В останній рівності була використана лема 1. Використовуючи неперервність функції $\frac{b_{12}-b_{21}}{2}\rho$ і лему 2 отримаємо, що $PBP-PB^sP$ є компактним оператором. Розглянемо оператор L з коефіцієнтами, визначеними матрицею B^s, і відповідний оператор $\hat{B}^s$, визначений рівністю (3). Використовуючи (4) отримаємо

$$PBP-PB^sP=\begin{pmatrix}\hat{B} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\hat{B}^s & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{B}-\hat{B}^s & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Отже, $\hat{B}-\hat{B}^s$ є компактним оператором в $\operatorname{Ker} A$, а тому $\sigma_{\text{ess}}\left(\hat{B}\right)=\sigma_{\text{ess}}(\hat{B}^s)$ і, враховуючи (5), отримаємо твердження теореми.

Висновки. Результати [4] узагальнені на випадок довільної сильно ліпшицевої обмеженої області $\Omega\subset R^2$.

1. *Грінік Ю. М.* Істотний спектр одного матричного диференціального оператора // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. – 2003. – №9. – С. 9–13. 2. *Гринык Ю. Н., Константинов А. Ю.* О существенном спектре одной граничной задачи // Доклады НАН Украины. – 2002. – №7. – С. 12–16. 3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов – Москва, 1972. 4. *Константинов А. Ю.* О существенном спектре одного класса матричных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прил. – 2002. – Том 36 вып. 3. – С. 76–78. 5. *Константинов А.Ю.* Спектральный анализ одного класса матричных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прил. – 1997 – Том 31, вып. 3. – С. 77–80. 6. *Копачевський Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике – Москва, 1989. 7. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно- гладкой границей – М, 1991. 8. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса – Москва, 1981. 9. *Шкаликов А.А.* О существенном спектре матричных операторов // Матем. заметки. – 1995. – № 58. – С. 945–949. 10. *Atkinson F.V., Langer H., Mennicken R., Shkalikov A.A.* The essential spectrum of some matrix operators // Math. Nachr. – 1994. – Vol. 167. – P. 5–20. 11. *Grubb G., Geymonat G.* // The essential spectrum of elliptic systems of mixed order // Math. Annal. – 1977. – Vol. 227, № 3. – P. 247-276. 12. *Hardt V., Mennicken R., Naboko S.* Systems of singular differential operators of mixed order and applications to 1-dimensional MHD problems // Math. Nachr. – 1999. – № 205. – P. 19–68. 13. *Konstantinov A.Yu.* Spectral theory of some matrix differential operators of mixed order // Укр. мат. журн. – 1998. – № 50. – С. 1064–1072. 14. *Lifshitz A.E.* Magnetohydrodynamics and spectral theory. – Dodrecht, 1989. 15. *Langer H., Moller M.* The essential spectrum of a non-elliptic boundary value problem // Math. Nachr. – 1996. – № 178. – P. 233–248. 16. *Raikov G.D.* The spectrum of an ideal magnetohydrodynamic model with translational symmetry // Asymptotic Analysis – 1990. – № 3. – P. 1–35.

Надійшла до редколегії 09.10.08

УДК 513.88: 517.98

А. Кірік, асп., С.Тищенко, доц.
E-mail: alona_kirik@univ.kiev.ua, tish_serg@univ.kiev.ua

УЗАГАЛЬНЕНІ ПРОСТОРИ ФУНКЦІЙ, ПОБУДОВАНІ ЗА ПОЛІНОМАМИ ЛАГЕРРА (ЧАСТИНА 2)

Побудовані простори основних та узагальнених функцій однієї змінної, використовуючи поліноми Лагерра. Наведений опис простору основних функцій як множини цілих функцій певного порядку росту скінченного типу. Будується сім'я гільбертових просторів, елементи яких записуються у вигляді рядів Фур'є, побудованих за класичними поліномами Лагерра, коефіцієнти Фур'є яких задовольняють певній умові спадання.

