УДК 517.9

І. Романенко, канд. фіз.-мат. наук., доц.
E-mail: igrom@univ.kiev.ua

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ОБЛАСТІ З КУТОВОЮ ТОЧКОЮ

Досліджено існування та єдиність розв'язку еліптичної крайової задачі зі сталими коефіцієнтами у двовимірній нескінченній кутовій області. Детально досліджено та уточнено апріорні оцінки розв'язку такої задачі та характер залежності сталих в апріорних оцінках від даних задачі.

The existence and uniqueness of solution of linear elliptic boundary value problem with constant coefficients in 2-dimentional unbounded angular domain are investigated. An a priori estimates of such a problem solution are obtained and the character of a priori constants dependence of the problem data had been investigated.

1. Короткий огляд літератури та визначення основного напрямку досліджень. Крайові задачі з кутовими точками вже протягом більш ніж 40 останніх років є об'єктом дослідження ряду фахівців. Фундаментальною у цьому напрямку є, безумовно, робота [3], в якій закладено основи методики та отримано базові результати, важливі для дослідження задач з конічними та кутовими точками. Важливі результати було отримано і в роботах інших дослідників, наприклад, [1,4,5,6].

Більшість робіт із дослідження задач з кутовими та конічними точками містять апріорні оцінки розв'язку. Однак, характер залежності констант у таких апріорних оцінках від даних задачі не встановлено, що заважає застосовувати отримані результати до дослідження нелінійних крайових задач у кутових та конічних областях. Другою вадою наявних результатів є формулювання теорем розв'язності у термінах аналізу особливих точок оператора розв'язку похідної еліптичної крайової задачі з комплексним параметром. Це, фактично, суттєво звужує діапазон застосування результатів, наприклад, роботи [2].

Саме тому основним напрямком дослідження у даній роботі стало уточнення характеру залежності сталих в апріорних оцінках розв'язку від даних еліптичної крайової задачі в області з кутовою точкою, а також отримання теорем про розв'язність у термінах лише даних вихідної задачі.

2. Основні позначення. Нехай Ω – область у просторі R^2 з межею, яка гладка усюди, крім початку координат, а у точці 0 її границя збігається з кутом, який має вершину у цій точці. Будемо позначати за допомогою $V_{p,\delta}^{(m)}(\Omega)$ простір Соболєва з вагою та нормою $\|u\|_{p,\delta,\Omega}^{(m)} = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega r^{p\left(\frac{\delta}{2}-m+|\alpha|\right)} | D^\alpha u |^p \, dxdy \right)^{1/p}$. Позначимо також за допомогою $V_{p,\delta}^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ простір граничних значень на $\partial\Omega$ функцій з $V_{p,\delta}^{(m)}(\Omega)$ з нормою $\|v\|_{p,\delta,\Omega}^{\left(m-\frac{1}{p}\right)} = \inf\left\{ \|u\|_{p,\delta,\Omega}^{(m)} : u \in V_{p,\delta}^{(m)}(\Omega), u\big|_{\partial\Omega} = v \right\}$. Ці простори в n-вимірному випадку було введено, наприклад, у [3] при $p=2$ та у [4] при $p \ne 2$.

3. Апріорна оцінка у випадку задачі для рівняння Пуассона. Розглянемо найпростішу крайову задачу з умовами Діріхле у нескінченному куті між променями під кутами α, $\alpha+\gamma$ до напрямку осі Ох:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y), \ \alpha < \arg(x,y) < \alpha+\gamma, \tag{1}$$

$$u\big|_{\arg(x,y)=\alpha} = g_\alpha(x,y), \ u\big|_{\arg(x,y)=\alpha+\gamma} = g_{\alpha+\gamma}(x,y), \tag{2}$$

де $\arg(x,y)$ – значення аргументу точки з координатами (x,y), розташованої на площині R^2.

Нехай $K(\alpha,\alpha+\gamma) = \{(x,y) \in R^2 : \alpha < \arg(x,y) < \alpha+\gamma\}$, а k – невід'ємне ціле число. Будемо розглядати розв'язок u задачі (1) – (2) у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha,\alpha+\gamma))$. Від функцій правих частин будемо вимагати виконання включень

$$f \in V_{2,\delta}^{(k)}(K(\alpha,\alpha+\gamma)), \ g \in V_{2,\delta}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)}(\partial K(\alpha,\alpha+\gamma)), \tag{3}$$

де $g(x,y) = \begin{cases} g_\alpha(x,y), & \arg(x,y) = \alpha, \\ g_{\alpha+\gamma}(x,y), & \arg(x,y) = \alpha+\gamma. \end{cases}$

Задача (1), (2) добре досліджена (див. [3, 6]). Згідно з роботою [3] до задачі (1), (2) можна послідовно застосувати набір перетворень:

1. Перехід до полярних координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$;
2. Заміна $\tau = \ln r$;
3. Перетворення Фур'є $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau,\varphi) e^{-i\lambda\tau} d\tau$.

