \right)^2 \right)^{1/2} + \left(E \left(\int_0^t \int_{\mathbf{R}} q(X(s), y) \tilde{\nu}(ds, dy) \right)^2 \right)^{1/2} = \\ &= EX(0) + 2 \int_0^t \beta EX(s) 1_{\{s < \tau_n\}} ds + \int_0^t E\delta(s) ds + \left(E \int_0^t g^2(X(s)) 1_{\{s < \tau_n\}} ds \right)^{1/2} + \left(E \int_0^t \int_{\mathbf{R}} q^2(X(s), y) \Pi(dy) ds \right)^{1/2} \leq \\ &\leq EX(0) + 2 \int_0^t \beta EX(s) 1_{\{s < \tau_n\}} ds + \int_0^t E\delta(s) ds + b \left(\int_0^t EX(s) 1_{\{s < \tau_n\}} ds \right)^{1/2} + (Ct)^{1/2} \leq \\ &\leq EX(0) + \int_0^t E\delta(s) ds + b + (Ct)^{1/2} + (b - 2\beta) \int_0^t EX(s) 1_{\{s < \tau_n\}} ds. \end{aligned}$$

Скориставшись нерівністю Гронуолла, одержуємо:

$$EX(t) 1_{\{t < \tau_n\}} \leq \left(EX(0) + \int_0^t E\delta(s) ds + b + (Ct)^{1/2} \right) e^{(b-2\beta)t}.$$

Застосувавши лему Фату та перейшовши до границі при $n \rightarrow \infty$, одержуємо дану оцінку для $EX(t)$. Тому, врахувавши (4) дійсно $E \int_0^t g^2(X(s)) e^{-4\beta s} ds < \infty$, й твердження лемми випливає з вищенаведених міркувань. \square

Нам також знадобиться лема Кронекера [5, с. 175]:

Лема 1. Нехай Y – неперервний семімартинал, f – додатна функція, що прямує до нескінченності. Якщо

$$\int_0^\infty \frac{dY(u)}{f(u)} \text{ існує м.н., то } \frac{Y(t)}{f(t)} \rightarrow 0 \text{ м.н.}$$

Основний результат

Теорема 1. Нехай випадковий процес X є розв'язком стохастичного диференціального рівняння (2), для коефіцієнтів якого виконуються умови 1)–5) та $\frac{1}{s} \int_0^s \delta(u) du \rightarrow \bar{\delta}$ м.н., де $\bar{\delta} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^+$. Тоді $\frac{1}{s} \int_0^s X(u) du \rightarrow \frac{\bar{\delta}}{2\beta}$ м.н.

Доведення. Проінтегрувавши стохастичне диференціальне рівняння (2), одержуємо

$$\frac{1}{t+1} \int_0^t (X(s) + \frac{\delta(s)}{2\beta}) ds = - \int_0^t \frac{g(X(s))}{2\beta(t+1)} dW(s) - \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \frac{q(X(s), y)}{2\beta(t+1)} \tilde{\nu}(ds, dy) + \frac{X(t) - X(0)}{2\beta(t+1)}. \quad (5)$$

Покажемо, що усі доданки правої частини рівняння (5) збігаються до нуля м.н.

Для того, щоб показати, що $\int_0^t \frac{g(X(s))}{2\beta(t+1)} dW(s)$ збігається до нуля м.н., застосуємо лему Кронекера та перевіримо

існування м.н. $\int_0^\infty \frac{g(X(u))}{u+1} dW(u)$.

Означимо наступну послідовність $(T_n)_{n \geq 1}$ моментів зупинки:

$$T_n = \inf \left\{ t \mid \int_0^t \frac{\delta(u)}{(u+1)^2} du \geq n \right\}.$$

Позначимо $X^{T_n} := X(u)1_{\{u \leq T_n\}}$. Оскільки згідно умов теореми $\frac{1}{s+1} \int_0^s \delta(u) du \rightarrow \bar{\delta}$ м.н., одержуємо, що

$$\int_0^u \delta(s) ds \leq K(u+1) \text{ м.н., де } K = K(\omega) < \infty \text{ м.н. Покажемо, що } \int_0^\infty \frac{\delta(u)}{(u+1)^2} du < \infty \text{ м.н.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\delta(u)}{(u+1)^2} du = \int_0^\infty \frac{\delta(s) ds}{(u+1)^2} \Big|_0^\infty + 2 \int_0^\infty \left(\int_0^u \delta(s) ds \right) \frac{du}{(u+1)^3} \leq \overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_0^u \delta(s) ds}{(u+1)^2} + 2 \int_0^\infty \frac{K(u+1)}{(u+1)^3} du < \infty$$

Тому, оскільки $\int_0^\infty \frac{g(X^{T_n}(u))}{u+1} dW(u)$ є локальним мартингалом, досить довести що $\int_0^t \frac{g(X^{T_n}(u))}{u+1} dW(u)$ є обмеже-

ним в L^2 мартингалом:

$$E \left(\int_0^t \frac{g(X^{T_n}(u))}{u+1} dW(u) \right)^2 = \int_0^t E g^2(X^{T_n}(u)) \frac{1}{(u+1)^2} du \leq \int_0^t EX^{T_n}(u) \frac{b^2}{(u+1)^2} du.$$

Оцінимо останній інтеграл. Для цього зауважимо, що

$$EX^{T_n}(u) = EX(u)1_{\{u \leq T_n\}} \leq e^{2\beta u} E(e^{-2\beta u} X(u)1_{\{u \leq T_n\}}) \leq e^{2\beta u} E(e^{-2\beta(u \wedge T_n)} X(u \wedge T_n)).$$

З леми 1 маємо, що

$$E(e^{-2\beta(s \wedge T_n)} X_{s \wedge T_n}) = X(0) + E \int_0^{s \wedge T_n} e^{-2\beta u} \delta(u) du.$$

Тому

$$EX^{T_n}(u) \leq e^{2\beta u} \left(X(0) + E \int_0^{u \wedge T_n} e^{-2\beta s} \delta(s) ds \right) \leq e^{2\beta u} X(0) + e^{2\beta u} \int_0^u e^{-2\beta s} E(\delta(s)1_{\{s \leq T_n\}}) ds.$$

Скориставшись цим результатом, одержуємо

$$\int_0^t EX^{T_n}(u) \frac{1}{(u+1)^2} du \leq \int_0^t X(0) \frac{e^{2\beta u}}{(u+1)^2} du + \int_0^t \frac{e^{2\beta u}}{(u+1)^2} du \int_0^u e^{-2\beta s} E(\delta(s)1_{\{s \leq T_n\}}) ds.$$

Очевидно, перший доданок рівномірно обмежений по t . Доведемо те саме для другого доданку. Застосуємо теорему Фубіні:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{e^{2\beta u}}{(u+1)^2} du \int_0^u e^{-2\beta s} E(\delta(s)1_{\{s \leq T_n\}}) ds &= \int_0^t e^{-2\beta s} E(\delta(s)1_{\{s \leq T_n\}}) ds \int_s^t \frac{e^{2\beta u}}{(u+1)^2} du \leq \\ &\leq \int_0^t E(\delta(s)1_{\{s \leq T_n\}}) \frac{1}{(s+1)^2} \left(\frac{-1}{2\beta} \right) ds \leq \frac{-1}{2\beta} E \int_0^{T_n} \frac{\delta(s)}{(s+1)^2} ds \leq \frac{-n}{2\beta}. \end{aligned}$$

Тепер доведемо, що $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{q(X(s), y)}{2\beta(t+1)} \tilde{\nu}(ds, dy)$ збігається до нуля м.н. при $t \rightarrow \infty$. Для цього покажемо, що $\frac{1}{t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} q(X(s), y) \tilde{\nu}(ds, dy) \rightarrow 0$ м.н. при $t \rightarrow \infty$. Оскільки розглядаємо граничну поведінку при $t \rightarrow \infty$, то можемо вважати $t \geq 1$.

$$\begin{aligned} P\left\{ \sup_{A \leq t \leq A_1} \frac{1}{t} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} q(X(s), y) \tilde{\nu}(ds, dy) \right| > \varepsilon \right\} &\leq P\left\{ \sup_{A \leq t \leq A_1} \frac{1}{A} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} q(X(s), y) \tilde{\nu}(ds, dy) \right| > \varepsilon \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{A^2 \varepsilon^2} E \left(\int_0^{A_1} \int_{\mathbb{R}} q(X(s), y) \tilde{\nu}(ds, dy) \right)^2 \leq \frac{1}{A^2 \varepsilon^2} E \int_0^{A_1} \int_{\mathbb{R}} q^2(X(s), y) \Pi(dy) ds \leq \frac{CA_1}{A^2 \varepsilon^2}, \end{aligned}$$

де в останній нерівності ми скористались умовою 2) на коефіцієнти рівняння.

$$\begin{aligned} P\left\{ \sup_{A \leq t} \frac{1}{t} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} q(X(s), y) \tilde{\nu}(ds, dy) \right| > \varepsilon \right\} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{ \sup_{A \cdot 2^k \leq t \leq A \cdot 2^{k+1}} \frac{1}{t} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} q(X(s), y) \tilde{\nu}(ds, dy) \right| > \varepsilon \right\} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{CA \cdot 2^{k+1}}{\varepsilon^2 A^2 \cdot 2^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{\varepsilon^2 A \cdot 2^{k-1}} = \frac{4C}{\varepsilon^2 A}. \end{aligned}$$

Величина

$$\alpha(A) = \sup_{t \geq A} \frac{1}{t} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} q(X(s), y) \tilde{\nu}(ds, dy) \right|$$

монотонно спадає при $A \rightarrow \infty$ і, значить, існує границя $\alpha = \lim_{A \rightarrow \infty} \alpha(A)$. Тоді

$$P\{\alpha > \varepsilon\} = \lim_{A \rightarrow \infty} P\{\alpha(A) > \varepsilon\} = 0,$$

звідки одержуємо, що $\frac{1}{t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} q(X(s), y) \tilde{\nu}(ds, dy) \rightarrow 0$ м.н.

Для того, щоб оцінити третій доданок в (5), скористаємось зображенням (3):

$$\frac{X(t)}{t+1} = \frac{e^{2\beta t} X(0)}{t+1} + \int_0^t \frac{e^{2\beta(t-u)}}{t+1} \delta(u) du + \int_0^t \frac{e^{2\beta(t-u)}}{t+1} g(X(u)) dW(u) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\beta(t-u)}}{t+1} q(X(u), y) \tilde{\nu}(du, dy). \quad (6)$$

Оскільки за умов теореми $\frac{1}{s+1} \int_0^s \delta(u) du \rightarrow \bar{\delta}$ м.н., то другий доданок можна зробити як завгодно малим, оскільки для всіх $\omega \in \Omega$ та для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{t+1} \int_0^t e^{2\beta(t-u)} \delta(\omega, u) du \leq \frac{1}{t+1} \int_0^{t-\sqrt{t}} e^{2\beta\sqrt{t}} \delta(\omega, u) du + \frac{1}{t+1} \int_{t-\sqrt{t}}^t \delta(\omega, u) du.$$

При заданому $\varepsilon > 0$ перший доданок можемо представити у вигляді

$$\frac{1}{t+1} \int_0^{t-\sqrt{t}} e^{2\beta\sqrt{t}} \delta(\omega, u) du \leq \frac{1}{t+1-\sqrt{t}} \int_0^{t-\sqrt{t}} e^{2\beta\sqrt{t}} \delta(\omega, u) du \leq \bar{\delta}(1+\varepsilon)e^{2\beta\sqrt{t}}.$$

Тому перший доданок збігається до нуля при $t \rightarrow \infty$. Те саме справедливо і для другого доданку. Дійсно:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t+1} \int_{t-\sqrt{t}}^t \delta(\omega, u) du &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t+1} \int_0^t \delta(\omega, u) du - \frac{1}{t+1-\sqrt{t}} \int_0^{t-\sqrt{t}} \delta(\omega, u) du \right) + \\ &+ \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{t+1} + \frac{1}{t+1-\sqrt{t}} \right) \times \int_0^{t-\sqrt{t}} \delta(\omega, u) du = \bar{\delta} - \bar{\delta} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t}}{t+1} \frac{1}{t+1-\sqrt{t}} \times \int_0^{t-\sqrt{t}} \delta(\omega, u) du = 0. \end{aligned}$$

Щоб довести, що $\frac{e^{2\beta t}}{t+1} \int_0^t e^{-2\beta u} g(X(u)) dW(u)$ збігається до нуля м.н., знову застосуємо лему Кронекера та доводимо існування $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2\beta t} g(X(t))}{(t+1)e^{-2\beta t}} dW(t)$. Оскільки останній інтеграл рівний $\int_0^{\infty} \frac{g(X(t))}{t+1} dW(t)$, то результат випливає із попередніх розрахунків.

Збіжність при $t \rightarrow \infty$ до нуля м.н. останнього доданку правої частини рівності (6) доводиться так само, як і збіжність до нуля м.н. другого доданку правої частини рівності (5). \square

Двофакторна стохастична модель відсоткової ставки

У цьому розділі ми розглянемо застосування теореми 1. Досліджуємо узагальнену двофакторну CIR-модель відсоткової ставки, перше із стохастичних рівнянь якої моделює динаміку миттєвої відсоткової ставки, а друге – стан фінансового ринку, на якому ми вивчаємо граничну поведінку довгострокової стави:

$$\begin{aligned} dr(t) &= k_1(\gamma(t) - r(t))dt + \sigma_1 \sqrt{r(t)} dW_1(t) + \int_{\mathbb{R}} q_1(r(t), y) \tilde{\nu}_1(dt, dy), \\ d\gamma(t) &= k_2(\gamma^* - \gamma(t))dt + \sigma_2 \sqrt{\gamma(t)} dW_2(t) + \int_{\mathbb{R}} q_2(\gamma(t), y) \tilde{\nu}_2(dt, dy), \end{aligned}$$

$k_1, k_2, \sigma_1, \sigma_2, \gamma^*$ – додатні сталі; W_1, W_2 – вінерівські процеси; $\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2$ – центровані пуассонівські міри; $q_1(x, y), q_2(x, y)$ – не випадкові вимірні функції, що задовольняють умови 2), 3) та 5). Нас цікавить гранична поведінка при $t \rightarrow \infty$ довгострокової відсоткової ставки $\frac{1}{t} \int_0^t r(s) ds$.