Spaces of trial and generalized functions of one variable using Lagerre polinomials are built. The description of nuclear space of trial functions as set of entire functions certain order of growth and finite type is given. The family of Hilbert spaces elements of which are written as Fur'e series built by means on classical Lagerre polynomials, coefficients Fur'e of which satisfy certain condition of decreasing are built.

1. Вступ

У попередній роботі авторів [4] була побудована і досліджена двопараметрична сім'я просторів основних $L_{s,\beta}(R_+^1)$ і узагальнених $L_{-s,-\beta}(R_+^1)$ функцій однієї змінної, записаних у вигляді рядів Фур'є, побудованих за поліномами Лагерра, коефіцієнти Фур'є яких задовольняють певній умові спадання. У даній роботі описується двопараметрична сім'я просторів основних та узагальнених функцій, також записаних у вигляді рядів Фур'є, використовуючи інші умови спадання на коефіцієнти Фур'є. В результаті отримуємо інший клас функцій певного порядку росту скінченного типу. Наводиться опис ядерного простору функцій однієї змінної, який є перетином по параметру *s* двопараметричної сім'ї просторів основних функцій.

2. Основні результати роботи

У попередній роботі авторів [4] наводяться всі необхідні визначення й поняття, які стосуються просторів основних та узагальнених функцій.

Нехай $0\le\beta<\infty$ є фіксованим. Для кожного $s\ge 1$ визначимо гільбертів простір $N_{s,\beta}(R_+^1)$ як множину

$$N_{s,\beta}(R_+^1)=\{u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k l_k(x)\in L^2(R_+^1,e^{-x}dx):\|u\|_{s,\beta}^2=\sum_{k=0}^{\infty}|u_k|^2 k^s(k!)^\beta<\infty\},\ (u,v)_{s,\beta}=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}u_k\overline{v_k}k^s(k!)^\beta,$$

де $(u_k)_{k=0}^{\infty}$, $(v_k)_{k=0}^{\infty}$ – коефіцієнти Фур'є розкладу функцій $u(x)$, $v(x)$ за ортонормованим базисом із поліномів Лагерра $(l_k(\cdot))_{k=0}^{\infty}$ у просторі $L^2(R_+^1,e^{-x}dx)$, $\|\cdot\|_{s,\beta}$– норма у просторі $N_{s,\beta}(R_+^1)$. Ортонормований базис у просторі $N_{s,\beta}(R_+^1)$ утворюють вектори $(l_k(\cdot)k^{-\frac{s}{2}}(k!)^{-\frac{\beta}{2}})_{k=0}^{\infty}$. Оскільки $\|\cdot\|_{s,\beta}\ge\|\cdot\|_{L^2}$, то вкладення $N_{s,\beta}(R_+^1)\subset L^2(R_+^1,e^{-x}dx)$ є топологічним, причому сім'я гільбертових просторів $(N_{s,\beta}(R_+^1))_{s\geq 1,\beta}$ є напрямленою за вкладенням, що дозволяє визначити в якості їх проективної границі простір $N_\beta(R_+^1) = \mathrm{pr}\lim_{s\to\infty} N_{s,\beta}(R_+^1)$. Згідно [2,с.111], цей простір буде ядерним.

Маючи ланцюжок просторів основних функцій $(N_{s,\beta}(R_+^1))_{s\geq 1,\beta}$ відносно нульового $L^2(R_+^1,\, e^{-x}dx)$, згідно загальній схемі (див. [2,гл.1]) можна побудувати ланцюжок негативних просторів $(N_{-s,\beta}(R_+^1))_{s\geq 1,\beta}$, кожен з яких буде мати вигляд $N_{-s,\beta}(R_+^1) = \{\xi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\xi_k l_k(x) : \|\xi\|_{-s,\beta}^2 = \sum_{k=0}^{\infty}|\xi_k|^2 k^{-s}(k!)^{-\beta} < \infty\}$, $(\xi,\eta)_{-s,\beta} = \sum_{k=0}^{\infty}\xi_k\overline{\eta_k}k^{-s}(k!)^{-\beta}$. Із тієї ж загальної схеми $(N_\beta(R_+^1))' = \bigcup_{s=1}^{\infty} N_{-s,\beta}(R_+^1) \supset \ldots \supset N_{-s,\beta}(R_+^1) \supset \ldots \supset L^2(R_+^1, e^{-x}dx) \supset \ldots \supset N_{s,\beta}(R_+^1) \supset \ldots \supset \bigcap_{s=1}^{\infty} N_{s,\beta}(R_+^1) = N_\beta(R_+^1)$.