Після виконання послідовності кроків 1 – 3 задача (1), (2) перейде у крайову задачу для диференціального рівняння з комплексним параметром:

$$\frac{d^2\hat{u}}{d\varphi^2} - \lambda^2 \hat{u} = \hat{f}(\varphi,\lambda), \quad \alpha < \varphi < \alpha+\gamma, \tag{4}$$

$$\hat{u}(\alpha) = \hat{g}_\alpha, \quad \hat{u}(\alpha+\gamma) = \hat{g}_{\alpha+\gamma}, \tag{5}$$

де $\hat{u}$, $\hat{f}$, $\hat{g}_\alpha$, $\hat{g}_{\alpha+\gamma}$ – функції та величини, що з'явились внаслідок застосування кроків 1 – 3 відповідно до функцій u, f, g_α, $g_{\alpha+\gamma}$. Розв'язок задачі (4) – (5) досліджується у просторі Соболєва $W_2^{(2+k)}(\alpha,\alpha+\gamma)$.

Відомо ([3]), що оператор, який встановлює розв'язок задачі (4), (5) по правих частинах цієї задачі, буде мероморфною функцією з полюсами $\lambda_l = \frac{\pi l}{\gamma} i$, $l \in Z$. Відомо також, що з умови $\mu \neq \frac{\pi l}{\gamma}$, $l \in Z$ випливає виконання на прямій $\operatorname{Im}\lambda = \mu$ апріорної оцінки для розв'язку $\hat{u}$ задачі (4) – (5):

$$\|\hat{u}\|_{2,(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(2+k)} + |\lambda|^{2+k} \|\hat{u}\|_{2,(\alpha,\alpha+\gamma)} \le C_1 \left(\|\hat{f}\|_{2,(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(k)} + |\lambda|^k \|\hat{f}\|_{2,(\alpha,\alpha+\gamma)} + |\lambda|^{k+\frac{3}{2}} (|\hat{g}_\alpha| + |\hat{g}_{\alpha+\gamma}|) \right). \tag{6}$$

На базі нерівності (6) шляхом почергового застосування у зворотному порядку кроків, обернених до кроків 1-3, можна довести наступний факт щодо розв'язності задачі (1) – (2):

Якщо для правих частин задачі (1) – (2) виконані умови (3), а числа k, δ, γ задовольняють нерівності $\mu = k - \frac{\delta}{2} + 1 \neq \frac{l\pi}{\gamma}$, $l \in Z$, то задача (1) – (2) у класі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha,\alpha+\gamma))$ буде мати єдиний розв'язок u, для якого буде справедливою апріорна оцінка

$$\|u\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(2+k)} \le C_2 \left(\|f\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(k)} + \|g\|_{2,\delta,\partial K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)} \right). \tag{7}$$

На жаль, наявні на нинішній момент роботи з даного напрямку не містять дослідження характеру залежності сталих C_1, C_2 від параметрів задачі (1) – (2). Як ми побачимо в подальшому, встановлення такого характеру залежності є принциповим у питаннях одержання апріорних оцінок розв'язків крайових задач, відмінних від задач для рівняння Пуассона. Тому виконаємо таке дослідження.

Нескладно встановити, що розв'язок задачі (4) – (5) можна знайти за формулою

$$\hat{u} = \hat{g}_\alpha \frac{\operatorname{sh}\lambda(\alpha+\gamma-\varphi)}{\operatorname{sh}\lambda\gamma} + \hat{g}_{\alpha+\gamma} \frac{\operatorname{sh}\lambda(\varphi-\alpha)}{\operatorname{sh}\lambda\gamma} + \frac{1}{\lambda}\int_\alpha^\varphi \hat{f}(s)\operatorname{sh}\lambda(\varphi-s)ds - \frac{\operatorname{sh}\lambda(\varphi-\alpha)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda\gamma}\int_\alpha^{\alpha+\gamma}\hat{f}(s)\operatorname{sh}\lambda(\alpha+\gamma-s)ds. \tag{8}$$