Розглянемо спочатку друге рівняння моделі. Перетворення $Y(t) = \frac{4}{\sigma_2^2} \gamma(t)$ є розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dY(t) = \left(-k_2 Y(t) + \frac{4k_2 \gamma^*}{\sigma_2^2}\right) dt + 2\sqrt{Y(t)} dW_1(t) + \int_{\mathbb{R}} \frac{4}{\sigma_2^2} q_2\left(Y(t) \frac{\sigma_2^2}{4}, y\right) \tilde{\nu}_2(dt, dy),$$

тобто рівняння типу (2) із наступними коефіцієнтами:

$$\beta = -\frac{k_2}{2}, \delta(t) = \frac{4k_2 \gamma^*}{\sigma_2^2} \quad \forall t \in \mathbf{R}_+, \quad g(x) = 2\sqrt{x}, \quad q(x, y) = \frac{4}{\sigma_2^2} q_2\left(x \frac{\sigma_2^2}{4}, y\right).$$

Умови теореми 1, очевидно, виконуються, тому має місце збіжність $\frac{1}{t} \int_0^t Y(s) ds \rightarrow \frac{4\gamma^*}{\sigma_2^2}$ при $t \rightarrow \infty$ м.н. Тому $\frac{1}{t} \int_0^t \gamma(s) ds \rightarrow \gamma^*$ м.н. при $t \rightarrow \infty$.

Так само розглядаємо перше рівняння моделі. Перетворення $X(t) = \frac{4r(t)}{\sigma_1^2}$ є розв'язком рівняння типу (2) із наступними коефіцієнтами:

$$\beta = -\frac{k_1}{2}, \delta(t) = \frac{4k_1}{\sigma_1^2} \gamma(t), \quad g(x) = 2\sqrt{x}, \quad q(x, y) = \frac{4}{\sigma_1^2} q_1\left(x \frac{\sigma_1^2}{4}, y\right).$$

Зауважимо, що

$$\frac{1}{t} \int_0^t \delta(s) ds = \left(\frac{1}{t} \int_0^t \gamma(s) ds\right) \frac{4k_1}{\sigma_1^2} \rightarrow \gamma^* \frac{4k_1}{\sigma_1^2} \text{ м.н.}$$

Застосувавши теорему 1 маємо збіжність $\frac{1}{t} \int_0^t X(s) ds \rightarrow \frac{4\gamma^*}{\sigma_1^2}$. Тому одержуємо наступну збіжність при $t \rightarrow \infty$ довгострокової відсоткової ставки у двофакторній CIR-моделі: $\frac{1}{t} \int_0^t r(s) ds \rightarrow \gamma^*$.

Висновки

Дослідження стохастичних диференціальних рівнянь із лінійним коефіцієнтом зносу та додатковою випадковістю, неліпшицевою дифузиею та зі стрибковою частиною представляє особливий інтерес із практичної точки зору. Рівняння такого типу можуть бути використані для моделювання відсоткових ставок фінансових ринків, що у певні моменти часу мають стрибки.

У роботі досліджено збіжність довгострокової відсоткової ставки в узагальненій стохастичній моделі Кокса-Інгерсолла-Росса миттєвої відсоткової ставки із лінійним коефіцієнтом зносу та додатковою випадковістю, неліпшицевою дифузиею та центрованою пуассонівською мірою. Одержаний результат використано для дослідження граничної поведінки довгострокової відсоткової ставки у двофакторній моделі.

1. Зубченко В. Властивості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь із лінійним коефіцієнтом зносу та додатковою випадковістю, неліпшицевою дифузиею та з пуассонівськими мірами // Теорія ймовірностей та математична статистика. Подано до друку. 2. Cox J., Ingersoll J. and S.A. Ross. A theory of the term structure of interest rate // Econometrica. – 1985. – Vol. 53. – P. 385-407. 3. Deelstra G. and Delbaen F. Long-term returns in stochastic interest rate models // Insurance: Mathematics and Economics. – 1995. №17. – P.163-169. 4. Lamberton D. and Lapeyre B. Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. – Chapman & Hall, London, Weinheim, New York, 1991. 5. Revuz D. and Yor M. Continuous Martingales and Brownian motion. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1991.

Надійшла до редакції 01.10.09

УДК 519.21

Я. Яценко, студ.
E-mail: yaryat@ua.fm

ФОРМУЛИ ЗНАХОДЖЕННЯ МАКСИМІЗАТОРА ЕКСПОНЕНЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ КОРИСНОСТІ В БІНОМІАЛЬНІЙ МОДЕЛІ РИНКУ

Знайдено формулу для максимізатора експоненційної функції корисності в біноміальній моделі повного ринку.
Formula for maximizer of exponential utility function in binomial model of complete market is given.

1. Вступ

Розглянемо просту одноперіодну модель фінансового ринку. Нехай маємо безризиковий актив і $n-1$ ризикових активів, ціна яких $S_i(t), t=0, 1, i=1, n-1$, визначена у моменти часу 0 і 1. Початкова ціна $S_i(0) = \pi_i \neq 0, i=1, n-1$,

відома, ціна у момент часу 1 є випадковою величиною. Вважаємо, що ймовірнісний простір $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ з σ -алгеброю $F = 2^\Omega$. В момент 1 у випадку $\omega = \omega_j$ маємо $S_i(1) = (1 + a_i^j)\pi_i$, $a_i^j > -1, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, n}$. У момент 0 інвестор вибирає собі портфель $(\xi_0, \xi) = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, де ξ_i – кількість i -го активу, нульовий актив є безризиковим. Відсоткова ставка дорівнює $r > 0$. Розглянемо ті ймовірнісні міри $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, визначені на нашому просторі, для яких всі $p_i > 0$.

Означення 1. Міра P^* називається нейтральною до ризику, якщо

$$\pi_i = E^* \left[\frac{S_i(1)}{1+r} \right], i = \overline{1, n-1}, \tag{1}$$

де математичне сподівання береться за мірою P^* .

Кількість ризикових активів $n-1$ та $|\Omega| = n$ обрано для коректності визначення величин, зокрема визначників, введених далі та для єдиності нейтральної до ризику міри за умови її існування.

Означення 2. Функція $U: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ називається функцією корисності, якщо вона неперервна, строго опукла вгору і строго монотонно зростає.

В даній роботі ми розглядаємо експоненційну функцію корисності $U(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$.

Відомо, що існування єдиної нейтральної до ризику міри еквівалентне до безарбітражності та повноти ринку ([1, розділ 1]). Метою даної роботи є встановлення умов безарбітражності і повноти описаного ринку і обчислення явно-го вигляду стратегії, яка максимізує середню корисність у нашій моделі. Також буде отримано незалежне доведення теореми 1, сформульованої нижче, у частковому випадку нашого ринку.

Поставлена задача є актуальною, оскільки біноміальна модель ринку дає непогане наближення до реального ринку, а експоненційна функція корисності відповідає певним вподобанням інвесторів. Знайдений явний вигляд оптимального портфелю потенційно може дати уявлення про узагальнений розв'язок в неперервній моделі з експоненційною функцією корисності.

2. Теорема про максимізацію функції корисності

Означення 3. Дисконтованим вектором чистих доходів називається вектор $Y = (Y_1, \dots, Y_{n-1})$: $Y_i = \frac{S_i(1)}{1+r} - \pi_i$.

Вважаємо, що не схильний до ризику інвестор, не обмежений у коштах, вибирає інвестиційний портфель за критерієм отримання максимальної середньої корисності. Вектор ξ може набувати як від'ємних, так і додатніх значень. В [1, розділ 3] показано, що середня корисність від портфелю $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ дорівнює $E[U(\xi \cdot Y)]$, де математичне сподівання береться за об'єктивною мірою $P = \{p_1, \dots, p_n\}, p_j > 0, j = \overline{1, n}$. Справедлива теорема [1, с.107].

Теорема 1. Точка максимуму середньої корисності $E[U(\xi \cdot Y)]$ існує і при цьому єдина тоді і тільки тоді, коли існує нейтральна до ризику міра P^* .

3. Вираз для оптимального портфелю

Знайдемо умови, за яких ринок буде безарбітражним, тобто виконуються умови існування максимізатора середньої корисності.

Позначимо $\Delta_j = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ a_1^1 & a_1^2 & \dots & r & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & \dots & r & \dots & a_{n-1}^n \end{vmatrix}, j = \overline{1, n}, \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^j & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^j & \dots & a_{n-1}^n \end{vmatrix}$. Справедлива лема:

Лема 1. Ринок є безарбітражним і повним тоді і тільки тоді, коли $\Delta \neq 0$ і для всіх $j = \overline{1, n}$ справджуються нерівності: $0 < \frac{\Delta_j}{\Delta} < 1$.

Доведення.

Необхідність. Припустимо, що ринок безарбітражний і повний, тоді існує єдина нейтральна до ризику міра $P^* = \{p_1^*, \dots, p_n^*\}$, яка є розв'язком рівнянь (1). Тоді з цих рівнянь одержуємо

$$\frac{1+a_i^1}{1+r} p_1^* \pi_i + \frac{1+a_i^2}{1+r} p_2^* \pi_i + \dots + \frac{1+a_i^n}{1+r} p_n^* \pi_i = \pi_i, i = \overline{1, n-1}.$$

Оскільки всі $\pi_i \neq 0$, то з попередніх рівностей випливає, що $\frac{1+a_i^1}{1+r} p_1^* + \frac{1+a_i^2}{1+r} p_2^* + \dots + \frac{1+a_i^n}{1+r} p_n^* = 1, i = \overline{1, n-1}$.

До того ж

$$p_1^* + \dots + p_n^* = 1. \tag{2}$$

Домножимо передостанню рівність на $(1+r)$ і користуючись (2), отримаємо:

$$a_i^1 p_1^* + a_i^2 p_2^* + \dots + a_i^n p_n^* = r, i = \overline{1, n-1}. \quad (3)$$

Використовуючи рівності (2) і (3), одержимо матричне рівняння для знаходження $P^* = \{p_1^*, \dots, p_n^*\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^n \end{pmatrix} P^* = \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ \dots \\ r \end{pmatrix} \quad (4)$$

Існує і єдиний розв'язок $P^* = \{p_1^*, \dots, p_n^*\}$ в класі тих векторів з \mathfrak{R}^n , які задовольняють умови: $p_1^* + \dots + p_n^* = 1$, $p_j^* > 0, j = \overline{1, n}$. Покажемо, що в \mathfrak{R}^n не існує іншого розв'язку, відмінного від P^* . Припустимо, що $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ - розв'язок (4), відмінний від P^* . Оскільки для довільного ε $y_j = \varepsilon x_j + (1 - \varepsilon) p_j^*, j = \overline{1, n}$, теж розв'язок і існує таке $\varepsilon > 0$, що $y_j > 0$ для довільного $j = \overline{1, n}$, то отримали ще один розв'язок, який є імовірнісною мірою. А це суперечить єдиності розв'язку (4) в класі імовірнісних мір. Отже в \mathfrak{R}^n існує і єдиний розв'язок системи (4), тому $\Delta \neq 0$.

За формулою Крамера з (4) знаходимо P^* : $p_j^* = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = \overline{1, n}$, де j -тий стовпчик визначника в чисельнику замінюється на $(1, r, \dots, r)^T$. Оскільки P^* - нейтральна до ризику міра і $p_j^* = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, то $0 < \frac{\Delta_j}{\Delta} < 1$ для кожного j .

Достатність. Припустимо, що $\Delta \neq 0$ і для кожного $j = \overline{1, n}$ виконується нерівність: $0 < \frac{\Delta_j}{\Delta} < 1$. Покажемо, що існує єдина нейтральна до ризику міра P^* . Справді, компоненти цієї міри, якщо вона існує, повинні задовольняти систему (4). Ця система, за припущенням, має єдиний розв'язок, який і буде єдиною нейтральною до ризику ймовірнісною мірою, а це означає, що ринок є повним і безарбітражним.

Лему 1 доведено.

Перейдемо до задачі максимізації функції корисності $E[U(\xi \cdot Y)]$. Наведемо допоміжний результат.

Лема 2. Для $b_n := \begin{vmatrix} a_1^1 - r & \dots & a_1^j - r & \dots & a_1^{n-1} - r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}^1 - r & \dots & a_{n-1}^j - r & \dots & a_{n-1}^{n-1} - r \end{vmatrix}, b_j := \begin{vmatrix} a_1^1 - r & \dots & r - a_1^n & \dots & a_1^{n-1} - r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}^1 - r & \dots & r - a_{n-1}^n & \dots & a_{n-1}^{n-1} - r \end{vmatrix}, j = \overline{1, n-1}$ справ-

джуються співвідношення: $b_j = \Delta_j (-1)^{n+1}, j = \overline{1, n}$, де $\Delta_j, j = \overline{1, n}$, означені вище.

Доведення лема 2 легко отримати, використавши властивості визначників.

Розглянемо функцію середньої корисності $E[U(\xi \cdot Y)]$, яку потрібно максимізувати.