3. Опис простору $N_\beta(R_+^1)$

При кожному $s \geq 1, \beta \geq 0$ уведемо гільбертів простір $N_{s,\beta}(R_+^1) = \{u(x) \in L^2(R_+^1, e^{-x}dx) : \|u\|_{s,\beta}^2 = \sum_{k=0}^{\infty}|u_k|^2 k^s (k!)^\beta < \infty\}$, де $(u_k)_{k=0}^{\infty}$ – коефіцієнти Фурьє розкладу функції $u(x)$ за ортонормованим базисом із поліномів Лагерра $(l_k(\cdot))_{k=0}^{\infty}$ у просторі $L^2(R_+^1, e^{-x}dx)$, $\|u\|_{s,\beta}$ – норма у просторі $N_{s,\beta}(R_+^1)$.
$(N_\beta(R_+^1))' = \bigcup_{s=1}^{\infty} N_{-s,\beta}(R_+^1) \supset \ldots \supset N_{-s,\beta}(R_+^1) \supset \ldots \supset\ \supset L^2(R_+^1, e^{-x}dx) \supset \ldots \supset N_{s,\beta}(R_+^1) \supset \ldots \supset \bigcap_{s=1}^{\infty} N_{s,\beta}(R_+^1) = N_\beta(R_+^1)$.

Нехай $Z^\gamma(C^1)$ – множина цілих функцій порядку росту не вище γ скінченого типу, а її звуження на $R_+^1 = (0,+\infty)$ – $Z^\gamma(R_+^1)$. Наведемо опис функцій із простору $N_\beta(R_+^1)$.

Теорема 1. $N_\beta(R_+^1)$ як множина співпадає з $Z^\gamma(R_+^1)$, де $\gamma = \dfrac{2}{2+\beta}$, $\beta > 0$.

Доведення. Спочатку доведемо пряме включення $N_\beta(R_+^1) \subseteq Z^\gamma(R_+^1)$. Розглянемо довільну функцію $u(x) \in N_\beta(R_+^1)$. В силу означення простору $N_{s,\beta}(R_+^1)$ будемо мати:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k l_k(x), \tag{1}$$

причому $\sum_{k=0}^{\infty}|u_k|^2 k^s (k!)^\beta < \infty,\ s \geq 1$. Перерозкладемо функцію $u(x)$ в ряд Тейлора в околі нуля: $u(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\hat{u}_j x^j$. Підрахуємо значення коефіцієнтів $\hat{u}_j$. Маємо: $l_k(x) = (-1)^k k! \sum_{n=0}^{k}\dfrac{(-1)^n x^n}{(n!)^2 (k-n)!}$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k l_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k (-1)^k k! \sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2(k-n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j u_{n+j}}{j!}(n+j)! = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{u}_n x^n,$$

де $\hat{u}_n = \dfrac{1}{(n!)^2}\sum_{j=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^j u_{n+j}}{j!}(n+j)!$. Отримаємо $\sum_{k=0}^{\infty} u_k l_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{u}_n x^n$.

Знайдемо радіус збіжності ряду (1), використовуючи формулу Стірлінга $j! = j^{j+\frac{1}{2}} e^{-j}\sqrt{2\pi}\alpha_j$ ($\alpha_j \to 1,\ j \to \infty$) та оцінки $\dfrac{(n+j)!}{j!} \leq n^n e^j$, $\left(\dfrac{(n+j)!}{j!n!}\right)^{2-\beta} \leq \left(2^{n+j}\right)^{2-\beta} = 2^{n(2-\beta)}\cdot 2^{j(2-\beta)}$. Отримаємо

$$\left|\hat{u}_n\right| = \left|\frac{1}{(n!)^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j u_{n+j}}{j!}(n+j)!\right| \leq \frac{1}{(n!)^2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\left|u_{j+n}\right|(n+j)^{s/2}((n+j)!)^{\frac{\beta}{2}}\right)\left(\frac{(n+j)!}{j!(n+j)^{s/2}((n+j)!)^{\frac{\beta}{2}}}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n!)^2}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left|u_{j+n}\right|^2 (n+j)^s ((n+j)!)^\beta\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{((n+j)!)^2}{(j!)^2 (n+j)^s ((n+j)!)^\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n!)^2}\|u\|_{s,\beta}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{((n+j)!)^{2-\beta}}{(j!)^2(n+j)^s}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\|u\|_{s,\beta}}{(n!)^2}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{(n+j)!}{j!n!}\right)^{2-\beta}\frac{(n+j)^{-s}}{(j!)^\beta (n!)^{\beta-2}}\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{\|u\|_{s,\beta}}{(n!)^{1+\frac{\beta}{2}}} 2^{\frac{n}{2}(2-\beta)}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{j(2-\beta)}(n+j)^{-s}}{(j!)^\beta}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Знову застосовуючи формулу Стірлінга $(n!)^{1+\beta/2} = n^{(n+1/2)(1+\beta/2)} e^{-n(1+\beta/2)} \left(\sqrt{2\pi}\right)^{1+\beta/2} \alpha_n,\ \alpha_n \to 1$ та оцінку $\left(\sum_{j=0}^{\infty}(n+j)^{-s}\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{n^{s/2}}$, маємо $\frac{\|u\|_{s,\beta}}{(n!)^{1+\frac{\beta}{2}}} 2^{\frac{n}{2}(2-\beta)} \left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{j(2-\beta)}(n+j)^{-s}}{(j!)^{\beta}}\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{\|u\|_{s,\beta}\, 2^{\frac{n}{2}(2-\beta)} e^{n(1+\beta/2)}}{n^{s/2} n^{(n+1/2)(1+\beta/2)}} \left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{j(2-\beta)}}{(j!)^{\beta}}\right)^{\frac{1}{2}},\ s>1;$

Дослідимо збіжність ряду $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{j(2-\beta)}}{(j!)^{\beta}}$.

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{j(2-\beta)}}{(j!)^{\beta}} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{j(2-\beta)}}{\left(j^{j+1/2}e^{-j}\sqrt{2\pi}\alpha_j\right)^{\beta}} \le C_{j,\beta}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{2j}e^{j\beta}}{2^{j\beta} j^{j\beta} j^{\beta/2}} = C_{j,\beta}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{4^j}{j^{\beta/2}}\left(\frac{e}{2j}\right)^{j\beta} =$$

$$= C_{j,\beta}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(4e^{\beta})^j}{(2^{\beta}j^{\beta})^j j^{\beta/2}} = C_{j,\beta}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{4e^{\beta}}{2^{\beta}j^{\beta}}\right)^j \frac{1}{j^{\beta/2}}.$$

$$\lim_{j\to\infty}\sqrt[j]{\left(\frac{4e^{\beta}}{2^{\beta}j^{\beta}}\right)^j \frac{1}{j^{\beta/2}}} = \frac{4e^{\beta}}{2^{\beta}j^{\beta}}\frac{1}{\sqrt[2j]{j^{\beta}}} = 0,\ \beta>0.$$

Отже, ряд збігається при всіх $\beta>0$. Звідси $\frac{\|u\|_{s,\beta}\, 2^{\frac{n}{2}(2-\beta)} e^{n(1+\beta/2)}}{n^{s/2} n^{(n+1/2)(1+\beta/2)}} \left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{j(2-\beta)}}{(j!)^{\beta}}\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{\|u\|_{s,\beta}\, 2^{\frac{n}{2}(2-\beta)} C_{\beta}\, e^{n(1+\beta/2)}}{n^{s/2} n^{(n+1/2)(1+\beta/2)}},\ s\ge 1, \beta>0;$