Теорема 2. Визначники Δ і $\Delta_j, j = \overline{1, n}$ задовольняють умови $\Delta \neq 0$ і для кожного $j = \overline{1, n}$: $0 < \frac{\Delta_j}{\Delta} < 1$ тоді і тільки тоді, коли портфель-максимізатор середнього $E[U(\xi \cdot Y)]$ існує, єдиний і має вигляд

$$\xi_i = -\frac{1+r}{\alpha \pi_i} \frac{\begin{vmatrix} a_1^1 - a_1^2 & \dots & \ln \frac{p_2^*}{p_1^*} - \ln \frac{p_1^*}{p_1^*} & \dots & a_{n-1}^1 - a_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^1 - a_1^n & \dots & \ln \frac{p_n^*}{p_1^*} - \ln \frac{p_1^*}{p_1^*} & \dots & a_{n-1}^1 - a_{n-1}^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^1 - a_1^2 & \dots & a_1^1 - a_1^2 & \dots & a_{n-1}^1 - a_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^1 - a_1^n & \dots & a_1^1 - a_1^n & \dots & a_{n-1}^1 - a_{n-1}^n \end{vmatrix}}, i = \overline{1, n-1}, \text{ де } p_j^* = \frac{\Delta_j}{\Delta}. \quad (5)$$

Доведення.

Необхідність. Введемо функцію $f(\xi)$, яка рівна середній корисності від портфелю ξ :

$$\begin{aligned} f(\xi) &:= E[U(\xi \cdot Y)] = p_1 U(\xi_1 (\frac{1+a_1^1}{1+r} \pi_1 - \pi_1)) + \dots + \xi_{n-1} (\frac{1+a_{n-1}^1}{1+r} \pi_{n-1} - \pi_{n-1}) + \dots + \\ &+ p_n U(\xi_1 (\frac{1+a_1^n}{1+r} \pi_1 - \pi_1) + \dots + \xi_{n-1} (\frac{1+a_{n-1}^n}{1+r} \pi_{n-1} - \pi_{n-1})) = \\ &= p_1 U(\xi_1 \frac{a_1^1 - r}{1+r} \pi_1 + \dots + \xi_{n-1} \frac{a_{n-1}^1 - r}{1+r} \pi_{n-1}) + \dots + p_n U(\xi_1 \frac{a_1^n - r}{1+r} \pi_1 + \dots + \xi_{n-1} \frac{a_{n-1}^n - r}{1+r} \pi_{n-1}) = \sum_{j=1}^n p_j U(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \pi_i \frac{a_i^j - r}{1+r}). \end{aligned}$$

Покажемо, що функція $f(\xi)$ є опуклою вгору. Для довільних $\lambda \in [0, 1], \xi, \eta \in \mathfrak{R}^{n-1}$ маємо:

$$\begin{aligned} f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) &= \sum_{j=1}^n p_j U\left(\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda\xi_i + (1-\lambda)\eta_i)\pi_i \frac{a_i^j - r}{1+r}\right) = \sum_{j=1}^n p_j U\left(\lambda \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \pi_i \frac{a_i^j - r}{1+r} + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \pi_i \frac{a_i^j - r}{1+r}\right) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n p_j \left(\lambda U\left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \pi_i \frac{a_i^j - r}{1+r}\right) + (1-\lambda) U\left(\sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \pi_i \frac{a_i^j - r}{1+r}\right)\right) = \lambda U\left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \pi_i \frac{a_i^j - r}{1+r}\right) + (1-\lambda) U\left(\sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \pi_i \frac{a_i^j - r}{1+r}\right) = \\ &= \lambda f(\xi) + (1-\lambda) f(\eta), \end{aligned}$$

де ми використали опуклість вгору функції U .

Отже, функція $f(\xi)$ є опуклою вгору. Якщо ми покажемо, що існує єдина критична точка, то вона буде точкою максимуму функції. Для пошуку точки максимуму знайдемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_i} = \sum_{j=1}^n p_j \pi_i \frac{a_i^j - r}{1+r} U' \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \pi_i \frac{a_i^j - r}{1+r} \right) = 0, i = \overline{1, n-1}, \pi_i \neq 0, \text{ тоді } \sum_{j=1}^n p_j \frac{a_i^j - r}{1+r} U' \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \pi_i \frac{a_i^j - r}{1+r} \right) = 0, i = \overline{1, n-1}.$$

Оскільки $U'(z) = \alpha e^{-\alpha z}$, то $\sum_{j=1}^n p_j (a_i^j - r) \alpha \exp[-\alpha \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \pi_i \frac{a_i^j - r}{1+r}] = 0, i = \overline{1, n-1}, \alpha \neq 0$, звідки

$$\sum_{j=1}^n p_j (a_i^j - r) \exp[-\alpha \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \pi_i \frac{a_i^j - r}{1+r}] = 0, i = \overline{1, n-1}. \tag{6}$$

Виконаємо послідовно дві заміни. Спочатку замінимо $\zeta_i := \exp(-\alpha \xi_i \pi_i \frac{1}{1+r}), i = \overline{1, n-1}$. Тоді (6) переписеться у вигляді $\sum_{j=1}^n p_j (a_i^j - r) \prod_{i=1}^{n-1} \zeta_i^{a_i^j - r} = 0, i = \overline{1, n-1}$. Далі замінимо $y_j := p_j \prod_{i=1}^{n-1} \zeta_i^{a_i^j - r}, j = \overline{1, n}$, тоді з попередньої рівності одержимо

$$\sum_{j=1}^n (a_i^j - r) y_j = 0, i = \overline{1, n-1}. \tag{7}$$

Отримали лінійну систему з $n-1$ рівнянь та n невідомих. Оскільки y_j не рівні нулеві, то поділимо кожне рівняння з (7) на y_n та перенесемо останній доданок у ліву частину. Одержимо:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (a_i^j - r) \frac{y_j}{y_n} = r - a_i^n, i = \overline{1, n-1} \text{ або в матричному вигляді рівняння відносно } \frac{y_j}{y_n} :$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 - r & \dots & a_1^{n-1} - r \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}^1 - r & \dots & a_{n-1}^{n-1} - r \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} r - a_1^n \\ \dots \\ r - a_{n-1}^n \end{pmatrix}, \text{ де } Z = \left(\frac{y_1}{y_n}, \frac{y_2}{y_n}, \dots, \frac{y_{n-1}}{y_n} \right)^T. \text{ При введених вище позначеннях для } b_j, j = \overline{1, n},$$

можемо формально записати розв'язок: $\frac{y_j}{y_n} = \frac{b_j}{b_n}$, звідки

$$\frac{y_1}{b_1} = \frac{y_2}{b_2} = \dots = \frac{y_n}{b_n}. \tag{8}$$

За лемою 2 маємо: $b_j = \Delta_j (-1)^{n+1}, j = \overline{1, n}$, тому $b_j \neq 0$. Враховуючи другу заміну, з (8) отримаємо

$$\frac{p_1 \prod_{i=1}^{n-1} \zeta_i^{a_i^1 - r}}{b_1} = \frac{p_2 \prod_{i=1}^{n-1} \zeta_i^{a_i^2 - r}}{b_2} = \dots = \frac{p_n \prod_{i=1}^{n-1} \zeta_i^{a_i^n - r}}{b_n}, \text{ тоді } \prod_{i=1}^{n-1} \zeta_i^{a_i^1 - r} \frac{p_1}{b_1} = \prod_{i=1}^{n-1} \zeta_i^{a_i^j - r} \frac{p_j}{b_j}, j = \overline{2, n}. \text{ Звідси знаходимо}$$

$$\prod_{i=1}^{n-1} \zeta_i^{a_i^1 - a_i^j} = \frac{p_j b_1}{p_1 b_j} =: c_j, j = \overline{2, n}. \tag{9}$$

Покажемо, що $c_j > 0$. З (9) $c_j = \frac{p_j b_1}{p_1 b_j} = \frac{p_j (-1)^{n+1} \Delta_1}{p_1 (-1)^{n+1} \Delta_j} = \frac{p_j \Delta_1}{p_1 \Delta_j} = \frac{p_j}{p_1} \frac{\Delta_1}{\Delta_j}$, отже можемо брати логарифм від c_j .

Прологарифмуємо рівність (9): $\sum_{i=1}^{n-1} (a_i^1 - a_i^j) \ln \zeta_i = \ln c_j, j = \overline{2, n}$.

Перепишемо отриману рівність в матричному вигляді з метою відшукування $\ln \zeta_i$:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 - a_1^2 & \dots & a_{n-1}^1 - a_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^1 - a_1^n & \dots & a_{n-1}^1 - a_{n-1}^n \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} \ln c_2 \\ \dots \\ \ln c_n \end{pmatrix}, \text{ де } Z = (\ln \zeta_1, \ln \zeta_2, \dots, \ln \zeta_{n-1})^T.$$

Позначимо $\tau = \begin{vmatrix} a_1^1 - a_1^2 & \dots & \ln c_2 & \dots & a_{n-1}^1 - a_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^1 - a_1^n & \dots & \ln c_n & \dots & a_{n-1}^1 - a_{n-1}^n \end{vmatrix}, \nu = \begin{vmatrix} a_1^1 - a_1^2 & \dots & a_1^1 - a_1^2 & \dots & a_{n-1}^1 - a_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^1 - a_1^n & \dots & a_1^1 - a_1^n & \dots & a_{n-1}^1 - a_{n-1}^n \end{vmatrix}$. Тоді з матричного рівняння маємо: $\ln \zeta_i = \frac{\tau}{\nu}$.

Знаменник не дорівнює нулю, бо віднявши у ненульовому визначнику Δ від кожного стовпчика, крім першого, перший, і розклавши за першим рядком, в якому всі елементи, крім першого, дорівнюють нулю, отримаємо визначник транспонованої матриці знаменника, помножений на (-1) в певній степені.

Повертаючись до першої заміни, маємо $\zeta_i := \exp(-\alpha \xi_i \pi_i \frac{1}{1+r}), i = \overline{1, n-1}$, звідки одержимо

$$\xi_i = -\frac{(1+r) \ln \zeta_i}{\alpha \pi_i} = -\frac{1+r}{\alpha \pi_i} \frac{\tau}{\nu}, i = \overline{1, n-1}.$$

Отримали єдину критичну точку функції f , а отже вона є точкою максимуму.

Покажемо, що отриманий результат можна записати з урахуванням існування ризик-нейтральної міри $P^* = \{p_1^*, \dots, p_n^*\}$:

За лемою 1 $p_j^* = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, отже $c_j = \frac{p_j b_1}{p_1 b_j} = \frac{p_j \Delta_1}{p_1 \Delta_j} = \frac{p_j p_1^* \Delta}{p_1 p_j^* \Delta} = \frac{p_j p_1^*}{p_1 p_j^*}$, $\ln c_j = \ln \frac{p_j}{p_j^*} - \ln \frac{p_1}{p_1^*}$ і остаточна формула

матиме вигляд

$$\xi_i = -\frac{1+r}{\alpha \pi_i} \frac{\tau}{\nu} = -\frac{1+r}{\alpha \pi_i} \frac{\begin{vmatrix} a_1^1 - a_1^2 & \dots & \ln \frac{p_2}{p_2^*} - \ln \frac{p_1}{p_1^*} & \dots & a_{n-1}^1 - a_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^1 - a_1^n & \dots & \ln \frac{p_n}{p_n^*} - \ln \frac{p_1}{p_1^*} & \dots & a_{n-1}^1 - a_{n-1}^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^1 - a_1^2 & \dots & a_1^1 - a_1^2 & \dots & a_{n-1}^1 - a_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^1 - a_1^n & \dots & a_1^1 - a_1^n & \dots & a_{n-1}^1 - a_{n-1}^n \end{vmatrix}}, i = \overline{1, n-1}.$$

Достатність.

З існування та єдиності максимізатора випливає, що він повинен задовольняти рівняння(6). Тоді $y_j, j = \overline{1, n}$, визначені в доведенні необхідності, належать проміжку (0,1) як добуток імовірності на експоненти в недодатній степені. З рівності (8) випливає, що b_1, \dots, b_n мають однакові знаки, за лемою 2 $b_j = \Delta_j (-1)^{n+1}, j = \overline{1, n}$, отже і $\Delta_1, \dots, \Delta_n$

мають однакові знаки. Оскільки $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^j & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^j & \dots & a_{n-1}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ a_1^1 - r & a_1^2 - r & \dots & a_1^j - r & \dots & a_1^n - r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}^1 - r & a_{n-1}^2 - r & \dots & a_{n-1}^j - r & \dots & a_{n-1}^n - r \end{vmatrix}$,

$\Delta_j = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ a_1^1 & a_1^2 & \dots & r & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & \dots & r & \dots & a_{n-1}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ a_1^1 - r & a_1^2 - r & \dots & 0 & \dots & a_1^n - r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}^1 - r & a_{n-1}^2 - r & \dots & 0 & \dots & a_{n-1}^n - r \end{vmatrix}, j = \overline{1, n}$, то розклавши Δ і Δ_j за першим

рядком і j -тим стовпчиком відповідно, отримаємо $\Delta = \sum_{j=1}^n \Delta_j$, звідси випливає $\Delta \neq 0$ і для кожного $j = \overline{1, n} : 0 < \frac{\Delta_j}{\Delta} < 1$.

Теорему доведено.

4. Висновки

Отримано явний вираз для портфелю, який максимізує очікувану середню корисність для експоненційної функції корисності в біноміальній моделі ринку для довільної скінченної кількості активів і дано нове доведення теореми 1 в частковому випадку. Як допоміжний результат отримано умови безарбітражності і повноти в біноміальній моделі ринку з довільною скінченною кількістю активів, знайдено явні формули для складових міри, нейтральної до ризику.

1. Фелльмер Г., Шид А. Стохастические финансы. Дискретное время. Введение. – М., 2008.

УДК 512.53

М. Сумарюк, асп.

СТЕПЕНЕВІ РЯДИ, ЩО ПОРОДЖУЮТЬ ВІЛЬНІ НАПІВГРУПИ

Наводяться нові достатні умови аналітичного характеру при виконанні яких, напівгрупа породжена елементарними функціями, що розкладаються у степеневі ряди певного вигляду, буде вільною напівгрупою.

New sufficient conditions of analytical character are determined. Under their implementation the semigroup generated by elementary functions, which is developing into power series of some sort, will be a free semigroup.

1. Вступ

У теорії вільних конструкцій груп та напівгруп важливим напрямком досліджень є побудова конкретних зображень таких вільних конструкцій за допомогою різноманітних геометричних або алгебро-комбінаторних об'єктів. Це, наприклад, зображення Магнуса формальними степеневими рядами [2], зображення унітрикутними матрицями нескінченного порядку [3], зображення вільних груп у вінцевих добутках [1] і т.ін.

Найчастіше будуються приклади вільних 2-породжених груп (напівгруп), тобто будується зображення вільної групи (напівгрупи) рангу 2, бо добре відомо, що така група (напівгрупа) містить ізоморфну копію будь-якої вільної групи (напівгрупи) скінченного або зліченного рангу.

Серед всіх зображень вільних алгебраїчних конструкцій, виділяються зображення елементарними функціями над полями нульової характеристики відносно дії суперпозиції функцій. Зокрема, у роботах Коена [4] та Уайта [5] доводиться, що перетворення дійсного або комплексного поля $f_1 : x \rightarrow x+1$ та $f_2 : x \rightarrow x^q$, де $q > 1$ – фіксоване непарне натуральне число у випадку поля \mathbb{R} і довільне натуральне число у випадку поля \mathbb{C} , породжують вільну групу (напівгрупу).

У даній роботі наводяться нові достатні умови абсолютної вільності напівгруп рангу 2, що породжуються функціями комплексної змінної, які розкладаються у степеневі ряди певного вигляду.

2. Допоміжні відомості

Нехай $f, g : \Omega \rightarrow \Omega$ – аналітичні функції, визначені у деякій області Ω комплексної площини \mathbb{C} такі, що мають місце їх розклади у степеневі ряди вигляду

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1} z^{2n-1}, \quad (1)$$

$$g(z) = b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n} z^{2n}, \quad (2)$$

які збігаються у даній області Ω .

Символом $N[\Omega]$ позначимо сукупність всіх аналітичних функцій $f : \Omega \rightarrow \Omega$, які розкладаються у степеневий ряд виду (1) і аналогічно, символом $P[\Omega]$ позначимо сукупність всіх аналітичних функцій $g : \Omega \rightarrow \Omega$, які розкладаються у степеневий ряд виду (2).

Має місце таке твердження.

Лема. Якщо $f_1, f_2 \in N[\Omega]$, $g_1, g_2 \in P[\Omega]$, то $f_1 \circ f_2 \in N[\Omega]$, $f_1 \circ g_1$, $g_1 \circ f_1$, $g_1 \circ g_2 \in P[\Omega]$, де \circ – операція суперпозиції функцій.

Сформульоване твердження впливає із властивостей суперпозиції степеневих рядів, тобто підстановки ряду в ряд і отримується безпосередньо.

Нехай $\phi : \Omega \rightarrow \Omega$ – деяка диференційовна функція. Тоді символом $\phi^{(n)}$ позначатимемо n -кратну суперпозицію функції ϕ , тобто

$$\phi^{(n)}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{(\phi \circ \phi \circ \dots \circ \phi)}_n(z), \quad z \in \Omega,$$

а її похідну записуватимемо так: $D_z \phi(z)$, де D_z – оператор диференціювання по змінній $z \in \Omega$.

3. Основна теорема та її застосування

Доведемо таке твердження.

Теорема 1. Нехай $f \in N[\Omega]$, $g \in P[\Omega]$ та виконуються наступні умови:

- 1) дані функції є сюр'єктивними;
- 2) довільна n -кратна суперпозиція $f^{(n)}(z)$, $z \in \Omega$, відмінна від тотожної функції $e : \Omega \rightarrow \Omega$;
- 3) множина дійсних чисел \mathbb{R} міститься в області Ω і функції $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є строго зростаючими на проміжку $[0; +\infty)$;

4) для довільного $x \in [0; +\infty)$ та натурального числа n похідна $D_x f^{(n)}(x)$ є додатною, причому $f(0) > 0$;

5) для довільного $x \in (0; +\infty)$ маємо $D_x g(x) > 0$.

Тоді напівгрупа S , що породжується функціями $f(z), g(z)$, $z \in \Omega$, є вільною напівгрупою рангу 2.

Доведення. Нехай $X = \{x_1, x_2\}$ – алфавіт з двох символів. Розглянемо два напівгрупові слова $u \equiv u(x_1, x_2)$, $v \equiv v(x_1, x_2)$ над алфавітом X , які відрізняються своїми записами у розумінні їх графічного порівняння. Знайдемо

значення цих напівгрупових слів на даних функціях $f \in N[\Omega]$, $g \in P[\Omega]$, відносно операції суперпозиції функцій і одержимо нові функції $u(f, g)$, $v(f, g)$.

Із наведеної лєми у попередньому пункті випливає, що для будь-якого натурального числа n суперпозиції $f^{(n)} \in N[\Omega]$, $g^{(n)} \in P[\Omega]$. Крім того, згідно з умовою 2 функція $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, відмінна від тотожної функції e , а суперпозиція $g^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, також відмінна від тотожної функції e , бо $e \notin P[\Omega]$. Тоді, напівгрупові слова $u(f, g)$, $v(f, g)$ є нескоротними або незвідними над множиною функцій $\{f, g\}$.

Отже, для доведення теореми слід показати, що тотожність

$$u(f(z), g(z)) \equiv v(f(z), g(z)), \quad z \in \Omega, \tag{3}$$

є невірною. Оскільки функції f та g визначені на \mathbb{R} (умова 3), то перевірку тотожності (3) достатньо здійснити на множині \mathbb{R} .

За умовою 1 функції f та g є сюр'єктивними функціями, звідки випливатиме, що напівгрупа S , породжена цими функціями, є напівгрупою із скороченням справа. Іншими словами, якщо має місце рівність виду $\varphi \circ h = \psi \circ h$, то $\varphi = \psi$ ($h, \varphi, \psi \in S$).

Таким чином, скориставшись цією властивістю можемо вважати, що напівгрупові слова u та v закінчуються різними літерами з множини $\{f, g\}$, бо якщо ці слова мають однакові закінчення, то у тотожності (3) можна справа виконувати операцію скорочення. Нехай для визначеності напівгрупове слово u закінчується літерою f , а напівгрупове слово v відповідно закінчується літерою g . Тоді $u(f, g) = \tilde{u}(f, g) \circ f^{(\alpha)}$, $v(f, g) = \tilde{v}(f, g) \circ g^{(\beta)}$, де $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, слово $\tilde{u}(f, g)$ або закінчується літерою g , або є порожнім; аналогічно слово $\tilde{v}(f, g)$ закінчується літерою f або є порожнім.

Припустимо далі, що має місце тотожність

$$(\tilde{u}(f, g) \circ f^{(\alpha)})(x) \equiv (\tilde{v}(f, g) \circ g^{(\beta)})(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Тепер знайдемо правосторонню похідну лівої та правої частини тотожності (4) у точці $x = 0$. Отже, маємо:

$$D_x(\tilde{u}(f, g)(f^{(\alpha)}(0)))D_x f^{(\alpha)}(0) = D_x(\tilde{v}(f, g)(g^{(\beta)}(0)))D_x g^{(\beta)}(0). \tag{5}$$

Проаналізуємо одержану рівність. Оскільки $g^{(\beta)} \in P[\Omega]$, то похідна $D_x g^{(\beta)}(0) = 0$, яку знаходимо безпосередньо продиференціювавши почленно степеневий ряд

$$g^{(\beta)}(x) \equiv c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{2n} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

з парними показниками змінної x ; у результаті отримуємо степеневий ряд, що приймає нульове значення при $x = 0$.

Таким чином, права частина рівності (5) перетворюється в нуль.

Розглянемо тепер ліву частину рівності (5). Отже, згідно з умовою 4 маємо, що $D_x f^{(\alpha)}(0) \neq 0$. Якщо $\tilde{u} = \emptyset$, то рівність (5) стає суперечливою, бо тоді, як показано вище, права її частина дорівнює нулеві, а ліва частина відмінна від нуля. Тому нехай напівгрупове слово $\tilde{u} \neq \emptyset$ і подається у вигляді

$$\tilde{u} = f_1^{(\alpha_1)} \circ f_2^{(\alpha_2)} \circ \dots \circ f_r^{(\alpha_r)},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$, $f_1, f_2, \dots, f_r \in \{f, g\}$, причому у цьому наборі функцій поряд стоять різні функції із множини $\{f, g\}$, зокрема, $f_r = g$. Знайдемо похідну функції \tilde{u} в точці $x = f^{(\alpha)}(0)$. У результаті дістанемо

$$D_x \tilde{u}(f^{(\alpha)}(0)) = \frac{df_1^{(\alpha_1)}((f_2^{(\alpha_2)} \circ \dots \circ f_r^{(\alpha_r)})(f^{(\alpha)}(0)))}{d(f_2^{(\alpha_2)} \circ \dots \circ f_r^{(\alpha_r)})} \cdot \dots \cdot \frac{df_r^{(\alpha_r)}(f^{(\alpha)}(0))}{dx}. \tag{6}$$

Покажемо, що кожен із множників правої частини рівності (6) відмінний від нуля. Отже, зафіксуємо деяке число $l \in \{1, 2, \dots, r\}$ і розглянемо відповідний l -й множник, який можемо подати у вигляді

$$a_l \equiv D_x f_l^{(\alpha_l)}(y), \quad l \in \{1, 2, \dots, r-1\},$$

де y – значення функції $f_{l+1}^{(\alpha_{l+1})} \circ \dots \circ f_r^{(\alpha_r)}$ у точці $x = f^{(\alpha)}(0)$, а також у випадку $l = r$ маємо

$$a_r \equiv D_x f_r^{(\alpha_r)}(f^{(\alpha)}(0)).$$

Використовуючи правило диференціювання складеної функції обчислимо

$$a_l = D_x f_l(f_l^{(\alpha_l-1)}(y)) \cdot \dots \cdot D_x f_l(y), \quad l \in \{1, 2, \dots, r-1\}, \tag{7}$$

і при $l = r$ маємо

$$a_r = D_x f_r(f_r^{(\alpha_r-1)}(f^{(\alpha)}(0))) \cdot \dots \cdot D_x f_r(f^{(\alpha)}(0)). \tag{8}$$

Оскільки за умовою 3 функції $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є строго зростаючими на проміжку $[0; +\infty)$, то з означення числа y випливає, що $y > 0$ і всі числа

$$f_l^{(\alpha_l-1)}(y), f_l^{(\alpha_l-2)}(y), \dots, f_l(y), l \in \{1, 2, \dots, r-1\}, f_r^{(\alpha_r-1)}(f^{(\alpha)}(0)), f_r^{(\alpha_r-2)}(f^{(\alpha)}(0)), \dots, f^{(\alpha)}(0),$$

де $f_r = g$, є додатними. Згідно з умовами 4 та 5, зокрема, мають місце нерівності $D_x f(x) > 0$ при $x \in [0; +\infty)$, $D_x g(x) > 0$ при $x \in (0; +\infty)$ та $f(0) > 0$, тому всі множники, що входять до правих частин рівностей (7) та (8) також

є додатними. Це означає, що число $D_x \tilde{u}(f^{(\alpha)}(0)) = \prod_{l=1}^r a_l$ відмінне від нуля.

Таким чином, ліва частина рівності (5) відмінна від нуля. Тоді припущення щодо виконання тотожності (4) є невірним. Цим самим доведено, що тотожність (3) не виконується, і тому напівгрупа S , породжена функціями $f, g: \Omega \rightarrow \Omega$ є вільною напівгрупою рангу 2. □

Має місце наступне твердження.

Теорема 2. Напівгрупа, що породжується перетвореннями комплексного поля $f: x \rightarrow x+1$ та $g: x \rightarrow x^{2q}$, де q – фіксоване натуральне число, породжують вільну напівгрупу рангу 2.

Сформульована теорема безпосередньо впливає із доведеної теореми 1, якщо взяти до уваги, що дані функції є розкладеними у степеневі ряди, при цьому $f \in N[\Omega]$ та $g \in P[\Omega]$ і задовольняють її умовам очевидним чином. Зауважимо, що напівгрупа породжена наведеною системою функцій є частковим випадком напівгрупи Коена-Уайта, що досліджувалася у роботах [4-5].

Інші системи функцій, які породжують вільні напівгрупи рангу 2 будуть наведені у подальших статтях.

4. Висновки

Таким чином, у роботі доведено твердження, яке дає достатні умови вільності напівгруп, породжених степеневими рядами певного вигляду. При цьому показано, що доведене твердження має застосування до конкретних прикладів функціональних напівгруп і це дає можливість будувати нові зображення вільних напівгруп елементарними функціями.

1. Олійник А.С. Вільні групи автоматних підстановок // Доп. НАН України. – 1998. – №7. – С. 40-44. 2. Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. Пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 456 с. 3. Олійник А.С., Суцанский В.И. Свободная группа бесконечных унитарных матриц // Мат. заметки. – 2000. – 67, №3. – С. 386-391. 4. Cohen S.D. The group of translations and positive rational powers is free // Quart. J.Math. Oxford. – 1995. – 46, №2. – P. 21-93. 5. White S. The group, generated by $x \rightarrow x+1$ and $x \rightarrow x^q$ is free // Journal of Algebra. – 1988. – 118. – P. 408-422.