Остаточно $\left|\hat{u}_n\right| \le C_{s,\beta}\|u\|_{s,\beta}\frac{\left(2^{(2-\beta)}e^{(2+\beta)}\right)^{n/2}}{n^{s/2} n^{(n+1/2)(1+\beta/2)}},\ s\ge 1, \beta>0$

Звідси, для радіуса збіжності розглядуваного ряду отримаємо:

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\hat{u}_n\right|^{\frac{1}{n}} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(C_{s,\beta}\|u\|_{s,\beta}\frac{\left(2^{(2-\beta)}e^{(2+\beta)}\right)^{n/2}}{n^{s/2} n^{(n+1/2)(1+\beta/2)}}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(C_{s,\beta}\right)^{1/n}\|u\|_{s,\beta}^{1/n}\frac{\left(2^{(2-\beta)}e^{(2+\beta)}\right)^{1/2}}{n^{s/2n} n^{(1+1/2n)(1+\beta/2)}} \le C'_{s,\beta}\left(2^{(2-\beta)}e^{(2+\beta)}\right)^{1/2}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n^{s/2n} n^{(1+1/2n)(1+\beta/2)}} = 0.$$

Ряд має нескінченний радіус збіжності, а отже збігається абсолютно і рівномірно при всіх дійсних x.

Нехай $u(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\hat{u}_j z^j$ – ціла аналітична функція $z\in C^1$, що є продовженням в комплексну площину функції $u(x)\in N_{\beta}\left(R_+^1\right)$. Оцінимо порядок росту ρ отриманої цілої функції за формулою

$$\rho = \overline{\lim_{k\to\infty}}\left(k\ln k / \ln\left|\frac{1}{u_k}\right|\right) \qquad (2)$$

Отже $\left|\hat{u}_n\right|^{-1/n} \ge \left(C_{s,\beta}\|u\|_{s,\beta}\frac{\left(2^{(2-\beta)}e^{(2+\beta)}\right)^{n/2}}{n^{s/2} n^{(n+1/2)(1+\beta/2)}}\right)^{\frac{1}{n}} = C_{s,\beta}^{-1/n}\|u\|_{s,\beta}^{-1/n}\frac{n^{s/2n} n^{(1+1/2n)(1+\beta/2)}}{2^{(1-\beta/2)} e^{(1+\beta/2)}}.$

Звідси $\ln\left|\hat{u}_n\right|^{-1/n} \ge -\frac{1}{n}\ln C_{s,\beta} - \frac{1}{n}\ln\|u\|_{s,\beta} + \ln A(s,\beta) + \frac{s}{2n}\ln n + \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\ln n$, де $A(s,\beta) = \frac{1}{2^{(1-\beta/2)} e^{(1+\beta/2)}}$.

Підставляючи оцінку для $\ln\left|\hat{u}_n\right|^{-1/n}$ в (2), отримаємо:

$$\rho \le \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{-\frac{1}{n}\ln C_{s,\beta} - \frac{1}{n}\ln\|u\|_{s,\beta} + \ln A(s,\beta) + \frac{s}{2n}\ln n + \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\ln n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{-\frac{1}{n\ln n}\ln C_{s,\beta} - \frac{1}{n\ln n}\ln\|u\|_{s,\beta} + \frac{\ln A(\beta)}{\ln n} + \frac{s\ln n}{2n\ln n} + \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{\beta}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{\beta}{2}} = \frac{2}{2+\beta}.$$

Отже, $\rho \le \frac{2}{2+\beta}$. Для $\rho = \frac{2}{2+\beta}$ необхідно оцінити ще й тип σ функції $u(z)$. Згідно формулі

$$\left(\sigma e\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, k^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[k]{|u_k|}\,, \qquad (3)$$