Надійшла до редколегії 29.09.08

УДК 517.95.4+530.1, 539.3 :518:621.378

Л. Яровой канд.техн.наук, І. Степахно канд.фіз.-мат.наук
E-mail: yarovoi@univ.kiev.ua

ПІДВИЩЕННЯ ЧУТЛИВОСТІ ЛАЗЕРНИХ ВІБРОМЕТРІВ У ПРИСУТНОСТІ ЗАВАД

Теоретично обґрунтований алгоритм підвищення чутливості лазерного віброметра шляхом усунення деформацій сигналу, що часом виникають при відбитті зондувального лазерного променя від випадкових перешкод або вікон та ілюмінаторів. Алгоритм корекції використовує сигнал високочастотної оминаючої на частоті гетеродину. Експериментально отримано 25-30 дБ покращення співвідношення сигнал/завада. L.

We propose an algorithm for increase of the sensitivity of laser Doppler vibrometer in presence of unwanted light backscattered from technological windows or casual obstacles. The algorithm uses for signal correction signal of the high-frequency heterodyne component. An experiment shown 25-30 dB signal/noise improvement for corrected signal.

Вступ

Прогрес експериментальної механіки пов'язаний з удосконаленням спеціальних засобів дослідження. Лазерні доплерівські віброметри, як засоби експериментальної механіки застосовуються при дослідженні різних явищ в мікро- та наномеханіці, дефектоскопії, акустиці [6, 8]. Їх переваги перед віброметрами інших типів в тому, що вони не впливають на параметри руху об'єкту, забезпечуючи в той же час надзвичайно високу точність і широкий діапазон вимірів. В ідеальному випадку вихідний сигнал лазерного віброметра повністю відтворює миттєву швидкість об'єкта, проте наявність хвилі-звади, що часом потрапляє на фотодетектор при відбитті зондувального променя від випадкової перешкоди суттєво спотворює форму сигналу і призводить до зниження чутливості вимірювання і помилки визначення миттєвої швидкості. Природа перешкод, що спотворюють вихідний сигнал досить широка: це віконця та ілюмінатори [10], що розділяють віброметр та об'єкт; порох, краплі вологи на трасі лазерного променя [1]; елементи зовнішніх конструкцій та інші об'єкти [7], що так чи інакше частково відбивають зондувальний промінь в зворотному напрямку.

Механізм спотворень сигналу віброметра, що фізично пов'язаний з взаємодією трьох оптичних хвиль, був ретельно досліджений в [10], де були аналітично виведені співвідношення для сигналу віброметра в присутності оптичної хвилі – завади. Методи, що пропонуються вживаються для боротьби із спотвореннями часто мають обмежені можливості. Наприклад, пасивна фільтрація є мало ефективною для пригнічення спотворень в субмікронних коливаннях, а вейвлет-фільтрація [9] також виявляється неефективною для високих рівнів сигналу завади. Для пригнічення небажаних осциляцій, які є результатом впливу завади, запропоновано використовувати процедуру амплітудного детектування із зворотним зв'язком (АДОЗ) [5] англійською – "Amplitude Locked Loop" – ALL). Метод АДОЗ реалізований у пристрої [2], проте, не знайшов поширення, ймовірно внаслідок недостатнього рівня компенсації спотворень і неможливості адекватно реагувати на швидкі зміни амплітуди. На виході віброметра все ще залишається досить високий залишковий рівень шуму.

Як правило, сигнал лазерного віброметра – це результат частотної демодуляції складової фотоструму детектора на частоті гетеродину ω_0 . В той же час його амплітуда також несе інформацію, що може бути використана для компенсації спотворень частотної компоненти, і, таким чином, знизити шуми на виході приладу. Цей підхід є предметом дослідження цієї роботи.

Нагадаємо, що на відміну від ідеального лазерного віброметра, коли на фотодетектор потрапляють дві оптичні хвилі, а саме: сигнальна – $e_1 = E_1 \exp(-i \cdot (\omega_{\text{opt}} t + 2k \cdot x_{\text{max}} \cdot \cos(\Omega t) + \varphi_1))$ та опорна – $e_0 = E_0 \exp(-i \cdot (\omega_{\text{opt}} t + \omega_G t))$, в реальному експерименті відбувається **трюххвильове фотозмішування** що викликане присутністю хвилі завади $e_2 = E_2 \exp(-i \cdot (\omega_{\text{opt}} t + \varphi_2))$. Тут ω_{opt} – циклічна оптична частота, k – хвильовий вектор лазерного випромінювання, E_0, E_1, E_2 – амплітуди та φ_1, φ_2 – фази хвиль, що взаємодіють, Ω та x_{max} – відповідно частота та амплітуда об'єкту, що коливається за гармонічним законом $x(t) = x_{\text{max}} \cos(\Omega t)$. В результаті амплітуда $Ih(t)$ та частота $\omega(t)$ високочастотного компоненту $ih(t) = Ih(t) \cdot \cos(\omega_0 t - \int \omega(t) \cdot dt)$ на частоті гетеродина мають вигляд [3]:

$$Ih(t) = 2I_s E_0 E_2 \cdot \sqrt{2E_2 E_1 \cos(2k \cdot x_{\text{max}} \cdot \cos(\Omega t) + (\varphi_1 - \varphi_2)) + E_1^2 + E_2^2} \quad (1)$$

$$\omega(t) = -\sin(\Omega t) \cdot \Omega \cdot k \cdot x_{\text{max}} \cdot [1 + u_s(t)] \quad (2)$$

тут I_s – сталий коефіцієнт фоточутливості детектора, $\eta = E_1 / E_2$, а через $u_s(t)$ позначена величина, яка задається співвідношення:

$$u_s(t) = \frac{(\eta^2 - 1)}{2\eta \cdot \cos(2k \cdot x_{\text{max}} \cdot \cos(\Omega t) + (\varphi_1 - \varphi_2)) + \eta^2 + 1} \quad (3)$$

Загальновідомо, що доплерівський зсув пропорційний миттєвій швидкості об'єкту v : $\omega_{\text{Dop}}(t) = 2k \cdot v(t)$. Якщо порівняти $\omega_{\text{Dop}}(t)$ та $\omega(t)$ з (2), то можна бачити, що для ідеального випадку тобто, коли $E_2 \ll E_1$, змінна $u_s(t)$ наближується до одиниці, а частота $\omega \rightarrow \omega_{\text{Dop}}$.

Вихідний сигнал лазерного віброметра $V(t)$ пропорційний миттєвій частоті $\omega(t)$ і при виборі відповідного калібрування дорівнює:

$$V(t) = -\frac{1}{2} \sin(\Omega t) \cdot \Omega \cdot x_{\text{max}} \cdot [1 + u_s(t)] \quad (4)$$

Якщо $E_2 \ll E_1$ $V(t)$ дорівнює миттєвій швидкості $v(t) = -\Omega \cdot x_{\text{max}} \cdot \sin(\Omega t)$. Таким чином саме функція $u_s(t)$ відповідає за виникнення спотворень у вигляді осциляцій або піків [3] за наявності значного сигналу $e_2(t)$.

Запропонований метод компенсації спотворень [4] полягає в помноженні сигналу швидкості $V(t)$ на сигнал корекції $u_{\text{corr}}(t)$, який вибирається таким чином, щоб його часова форма компенсувала сплески функції $(1 + u_s(t))$. Очевидно, що цей сигнал має бути пов'язаний з вимірюваним коливальним процесом, але не брати участь у формуванні сигналу миттєвої частоти, який, якраз, і підлягає корекції. Відповідним кандидатом для цього є амплітуда $Ih(t)$ високочастотної компоненти доплерівського сигналу (1).

Розглянемо функцію вигляду:

$$u_{\text{corr}}(t) = 2 \cdot \frac{\sqrt{Ih(t) \cdot (Ih_{\text{max}} + Ih_{\text{min}}) - Ih_{\text{min}} \cdot Ih_{\text{max}}}}{(Ih_{\text{max}} + Ih_{\text{min}})} \quad (5)$$

де $Ih_{\text{max}}(t)$, $Ih_{\text{min}}(t)$ відповідно максимальне і мінімальне значення амплітуди $Ih(t)$.

$$Ih_{\text{max}} = 2E_0 \cdot (E_1 + E_2) \quad Ih_{\text{min}} = 2E_0 \cdot |E_1 - E_2| \quad (6)$$

Оцінимо ефективність придушення осциляцій сигналу швидкості. Для цього, спочатку виразимо $u_{\text{corr}}(t)$ в явному вигляді, підставивши (6) в (5):

$$u_{\text{corr}}(t) = \frac{1}{\eta} \cdot \sqrt{2\eta \cdot \sqrt{2\eta \cdot \cos(2k \cdot x \cdot \cos(\Omega t) + (\varphi_1 - \varphi_2)) + \eta^2 + 1} - (\eta^2 - 1)} \quad (7)$$

Далі порівняємо екстремуми функції $u_{\text{corr}}(t)$ і $(1 + u_s(t))$, яка визначає в (4) спотворення сигналу:

$$(1 + u_s(t))_{\text{max}} = \frac{2}{(u_{\text{corr}}(t))_{\text{min}}} = 2 \frac{\eta}{\eta - 1} \quad \text{і} \quad (1 + u_s(t))_{\text{min}} = \frac{2}{(u_{\text{corr}}(t))_{\text{max}}} = 2 \frac{\eta}{\eta + 1} \quad (8)$$

Таким чином, добуток $(1 + u_s(t)) \times u_{corr}(t) \approx 2$, принаймні, ця рівність виконується точно в безпосередній близькості максимумів і мінімумів функції $(1 + u_s(t))$. Це означає, що функція $u_{corr}(t)$ може бути використана для компенсації спотворень викликаних наявністю третьої хвилі.

На Рис. 1. представлені результати розрахунків корекції сигналу віброметра, який отриманий при значенні $\eta = 1.1$. На епюрах (А) і (Б) надані відповідно сигнали $Ih(t)$, $V(t)$, а також для порівняння неспотворений сигнал миттєвої швидкості $V_G(t) = v(t) = -\Omega \cdot x_{max} \cdot \sin(\Omega t)$. На графіку (В) представлений сигнал корекції $u_{corr}(t)$, а вихідний сигнал $V_{corr}(t)$, що є результатом пригнічення спотворень, представлений на епюрі (Г).

Порівнюючи $V_{corr}(t)$, $V_G(t)$ та $V(t)$ можна бачити, що в наведеному прикладі відбувається суттєва корекція і вихідний сигнал віброметра майже співпадає з миттєвою швидкістю об'єкту $V_{corr}(t) = v(t)$. Незначна залишкова модуляція, що не може бути видалена, в першу чергу визначається різною величиною ексцесу функцій $(1 + u_s(t))$ і $u_{corr}(t)$.

Розглянутий приклад значною мірою ідеалізований, оскільки в реальному експерименті амплітуди сигнальної хвилі і завади змінні. Більш того, такі зміни можуть відбуватися протягом одного періоду частоти гетеродина, наприклад, при перетині траси зондувального променя частинкою пилу. Це означає, що змінюються також і значення $Ih_{max}(t)$, $Ih_{min}(t)$. Тому алгоритм, який запропонований для реалізації метод, передбачає безперервне відслідковування значень тієї, що огинає.

Результати моделювання процесу компенсації спотворень сигналу швидкості при нестационарних амплітудах взаємодіючих хвиль представлені на рис.2. З епюр на малюнку Рис. 2А також можна бачити програма відслідковує поточні зміни амплітуд $Ih_{max}(t)$, $Ih_{min}(t)$ (темні суцільні лінії). Модель розглядає три можливі випадки, представлених різними ділянками на епюрах. Ліва ділянка (зона I) відповідає випадку, коли величина сигналу перевищує перешкоду в п'ять разів $\eta = 5$. В зонах (II) і (III) співвідношення сигналу на заваді складає $\eta = 1.1$. Проте в (II) це відбувається за рахунок зменшення в 3,3 разу рівня корисного сигналу, а в (зоні III) за рахунок різкого підвищення сигналу перешкоди E_2 в 4,5 разів.

Результат компенсації спотворень представлений на рис.2Б. Як видно з наданих епюр пригнічення спотворень сигналу $V_{corr}(t)$ виконується досить добре для всіх розглянутих випадків, хоча і при наближенні відношення сигнал/перешкода до одиниці починають виявлятися залишкові осциляції. Це, як вказувалося вище, результат різних ексцесів функцій $(1 + u_s(t))$ і $u_{corr}(t)$. У той же час, виникнення певної асиметрії $V_{corr}(t)$ є прямий наслідок алгоритму обчислення $Ih_{max}(t)$ і $Ih_{min}(t)$, однак таке спотворення не перевищує декілька процентів.

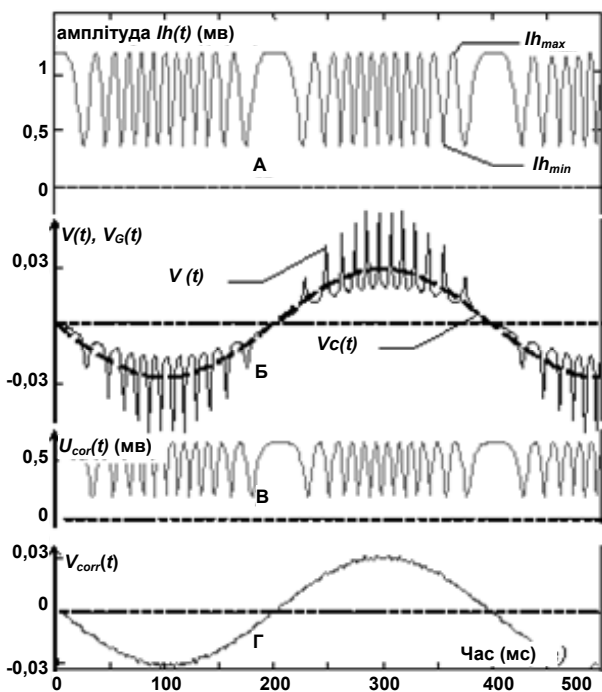


Рис. 1. Результати моделювання: епюри (А) амплітуди, (Б) вихідного сигналу віброметра в присутності завади, (В) сигналу корекції та вихідного сигналу (Г) після корекції

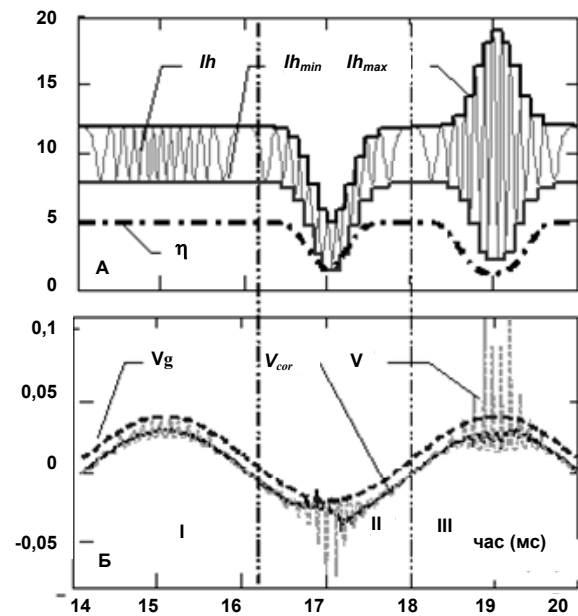


Рис. 2. Результати моделювання: епюри (А) амплітуди, (Б) вихідного сигналу віброметра, у присутності завади. Зона (I) $E_1 = 5$; $E_2 = 1$. Зона (II) $E_1 = 1,5$; $E_2 = 1$. Зона (III) $E_1 = 5$; $E_2 = 4,5$

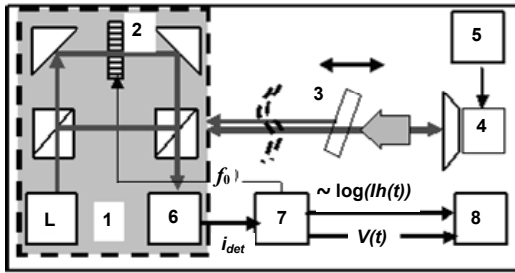


Рис. 3. Оптична схема експериментальної установки і модифікованого віброметра (1-2)

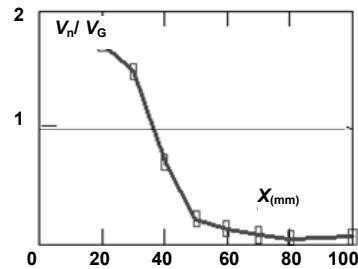


Рис. 4. Експериментальна залежність відносної величини амплітуди шумової компоненти V_n та сигналу V_G від відстані між об'єктом та вікном, $V_{peak} = 11 \text{ mm/s}$, $f = 210 \text{ Hz}$

Слід зазначити, що видиме спотворення сигналу у вигляді хвилястості або піків виявляється у тому випадку, коли амплітуда коливань задовольняє умові $x_{max} \geq \lambda/4$ і при довільній різниці фаз $\phi_1 - \phi_2$. У разі ж, коли $x_{max} < \lambda/4$, спотворення може набувати іншої форми залежно від різниці $\phi_1 - \phi_2$.

Експериментальна перевірка методу виконана за допомогою лазерного віброметра CLV-S фірми Polytec GmbH. У віброметрі використовується випромінювання He-Ne лазера (L) $\lambda=0,63 \text{ мкм}$. Основою оптичної системи віброметра CLV є двопроменевий інтерферометр (1), що представлений на малюнку еквівалентною схемою інтерферометра Маха-Цандера. В інтерферометрі формуються опорний і зондувальний канал. Частота випромінювання в опорному каналі зміщується на частоту гетеродина комірною Бреґґа (2). Перед оптичною голівкою віброметра розміщена скляна пластина (3), розташована з можливістю повздовжнього переміщення та нахилу відносно зондувального променя. Це дозволяє змінювати значення η . Пучок, відбитий від цієї пластини, і є сигнал перешкоди e_2 , в той час як зондувальний пучок опромінює мішень (4) – дифузор гучномовця, що живиться генератором гармонійних коливань (5). Поверхня дифузора гучномовця покрита "ретро-відбиваючою" фольгою. Зондувальне випромінювання, відбите мішенню (6), та хвиля-завада e_2 знов захоплюється оптичною системою віброметра і потрапляють на фотодетектор (6), змішуючись з опорним сигналом e_0 . Високочастотний сигнал детектора i_{det} поступає в контролер (7) системи CLV, де здійснюється його демодуляція і формується сигнал, пропорційного миттєвій швидкості мішені. Контролер має також додатковий вихід сигналу, пропорційний логарифму амплітуди сигналу гетеродина $U_{RF} \sim \log(Ih)$. Обидва сигнали з виходів віброметра потрапляють також на АЦП комп'ютера (8) для формування сигналу компенсації і корекції спотворень.

Щоб продемонструвати вплив хвилі-завади в реальному експерименті, ми в присутності скляного вікна (3) експериментально виміряли відношення середньої амплітуди шумової складової сигналу швидкості до амплітуди "істинного" сигналу швидкості без впливу завад від відстані між пластинкою (3) та об'єктом (4). Відстань від голівки (1) віброметра до об'єкту 620 mm, пластина (3) розташовувалась нормально до зондувального променя.

Як можна бачити на малюку рис.4, при наближенні скляної пластини до об'єкту амплітуда спотворень зростає.

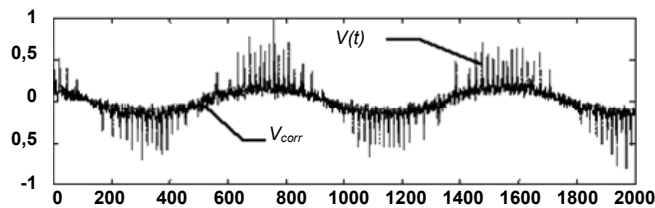


Рис. 5. Часові діаграми сигналу швидкості за наявності перешкоди (світлий колір) і відкоректований сигнал (темний колір)

Порівнюючи експериментальну криву з розрахунками отримуємо, що при відстані $x = 30 \text{ mm}$ відношення $\eta \approx 1.5$ а при відстані $x = 20 \text{ mm}$ амплітуда хвилі-завади, що відбивається скляним вікном перевищує амплітуду корисного сигналу, відбитого об'єктом ($\eta \approx 0.5$), що призводить до суттєвого спотворення сигналу.

На рис. 5 представлені результати експериментального застосування корегуючого алгоритму. Сіра строката лінія – сигнал на виході віброметра без застосування алгоритму, а чорна з його застосуванням. Можна бачити, що алгоритм майже цілком усуває спотворення вихідного сигналу. За основу візьмемо дані наведені в [10]: частота 300 Гц, $\lambda=0,65$, $2 \cdot k \cdot x_{max}=18$, $\eta=1,1$.

Чисельне уявлення про результат компенсації спотворень дає порівняння спектрів вихідного сигналу віброметра до (S_V – сірий колір) і після корекції (S_{corr} – чорний колір). (рис. 6). Як можна бачити, рівень завади знижується в середньому на 36-40 дБ.

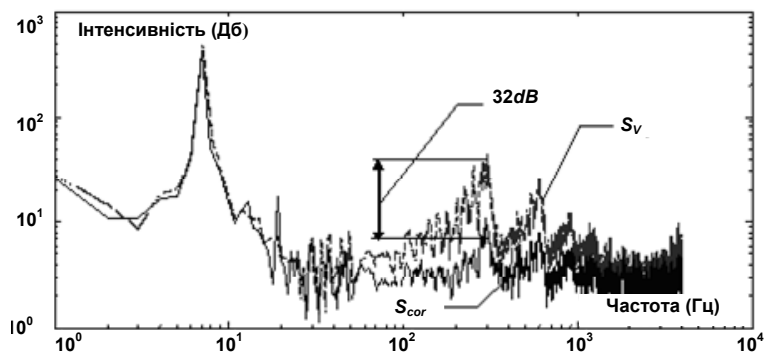


Рис. 6. Спектри сигналів швидкості за наявності перешкоди (світлий колір) і при використанні корекції (темний колір)

Висновки

Випадкові перешкоди на трасі розповсюдження зондувального променя лазерного вібрметра, а також захисні прозорі вікна та ілюмінатори можуть спотворювати сигнал вібрметра і знижувати співвідношення сигнал/завада. Запропонований алгоритм корекції використовує сигнал високочастотної оминаючої вібрметра на частоті гетеродину. Як підтверджено експериментами, застосування такого алгоритму дозволяє приблизно на 25-30 дБ покращити співвідношення сигнал/завада і відповідно підвищити чутливість вимірювання вібрації.

1. Саун М. Ю., Смілянець Ю. П., Яровой Л. К. Вимірювання вібрації обладнання КС засобами лазерної доплерівської вібрметрії // Інформаційний огляд ДК "Укртрансгаз". – 2003. – №6. 2. Патент США №5341106 МКИ6 H03D 1/18, 1991 З. Яровой Л. К. Метод дискретного вимірювання малих переміщень за допомогою лазерного вібрметра // Вісник Київського університету. Серія: механіка та математика. 2006. – Випуск. 15-16. 4. Яровой Л. К. Пат. 84937 Україна МПК G 01 B 9/02. "Спосіб вимірювання вібрації" № а 200614074 заяв. 29.12.2006, друк. 10.12.2008. Бюл. № 23 -4с.: in 5. Dussarrat O J, Clark D F and Moir T J New demodulation process to reduce cochannel interference for a laser vibrometer sensing system // Vibration Measurements by Laser Techniques, Proc. SPIE 3411. – 1998 6. LM Info Special, Polytec GmbH Waldbronn Germany 1. 2005. 7. Rochefoucauld O., Khana S., Olson E. Recording depth and signal competition in heterodyne interferometry // J. Acoust. Soc. Am. – 2005, – Vol.117 № 3. 8. Pai, P.F., Lee, S.Y., and Schulz, M.J. Structural Damage Detection and Estimation Using a Scanning Laser Vibrometer // SPIE's 6th Annual International Symposium on NDE for Health Monitoring and Diagnostics, Newport Beach, California, March 4-8, 2001. 9. Tarun Kumar Gangopadhyay etc. Wavelet analysis of optical signal extracted from a non-contact fibre-optic vibration sensor using extrinsic Fabry-Perot interferometer // Meas. Sci. Technol. – 2005, – Vol.16. 10. Yarovoil L., Siegmund G. The effect of three-wave interference in laser Doppler vibrometry // Meas. Sci. Technol. – 2004. – Vol. 15.

Надійшла до редколегії 24.03.09

УДК 517.95.4+530.1

О. Лісіна

Email: lisina_korovina@mail.ru

ПОБУДОВА 3D АТОМАРНИХ РАДІАЛЬНИХ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ, ЩО ПОРОДЖУЮТЬСЯ ОПЕРАТОРОМ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Отримано фінитний (тобто с компактним носієм) нескінченно диференційовний розв'язок функціонально-диференціального рівняння, що будується за допомогою оператора Гельмгольца. Цей розв'язок є атомарною функцією трьох незалежних змінних і може використовуватись в безсіткових схемах розв'язання крайових задач математичної фізики як радіальні базисні функції

The finitly (with compact support) infinitely differentiated solution is got for functional differential equation which is built by the operator of Helmholtz. This solution is the atomic function of three independent variables and can be in the meshfree schemes of solution of boundary value problem of mathematical physics as radial functions

1. Вступ. Класи атомарних функцій багатьох змінних, за допомогою яких реалізуються процедури безсіткових методів розв'язання крайових задач математичної фізики, досліджувались в ряді робіт [5-7, 9]. Вказані атомарні функції породжуються оператором диференціального рівняння крайової задачі, що дозволяє значно спростити алгоритми побудови наближених розв'язків крайових задач. При розв'язанні крайової задачі, яка описує процес нестационарної теплопровідності для складних тривимірних областей, представляє інтерес процедура, що передбачає дискретизацію вихідного нестационарного рівняння за часом та подальший перехід до чисельного розв'язання диференціального рівняння Гельмгольца. Ця схема вказаної крайової задачі досліджувалась, зокрема, в роботі С.С.Сен'я [15]. Представлений в цій роботі підхід уявляється зручним при реалізації безсіткових методів розв'язання задач в тривимірних областях з використанням радіальних базисних функцій [12-14, 16], але вимагає уваги до особливостей, пов'язаних з властивостями цих функцій. У даній статті здійснюється побудова атомарної функції (нескінченно диференційовної, фінитної, тобто з компактним носієм атомарної функції), яка породжується диференціальним оператором Гельмгольца. Таким чином, ці функції будуть природними при реалізації безсіткових схем побудови розв'язків диференціальних рівнянь, в яких присутній оператор Гельмгольца.

Відмітимо, що алгоритм конструювання атомарної функції у випадку двох незалежних змінних, яка породжується за допомогою диференціального оператора Гельмгольца, був досліджений в роботі [8].

2. Основна частина. В роботі приділяється увага особливостям побудови атомарних функцій від трьох незалежних змінних, які є розв'язками функціонально-диференціального рівняння

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3) - \delta^2 u(x_1, x_2, x_3) = \lambda \iint_{\partial\Omega} u[3(x_1 - \xi_1), 3(x_2 - \xi_2), 3(x_3 - \xi_3)] d\omega + \mu u(3x_1, 3x_2, 3x_3), \quad (1)$$

де $\partial\Omega$ – сфера: $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \frac{4}{9}$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – оператор Лапласа; λ, μ – параметри, значення яких уточ-

нюються в процесі відшукування фінітного розв'язку цього рівняння; δ^2 – параметр рівняння Гельмгольца.