маємо: $\left(\rho\sigma e\right)^{\frac{1}{\rho}} = \lim_{n\to\infty}\sup n^{\frac{1}{\rho}} \left|\hat{u}_n\right|^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to\infty}\sup n^{\frac{1}{\rho}} \left(C_{s,\beta}\|u\|_{s,\beta} \dfrac{(2^{(2-\beta)}e^{(2+\beta)})^{n/2}}{n^{s/2} n^{(n+1/2)(1+\beta/2)}} \right)^{\frac{1}{n}} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\sup n^{\frac{1}{\rho}} C_{s,\beta}^{\frac{1}{n}} \|u\|_{s,\beta}^{\frac{1}{n}} \frac{(2^{(2-\beta)}e^{(2+\beta)})^{1/2}}{n^{s/2n} n^{(1+1/2n)(1+\beta/2)}} = \lim_{n\to\infty}\sup n^{\frac{1}{\rho}} C_{s,\beta}^{\frac{1}{n}} \|u\|_{s,\beta}^{\frac{1}{n}} \frac{2^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2}}}{n^{s/2n+(1+\beta/2)+1/2n(1+\beta/2)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sup n^{1/\rho - s/2n - (1+\beta/2) - 1/2n(1+\beta/2)} C_{s,\beta}^{\frac{1}{n}} \|u\|_{s,\beta}^{\frac{1}{n}} 2^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2}} = \lim_{n\to\infty}\sup n^{-\frac{2s+2+\beta}{4n}} C_{s,\beta}^{\frac{1}{n}} \|u\|_{s,\beta}^{\frac{1}{n}} 2^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2}} =$$

$$= 2^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2}} \lim_{n\to\infty}\sup n^{-\frac{2s+2+\beta}{4n}} = 2^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2}} \lim_{n\to\infty}\sup (n^{\frac{1}{n}})^{-\frac{2s+2+\beta}{4}} = 2^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2}} = A^{-1}(s,\beta)\,.$$

Звідси $\sigma e\rho \le (2^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2}})^{\rho}$. Для типу σ маємо оцінку:

$$\sigma \le \frac{(2^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2}})^{\rho}}{e\rho} = \frac{(2+\beta)(2^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{2+\beta}{2}})^{\frac{2}{2+\beta}}}{2e} = (2+\beta)2^{\frac{2-\beta}{2}\frac{2}{2+\beta}-1} e^{\frac{2+\beta}{2}\frac{2}{2+\beta}-1} = (2+\beta)2^{\frac{2-\beta}{2}\frac{2}{2+\beta}-1} e^{\frac{2+\beta}{2}\frac{2}{2+\beta}-1} = (2+\beta)2^{\frac{-2\beta}{2+\beta}}\,.$$

Отже, $\sigma \le (2+\beta)2^{\frac{-2\beta}{2+\beta}}$. Оскільки ця нерівність має місце для будь-якого $s \ge 1$, тип σ функції $u(z)$ залежить тільки від β і є скінченним. Таким чином, показано, що має місце включення: $N_\beta(R_+^1) \subseteq Z^\gamma(C^1, R_+^1)$.

Доведемо обернене включення.

Нехай $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ – довільна функція із $Z^\gamma(C^1)$. Покажемо, що її звуження $f(x)$ $(x \in R_+^1)$ належить простору $N_\beta(R_+^1)$. Для цього перерозкладемо функцію $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$ в ряд по поліномам Лагерра і оцінимо коефіцієнти одержаного ряду. При цьому використаємо формулу

$$x^k = k!\sum_{n=0}^{k} C_k^n l_n(x) = k!\sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} l_n(x) \quad (k = 0,1,2,...)\,.$$

Звідси $\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(k!\sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} l_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n(x) \left(\sum_{k=n}^{\infty} f_k \frac{(k!)^2}{n!(k-n)!} \right) =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} l_n(x) \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_{n+i} \frac{((n+i)!)^2}{n!i!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \check{f}_n l_n(x)$, де позначено $\check{f}_n = \sum_{i=0}^{\infty} f_{n+i} \frac{((n+i)!)^2}{n!i!}$. Далі використаємо оцінку $\frac{((n+i)!)^2}{n!i!} = \frac{n!(n+1)\cdot ...\cdot(n+i)\cdot i!(i+1)\cdot ...\cdot(i+n)}{n!i!} \le (n+i)^i \cdot (i+n)^n = (n+i)^{n+i}$.