Схема побудови фінітного розв'язку рівняння (1) складається з наступних кроків. Застосуємо тривимірне перетворення Фур'є до рівняння (1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\Delta u(x_1, x_2, x_3) - \delta^2 u(x_1, x_2, x_3)] e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \iint_{\partial\Omega} u[3(x_1 - \xi_1), 3(x_2 - \xi_2), 3(x_3 - \xi_3)] d\omega + \mu u(3x_1, 3x_2, 3x_3) \right\} e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3)} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (2)$$

Позначимо через $U(t_1, t_2, t_3)$ – результат застосування тривимірного перетворення Фур'є до функції $u(x_1, x_2, x_3)$:

$$U(t_1, t_2, t_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, x_3) e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3)} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Для зручності нехай $3(x_i - \xi_i) = \eta_i, i = 1, 2, 3$, звідки $x_i = \frac{\eta_i}{3} + \xi_i$. У правій частині рівняння (2) змінимо порядок застосування операції інтегрування по поверхні сфери і операції тривимірного перетворення Фур'є. В результаті рівняння (2) переписується у вигляді:

$$-(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)U(t_1, t_2, t_3) - \delta^2 U(t_1, t_2, t_3) = \lambda \iint_{\partial\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u\left(3\frac{\eta_1}{3}, 3\frac{\eta_2}{3}, 3\frac{\eta_3}{3}\right) e^{-i\left[t_1\left(\frac{\eta_1}{3} + \xi_1\right) + t_2\left(\frac{\eta_2}{3} + \xi_2\right) + t_3\left(\frac{\eta_3}{3} + \xi_3\right)\right]} d\frac{\eta_1}{3} d\frac{\eta_2}{3} d\frac{\eta_3}{3} + \frac{\mu}{27} U\left(\frac{t_1}{3}, \frac{t_2}{3}, \frac{t_3}{3}\right). \quad (3)$$

Після здійснення тривимірного перетворення Фур'є у правій частині рівняння (3) отримуємо:

$$-(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \delta^2)U(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{27} U\left(\frac{t_1}{3}, \frac{t_2}{3}, \frac{t_3}{3}\right) \left[\lambda \iint_{\partial\Omega} e^{-i(t_1 \xi_1 + t_2 \xi_2 + t_3 \xi_3)} d\omega + \mu \right]. \quad (4)$$

У рівнянні (4) розглянемо інтеграл по сфері $\partial\Omega$: $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \frac{4}{9}$. Відзначимо, що в показнику підінтегральної

функції (4) представлений скалярний добуток двох векторів $\vec{T} = (t_1, t_2, t_3)$, $\vec{\Xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Вважатимемо, що вектор \vec{T} направлений уздовж аплікати декартової системи координат, в якій визначається сфера $\partial\Omega$, а вектор $\vec{\Xi}$ направлений уздовж радіусу-вектора, який описує цю сферу. Щоб спростити процедуру інтегрування введемо сферичні координати $x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$ [3]. Це дозволяє інтеграл по поверхні $\partial\Omega$ представити в

наступному вигляді: $\iint_{\partial\Omega} f(x, y, z) ds = r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \sin \theta d\theta d\phi$.

Завдяки виписаному перетворенню інтеграл по поверхні в рівняння (4) перепишеться наступним чином:

$$\iint_{\partial\Omega} e^{-i(t_1 \xi_1 + t_2 \xi_2 + t_3 \xi_3)} d\omega = \frac{4}{9} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-i\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi = \frac{4}{9} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-\frac{i}{3} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi. \quad (5)$$

Здійснення процедури інтегрування в (5) приводить до представлення інтеграла елементарною функцією:

$$\iint_{\partial\Omega} e^{-i(t_1 \xi_1 + t_2 \xi_2 + t_3 \xi_3)} d\omega = \frac{16\pi}{9} \frac{\sin \frac{2}{3} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{\frac{2}{3} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}.$$

Отримане дозволяє записати рівняння (4) у вигляді:

$$-(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \delta^2)U(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{27} U\left(\frac{t_1}{3}, \frac{t_2}{3}, \frac{t_3}{3}\right) \left[\lambda \frac{16\pi}{9} \frac{\sin \frac{2}{3} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{\frac{2}{3} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}} + \mu \right]$$

або

$$U(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{27} U\left(\frac{t_1}{3}, \frac{t_2}{3}, \frac{t_3}{3}\right) \left\{ \left[\lambda \frac{16\pi}{9} \frac{\sin \frac{2}{3} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{\frac{2}{3} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}} + \mu \frac{1}{(-\delta^2 - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2)} \right] \right\}. \quad (6)$$

Виберемо коефіцієнт μ з умови, щоб вираз у фігурних дужках рівняння (6) був цілою функцією, тобто $\mu = \frac{8\pi}{3i\delta} \lambda \sin \frac{2}{3} i\delta$. Тоді:

$$U(t_1, t_2, t_3) = U\left(\frac{t_1}{3}, \frac{t_2}{3}, \frac{t_3}{3}\right) \frac{8\pi}{3} \lambda \left[\frac{1}{i\delta} \sin \frac{2}{3} i\delta - \frac{2}{3} \frac{\sin \frac{2}{3} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{\frac{2}{3} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}} \right] \frac{1}{3^3 (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \delta^2)}. \quad (7)$$

Структура цього рівняння дозволяє скористатися результатом про представлення співвідношення

$$f(x) = C(x) f\left(\frac{x}{a}\right),$$

де $f\left(\frac{x}{a}\right)$, $C(x)$ – аналітичні усюди на числовій вісі функції і $a > 0$, $a = const$, $C(0) = 1$, $f(0) = 1$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, у

вигляді нескінченного добутку [6]: $f(x) = \prod_{h=0}^{+\infty} C\left(\frac{x}{a^h}\right)$. Цей результат дозволяє рівняння (7) виписати у наступній формі:

$$U(t_1, t_2, t_3) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{\mu - \lambda \frac{16\pi}{9} \frac{\sin \frac{2}{3^{h+1}} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{\frac{2}{3^{h+1}} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}}{3^3 \left(\delta^2 + \frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}{3^{2h}} \right)}. \quad (8)$$

Виберемо в (8) коефіцієнт λ з умови, яка забезпечує збіжність нескінченного добутку, коли $h = 0$ і $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \rightarrow 0$, звідки $\lambda = \frac{3^5 i \delta^3}{8\pi \left[\sin \frac{2}{3} i\delta - 2i\delta \right]}$.

На основі узагальнення теореми Вінера-Пелі [2] для багатовимірною випадку, теорему Поліа-Планшереля [11], встановлюємо, що функція $u(x_1, x_2, x_3)$, для якої перетворення Фур'є $U(t_1, t_2, t_3)$ представляється швидкоспадною цілою функцією експоненціального типу, буде нескінченно диференційовною функцією з компактним носієм. Таким чином, в результаті застосування зворотного перетворення Фур'є до виразу (8) отримуємо фінітну функцію (носієм цієї функції буде одинична куля). Цю функцію будемо позначати $Horp(x_1, x_2, x_3)$ та згідно з висновком статті [10] вважаємо атомарною функцією.

З отриманого вище ясно, що перетворення Фур'є від функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$ має вигляд:

$$H\ddot{o}\ddot{r}p(t_1, t_2, t_3) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{\mu - \frac{16\pi}{3^2} \lambda \frac{\sin \left(\frac{2\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{3^{h+1}} \right)}{\frac{2\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{3^{h+1}}}}{3^2 \left(\frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}{3^{2h}} - \delta^2 \right)}. \quad (9)$$

Зауважимо, що $H\ddot{o}\ddot{r}p(t_1, t_2, t_3)$ є швидкоспадною при $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \rightarrow \infty$ функцією експоненціального типу.

Функція $Horp(x_1, x_2, x_3)$ є парною відносно своїх змінних і може бути розкладеною в трикратний ряд Фур'є [4]:

$$Horp(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} a_{pqr} \cos(p\pi x_1) \cos(q\pi x_2) \cos(r\pi x_3), \quad (10)$$

в якому коефіцієнти Фур'є обчислюються за наступними формулами:

$$\begin{aligned}
 a_{000} &= \frac{1}{8}; \\
 a_{p00} &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Horp}(\xi_1, 0, 0) \cos(p\pi\xi_1) d\xi_1; \\
 a_{pq0} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Horp}(\xi_1, \xi_2, 0) \cos(p\pi\xi_1) \cos(q\pi\xi_2) d\xi_1 d\xi_2; \\
 a_{0q0} &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Horp}(0, \xi_2, 0) \cos(q\pi\xi_2) d\xi_2; \\
 a_{0qr} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Horp}(0, \xi_2, \xi_3) \cos(q\pi\xi_2) \cos(r\pi\xi_3) d\xi_2 d\xi_3; \\
 a_{p0r} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Horp}(\xi_1, 0, \xi_3) \cos(p\pi\xi_1) \cos(r\pi\xi_3) d\xi_1 d\xi_3; \\
 a_{00r} &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Horp}(0, 0, \xi_3) \cos(r\pi\xi_3) d\xi_3; \\
 a_{pqr} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Horp}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cos(p\pi\xi_1) \cos(q\pi\xi_2) \cos(r\pi\xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \text{ де } p, q, r = 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{11}$$

Ясно, що оскільки функція $\text{Horp}(x_1, x_2, x_3)$ фінітна, $\text{supp Horp} \in [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$, і парна відносно змінних x_1, x_2, x_3 , то у виразах для коефіцієнтів Фур'є (11) можна замінити невластні інтеграли на визначені, а тригонометричні функції під знаками інтегралів замінити на експоненціальні. Ці перетворення дозволяють виписати коефіцієнти Фур'є (11) ряду (10):

$$\begin{aligned}
 a_{000} &= \frac{1}{8}; \\
 a_{p00} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \text{Horp}(\xi_1, 0, 0) e^{-ip\pi\xi_1} d\xi_1 = \frac{1}{4} H\tilde{o}\tilde{r}p(p\pi, 0, 0); \\
 a_{pq0} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \text{Horp}(\xi_1, \xi_2, 0) e^{-ip\pi\xi_1} e^{-iq\pi\xi_2} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{2} H\tilde{o}\tilde{r}p(p\pi, q\pi, 0); \\
 a_{0q0} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \text{Horp}(0, \xi_2, 0) e^{-iq\pi\xi_2} d\xi_2 = \frac{1}{4} H\tilde{o}\tilde{r}p(0, q\pi, 0); \\
 a_{0qr} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \text{Horp}(0, \xi_2, \xi_3) e^{-iq\pi\xi_2} e^{-ir\pi\xi_3} d\xi_2 d\xi_3 = \frac{1}{2} H\tilde{o}\tilde{r}p(0, q\pi, r\pi); \\
 a_{p0r} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \text{Horp}(\xi_1, 0, \xi_3) e^{-ip\pi\xi_1} e^{-ir\pi\xi_3} d\xi_1 d\xi_3 = \frac{1}{2} H\tilde{o}\tilde{r}p(p\pi, 0, r\pi); \\
 a_{00r} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \text{Horp}(0, 0, \xi_3) e^{-ir\pi\xi_3} d\xi_3 = \frac{1}{4} H\tilde{o}\tilde{r}p(0, 0, r\pi); \\
 a_{pqr} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \text{Horp}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) e^{-ip\pi\xi_1} e^{-iq\pi\xi_2} e^{-ir\pi\xi_3} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = H\tilde{o}\tilde{r}p(p\pi, q\pi, r\pi), \text{ де } p, q, r = 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{12}$$

Функції $\text{Horp}(x_1, x_2, x_3)$ утворюють підклас атомарних функцій, які породжуються модифікованим диференціальним оператором Гельмгольца $\Delta - \delta^2$. Зауважимо, що у роботах [7, 9, 10] досліджено інші підкласи атомарних функцій, що породжуються операторами Лапласа, бігармонічним, полігармонічним.

Отримані вище результати можуть бути підсумовані наступною теоремою.

Теорема 1. Атомарна функція $\text{Horp}(x_1, x_2, x_3)$, яка є розв'язком функціонально-диференціального рівняння (1) із значеннями коефіцієнтів

$$\lambda = \frac{3^5 \delta^3 i}{8\pi \left[\sin \frac{2}{3} i\delta - 2\delta i \right]}, \mu = \frac{8\pi}{3^5 \delta i} \lambda \sin \frac{2}{3} i\delta,$$

буде фінітною нескінченно диференційовною функцією з носієм у формі одиничної кулі, нормованою умовою $\iiint \text{Horp}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 1$, представляється в кубі: $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ рядом Фур'є (10) з коефіцієнтами

(12). Перетворення Фур'є функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$, тобто (9), є швидкоспадною при $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \rightarrow \infty$ функцією експоненціального типу.

На рисунках 1-4 представлені відповідно візуалізація тривимірної функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$, її перших та других похідних по аргументам x_1, x_2 та результатів дії операторів Лапласа та Гельмгольца на функцію $Horp(x_1, x_2, x_3)$: $\Delta Horp(x_1, x_2, x_3), (\Delta - \delta^2) Horp(x_1, x_2, x_3)$.