Маємо $\left|\check{f}_n\right| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} f_{n+i} \frac{((n+i)!)^2}{n!i!} \right| \le \sum_{i=0}^{\infty} |f_{n+i}| \frac{((n+i)!)^2}{n!i!} \le \sum_{i=0}^{\infty} |f_{n+i}| (n+i)^{n+i}$. Розглянемо наступні два випадки.

1*)* Якщо порядок росту ρ функції $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ менше $2/(2+\beta)$, тобто $0 < \rho < 2/(2+\beta)$, то маємо $|f_{n+i}|(n+i)^{n+i} \le C'(n+i)^{-\delta(n+i)}$, де $\delta = 1/\rho - 1$, причому $\delta > \beta/2$. Використовуючи цю оцінку, при довільному $s \ge 1, \beta > 0$ для квадрату норми $\|f\|_{s,\beta}^2$ функції $f(x)$ $(x \in R_+^1)$ одержимо

$$\|f\|_{s,\beta}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\check{f}_n\right|^2 n^s (n!)^\beta \le \sum_{n=0}^{\infty} n^s (n!)^\beta \left(\sum_{i=0}^{\infty} |f_{n+i}| (n+i)^{n+i} \right)^2 \le (C')^2 \sum_{n=0}^{\infty} n^s (n!)^\beta \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(n+i)^{\delta(n+i)}} \right)^2 =$$

$= (C')^2 \sum_{n=0}^{\infty} n^s (n!)^\beta \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(n+i)^{\delta n}(n+i)^{\delta i}} \right)^2 \le (C')^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^\beta \frac{n^s}{n^{2\delta n}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^{\delta i}} \right)^2$. При довільних фіксованих $s \ge 1, \delta > 0$ мають місце граничні рівності:

а) $\lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{\left(\frac{1}{i^\delta}\right)^i} = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{i^\delta} = 0$;

б) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^s}{n^{2\delta n}}(n!)^\beta} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n!}{n^n}\right)^\beta \frac{n^s}{n^{n\varepsilon}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\beta+\varepsilon}} \sqrt[n]{(n!)^\beta n^s} = 0$, де $2\delta > \beta, 2\delta = \beta + \varepsilon$.

За ознакою збіжності Коші, обидва числових ряди є збіжними. Це і означає, що $\|f\|^2_{s,\beta} = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\check{f}_n\right|^2 n^s (n!)^\beta < \infty$.

2) Якщо ж порядок росту $\rho = \dfrac{2}{2+\beta}$, то із формули (2) випливає, що для коефіцієнтів f_k ряду Фур'є можемо отримати оцінку: $|f_k| \le C'' \dfrac{(\sigma e \rho)^{k/\rho}}{k^{k/\rho}} \le C''\left(\dfrac{2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}}{k^{1/\rho}}\right)^k$. Отже, $|f_k| \le C''\left(\dfrac{2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}}{k^{1/\rho}}\right)^k$, $k = 0,1,2,...$ Звідси, для $n,\ i = 0,1,2,...$ маємо $|f_{n+i}|(n+i)^{n+i} \le C''\left(\dfrac{2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}}{(n+i)^{1/\rho}}\right)^{n+i}(n+i)^{n+i} = C''\dfrac{\left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}\right)^n\left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}\right)^i}{(n+i)^{(n+i)\delta}}$, де $\delta = 1 - \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{\beta}{2} > 0$. Використовуючи останню оцінку, при довільному $s \ge 1$ для квадрату норми $\|f\|^2_{s,\beta}$ функції $f(x)$ $(x \in R^1_+)$ одержимо