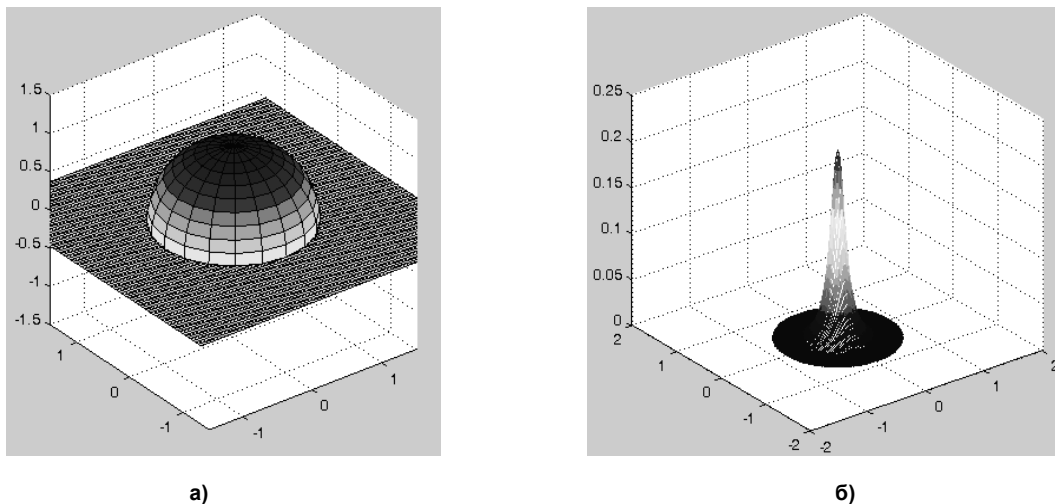


Рис. 1. Візуалізація графіка проекції функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$ в просторі $Ox_1x_2Horp(x_1, x_2, const)$:
 а) визначення точок носія для візуалізації графіка функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$ за умови $x_3 = const$ (переріз площиною $x_3 = const$ носія – одиничної кулі з центром в точці $(0, 0, 0)$ – функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$);
 б) графік проекції функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$ в просторі $Ox_1x_2Horp(x_1, x_2, const)$

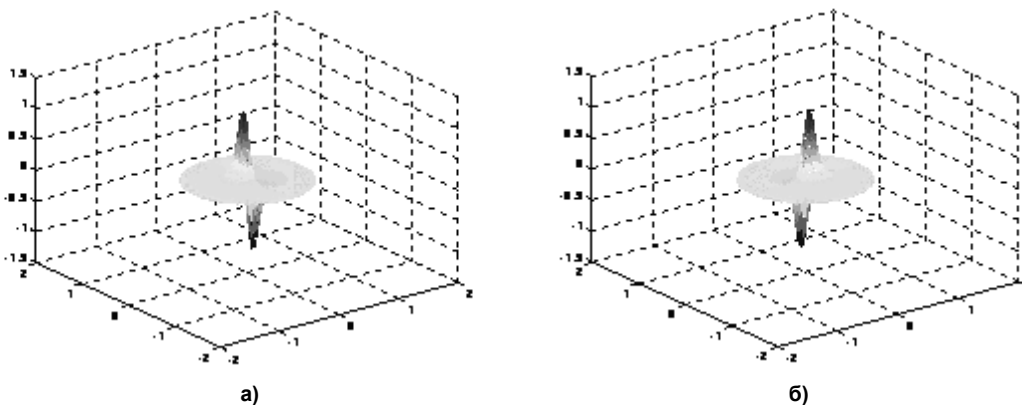


Рис. 2. Візуалізація графіків проекцій перших похідних функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$ по змінним x_1, x_2 за умови $x_3 = const$:

- а) вигляд графіка $\frac{\partial Horp(x_1, x_2, const)}{\partial x_1}$ в просторі $Ox_1x_2 \frac{\partial Horp(x_1, x_2, const)}{\partial x_1}$;
- б) вигляд графіка $\frac{\partial Horp(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2}$ в просторі $Ox_1x_2 \frac{\partial Horp(x_1, x_2, const)}{\partial x_2}$.

Описана вище схема побудови фінітного розв'язку функціонально-диференціального рівняння (1) може бути використана також для відшукування фінітного розв'язку функціонально-диференціального рівняння наступного вигляду:

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3) + \delta^2 u(x_1, x_2, x_3) = \lambda \iint_{\Omega} u[3(x_1 - \xi_1), 3(x_2 - \xi_2), 3(x_3 - \xi_3)] d\omega + \mu u(3x_1, 3x_2, 3x_3) \quad (13)$$

де всі позначення рівняння (1) зберігаються.

Після застосування процедури побудови атомарної функції, що була реалізована для рівняння (1), отримуємо фінітний нескінченно диференційовний розв'язок рівняння (13), який позначаємо через $KGorp(x_1, x_2, x_3)$; $\text{supp } KGorp(x_1, x_2, x_3) = R$, де $R: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$. Таким чином отримується наступний результат.

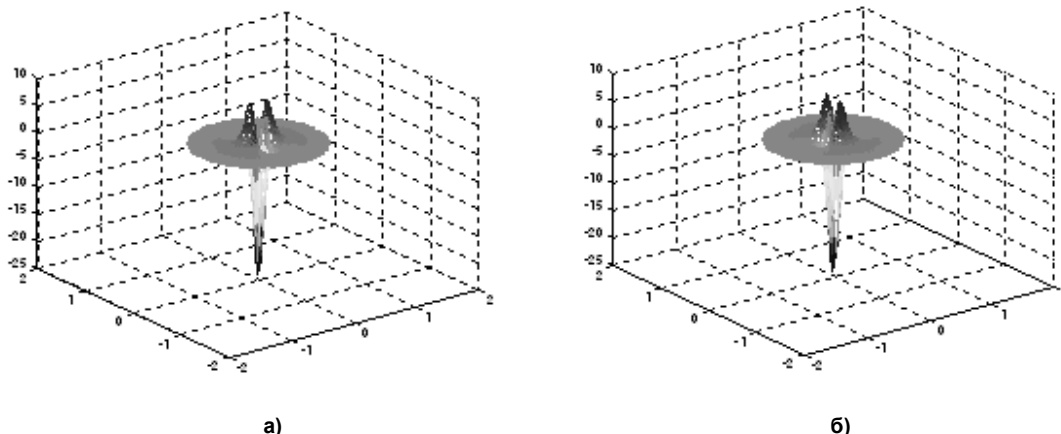


Рис. 3. Візуалізація графіків проєкцій других похідних функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$ по змінним x_1, x_2 за умови $x_3 = const$:

- а) вигляд графіка $\frac{\partial^2 Horp(x_1, x_2, const)}{\partial x_1^2}$ в просторі Ox_1x_2 $\frac{\partial^2 Horp(x_1, x_2, const)}{\partial x_1^2}$;
- б) вигляд графіка $\frac{\partial^2 Horp(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2}$ в просторі Ox_1x_2 $\frac{\partial^2 Horp(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2}$.

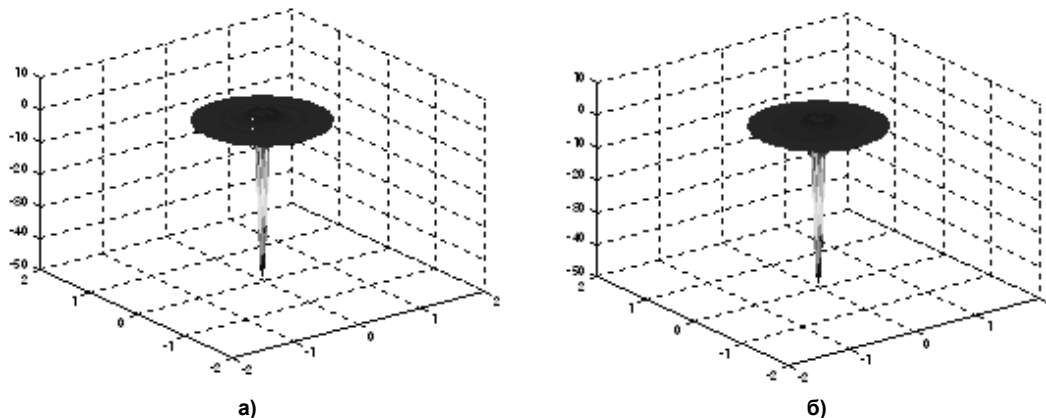


Рис. 4. Візуалізація результатів дії диференційних операторів Лапласа Δ та Гельмгольца $(\Delta - \delta^2)$ на функцію $Horp(x_1, x_2, x_3)$: а) вигляд графіка проєкції $\Delta Horp(x_1, x_2, const)$ в просторі Ox_1x_2 $\Delta Horp(x_1, x_2, const)$ б) вигляд графіка $(\Delta - \delta^2) Horp(x_1, x_2, const)$ в просторі Ox_1x_2 $(\Delta - \delta^2) Horp(x_1, x_2, const)$

Теорема 2. Атомарна функція $KGorp(x_1, x_2, x_3)$, яка є розв'язком функціонально-диференціального рівняння

(13), де $\partial\Omega$ – сфера: $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \frac{4}{9}$, із значеннями коефіцієнтів $\lambda = \frac{3^5 \delta^3}{8\pi \left[\sin \frac{2}{3} \delta - 2\delta \right]}$, $\mu = \frac{8\pi}{3\delta} \lambda \sin \frac{2}{3} \delta$ буде фінит-

ною нескінченно диференційовною функцією з носієм у формі одиничної кулі, нормованою умовою $\iiint KGorp(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 1$, представляється в кубі: $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ рядом Фур'є

$$KGorp(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} a_{pqr} \cos(p\pi x_1) \cos(q\pi x_2) \cos(r\pi x_3)$$

з коефіцієнтами

$$a_{000} = \frac{1}{8},$$

$$a_{p00} = \frac{1}{4} KG\ddot{o}r\ddot{p}(p\pi, 0, 0), \quad a_{0q0} = \frac{1}{4} KG\ddot{o}r\ddot{p}(0, q\pi, 0), \quad a_{00r} = \frac{1}{4} KG\ddot{o}r\ddot{p}(0, 0, r\pi),$$

$$a_{pq0} = \frac{1}{2} KG\ddot{o}r\ddot{p}(p\pi, q\pi, 0), \quad a_{0qr} = \frac{1}{2} KG\ddot{o}r\ddot{p}(0, q\pi, r\pi), \quad a_{p0r} = \frac{1}{2} KG\ddot{o}r\ddot{p}(p\pi, 0, r\pi),$$

$$a_{pqr} = KG\ddot{o}r\ddot{p}(p\pi, q\pi, r\pi).$$

Перетворення Фур'є функції $KGorp(x_1, x_2, x_3)$

$$KG\ddot{o}r\ddot{p} = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{\mu - \frac{16\pi}{3^2} \lambda \frac{\sin\left(\frac{2\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{3^{h+1}}\right)}{2\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}}{3^3 \left(\frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}{3^{2h}} - \delta^2\right)}$$

є швидкоспадною при $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \rightarrow \infty$ функцією експоненціального типу.

Доказ існування розв'язку аналогічний наведеному в першій частині статті.

3. Висновки. Запропоновані атомарні функції $Horp(x_1, x_2, x_3)$ та $KGorp(x_1, x_2, x_3)$ являються радіальними базисними функціями, які можуть бути застосовані при побудові наближених розв'язків крайових задач для диференціальних рівнянь, що містять оператори типу Гельмгольца за безсітковими схемами чисельного розв'язання.

Автор висловлює щирю подяку науковому керівнику Колодяжному В.М. за корисні зауваження та обговорення в процесі підготовки статті.

1. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1965.— 588 с. 2. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фур'є в комплексной области. М.: Наука, 1964. — 269 с. 3. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971—1108 с. 4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т.1, М.: Физматиз, 1965.—616 с. Т.2, 1965.—538 с. 5. *Колодяжный В.М., Рвачов В.О.* Атомарні функції, що гармонічні в кільцевій області // Вісник Київського університету. Серія "Математика, механіка", № 11-12, 2004. — С. 110—114. 6. *Колодяжный В.М., Рвачов В.О.* Деякі властивості атомарних функцій багатьох змінних // Доповіді НАН України, № 1, 2005. — С. 12—20. 7. *Колодяжный В.М., Рвачов В.О.* Фінітні функції, що породжені бігармонічним оператором // Доповіді НАН України, № 2, 2006. — С. 23—30. 8. *Колодяжный В.М., Рвачов В.О.* Фінітні розв'язки функціонально-диференціальних рівнянь з частинними похідними // Доповіді НАН України, № 5, 2004. — С. 17—22. 9. *Колодяжный В.М., Рвачов В.О.* Фінітні функції, що породжені оператором Лапласа // Доповіді НАН України, № 4, 2004. — С. 17—22. 10. *Колодяжный В.М., Рвачов В.А.* Атомарные функции трех переменных инвариантные относительно группы вращения // Кибернетика и системный анализ, № 6, 2004. — С. 118—130. 11. *Ронкин Л.И.* Элементы теории аналитических функций многих переменных. К.: Наукова думка, 1977.— 167 с. 12. *Chen C.S., Brebbia C.A. and Power H.* Boundary element methods using compactly supported radial basis functions // Commun. Numer. Meth. Engng., 15, 1999. — P. 137—150. 13. *Chen W. and Tanaka M.* New Insights in Boundary-only and Domain-type RBF Methods // Inter. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulation, 1, 2000. — P. 145-152. 14. *Chen W., Hon Y.C.* Numerical convergence of boundary knot method in the analysis of Helmholtz, modified Helmholtz, and convection-diffusion problems // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 15, 2003. — P. 1859—1875. 15. *Ingber M.S., Chen C.S., Tanski J.A.* A mesh free approach using radial basis functions and parallel domain decomposition for solving three-dimensional diffusion equations // International Journal For Numerical Methods In Engineering, 60, 2004. — P. 2183— 2201. 16. *Muleskov A.S., Golberg M.A. and Chen C.S.* Particular solutions of Helmholtz-type operators using higher order polyharmonic splines // Comput. Mech., 23, 1999. — P. 411—419.

Надійшла до редколегії 09.04.09

Наукове видання



ВІСНИК
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА

Випуски 21

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.

Засновник та видавець – Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Свідоцтво Міністерства інформації України про державну реєстрацію засобів масової інформації КІ № 251 від 31.10.97. Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", директор Г.Л. Новікова. Адреса ВПЦ: 01033, Київ, б-р Тараса Шевченка, 14, кімн. 43. ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 234 31 28



Підписано до друку 29.01.10. Формат 60x84^{1/8}. Вид. № 321. Гарнітура Arial. Папір офсетний.
Друк офсетний. Наклад 500. Ум. друк. арк. 10. Обл.-вид. арк.10. Зам. № 29-5073.

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; факс (38044) 239 31 28
E-mail: vydav_polygraph@univ.kiev.ua
WWW: <http://vpc.univ.kiev.ua>