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\check{f}_n\right|^2 n^s (n!)^\beta \le \sum_{n=0}^{\infty} n^s (n!)^\beta \left(\sum_{i=0}^{\infty}|f_{n+i}|(n+i)^{n+i}\right)^2 \le \sum_{n=0}^{\infty} n^s (n!)^\beta \left(\sum_{i=0}^{\infty} C'' \frac{\left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}\right)^n\left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}\right)^i}{(n+i)^{(n+i)\delta}}\right)^2 \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^\beta n^s \left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}\right)^{2n}\left(\sum_{i=0}^{\infty} C'' \frac{\left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}\right)^i}{(n+i)^{n\beta/2}(n+i)^{i\beta/2}}\right)^2 \le (C'')^2 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^\beta n^s}{n^{n\beta}}\left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}\right)^{2n}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}\right)^i}{n^{i\beta/2}}\right)^2$$

Дослідимо збіжність рядів використовуючи ознаку Коші та оцінки нижче:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n!)^\beta n^s}{n^{n\beta}}\left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)^\beta\left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}\right)^2 = \frac{1}{e^\beta}\frac{4}{2^\beta}e^2 e^\beta = \frac{4e^2}{2^\beta};$$

$$\frac{4e^2}{2^\beta} < 1;\ 4e^2 < 2^\beta;\ \log_2 4e^2 < \log_2 2^\beta;\ \beta > 2 + 2\log_2 e\ .$$

$$2)\ \lim_{i\to\infty}\sqrt[i]{\frac{\left(2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}\right)^i}{n^{i\beta/2}}} = \frac{2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}}{n^{\beta/2}},\ \frac{2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2}}{n^{\beta/2}} < 1;\ 2^{1-\beta/2} e^{1+\beta/2} < n^{\beta/2};\ n > 2^{\frac{2-\beta}{\beta}} e^{\frac{2+\beta}{\beta}}\ .$$

Виберемо $n_0 = 2^{\frac{2-\beta}{\beta}} e^{\frac{2+\beta}{\beta}}$. Тоді $\forall n > n_0$ ряд збігається. Це також означає, що $\|f\|^2_{s,\beta} = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\check{f}_n\right|^2 n^s (n!)^\beta < \infty$.

Теорема повністю доведена.

Як наслідок, має місце наступна теорема.

Теорема 2. $M_\beta\left(R^1_+\right)$ як множина співпадає з $Z^\gamma(R^1_+)$, де

$$M_\beta(R^1_+) = \{u(x) \in L^2(R^1_+, e^{-x}dx) : \|u\|^2_\beta = \sum_{k=0}^{\infty}|u_k|^2 (k!)^\beta < \infty\},\ \ \beta \ge 0\ .$$

4. Висновки

Дана робота є продовженням попередньої роботи авторів [4], в якій була побудована і досліджена двопараметрична сім'я просторів основних $L_{s,\beta}(R^1_+)$ і узагальнених $L_{-s,-\beta}(R^1_+)$ функцій однієї змінної, записаних у вигляді рядів Фур'є, побудованих за поліномами Лагерра, коефіцієнти Фур'є яких задовольняють певній умові спадання. На відміну від попередньої, у даній роботі використовуються інші умови спадання на коефіцієнти Фур'є.

Основним результатом є опис ядерного простору основних функцій однієї змінної, який є перетином по параметру *s* двопараметричної сім'ї просторів основних функцій, у термінах множини цілих функцій певного порядку росту скінченного типу. Побудовані простори та їх тензорні добутки можуть використовуватись у задачах математичного опису фізичних систем, які зустрічаються у квантовій теорії поля й статистичній фізиці.

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – М., 1966. – Т.2. 2. *Березанский Ю.М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – К., 1978. 3. *Евграфов М.А.* Асимптотические оценки и целые функции. – М., 1979. 4. *А.Кірік, С.Тищенко.* Узагальнені простори функцій, побудовані за поліномами Лагерра (частина1) // Вісн. Київ. націон. ун-ту ім.Т. Шевченка. Математика. Механіка. -2007. – Вип.17-18. 5. *Суэтин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – М., 1976.

Надійшла до редколегії 09.10.08