Інтегральні доданки формули (8) можемо переписати у вигляді

$$I = \frac{1}{\lambda}\int_\alpha^\varphi \hat{f}(s)\operatorname{sh}\lambda(\varphi-s)ds - \frac{\operatorname{sh}\lambda(\varphi-\alpha)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda\gamma}\int_\alpha^{\alpha+\gamma}\hat{f}(s)\operatorname{sh}\lambda(\alpha+\gamma-s)ds =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_\alpha^\varphi \hat{f}(s)\left(\operatorname{sh}\lambda(\varphi-s) - \frac{\operatorname{sh}\lambda(\varphi-\alpha)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda\gamma}\operatorname{sh}\lambda(\alpha+\gamma-s)\right)ds - \int_\varphi^{\alpha+\gamma}\hat{f}(s)\frac{\operatorname{sh}\lambda(\varphi-\alpha)\operatorname{sh}\lambda(\alpha+\gamma-s)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda\gamma}ds =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\int_\alpha^\varphi \hat{f}(s)\frac{\operatorname{sh}\lambda(\alpha+\gamma-\varphi)\operatorname{sh}\lambda(s-\alpha)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda\gamma}ds - \int_\varphi^{\alpha+\gamma}\hat{f}(s)\frac{\operatorname{sh}\lambda(\alpha+\gamma-s)\operatorname{sh}\lambda(\varphi-\alpha)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda\gamma}ds. \tag{9}$$

Позначимо $\lambda = t + i\mu$ і оцінимо останній вираз на прямій $\{t + i\mu : t \in (-\infty,+\infty)\}$. Шляхом тотожних перетворень можна отримати

$$|\operatorname{sh}\lambda\sigma| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\operatorname{ch}2t\sigma - \cos 2\mu\sigma}.$$

З останньої рівності можемо вивести

$$\left|\frac{\operatorname{sh}\lambda(\alpha+\gamma-\varphi)\operatorname{sh}\lambda(s-\alpha)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda\gamma}\right| = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}2t(\alpha+\gamma-\varphi) - \cos 2\mu(\alpha+\gamma-\varphi)}\sqrt{\operatorname{ch}2t(s-\alpha) - \cos 2\mu(s-\alpha)}}{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch}2t\gamma - \cos 2\mu\gamma}}, \tag{10}$$

$$\left|\frac{\operatorname{sh}\lambda(\alpha+\gamma-s)\operatorname{sh}\lambda(\varphi-\alpha)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda\gamma}\right| = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}2t(\alpha+\gamma-s) - \cos 2\mu(\alpha+\gamma-s)}\sqrt{\operatorname{ch}2t(\varphi-\alpha) - \cos 2\mu(\varphi-\alpha)}}{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch}2t\gamma - \cos 2\mu\gamma}}. \tag{11}$$

Вирази (10), (11) парні по t. Тому ми можемо оцінювати їх лише для $t > 0$. Шляхом винесення з-під коренів у (10), (11) визначальних доданків, а також урахування тих фактів, що при $\alpha < s < \varphi$ буде виконуватись нерівність $\gamma + s - \varphi < \gamma$, а при $\alpha < \varphi < s$ справедлива нерівність $\gamma + \varphi - s < \gamma$, можемо оцінити

$$\left|\frac{\operatorname{sh}\lambda(\alpha+\gamma-\varphi)\operatorname{sh}\lambda(s-\alpha)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda\gamma}\right| \le \frac{C_3}{|\sin\mu\gamma|}, \quad \left|\frac{\operatorname{sh}\lambda(\alpha+\gamma-s)\operatorname{sh}\lambda(\varphi-\alpha)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda\gamma}\right| \le \frac{C_3}{|\sin\mu\gamma|}. \tag{12}$$

де C_3 – числова стала, яка не залежить від t, μ, α, γ.

Вирази з гіперболічними синусами у перших двох доданках із суми (8) можна оцінити аналогічно:

$$\left|\frac{\operatorname{sh}\lambda(\alpha+\gamma-\varphi)}{\operatorname{sh}\lambda\gamma}\right| \le \frac{C_4}{|\sin\mu\gamma|}, \ \left|\frac{\operatorname{sh}\lambda(\varphi-\alpha)}{\operatorname{sh}\lambda\gamma}\right| \le \frac{C_4}{|\sin\mu\gamma|}, \tag{13}$$

де C_4 – числова стала, яка не залежить від t, μ, α, γ.

Зауважимо також, що

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\gamma}\left|\frac{\operatorname{sh}\lambda(\varphi-\alpha)}{\operatorname{sh}\lambda\gamma}\right|^2 d\varphi = \frac{1}{4|\operatorname{sh}\lambda\gamma|^2}\int_{\alpha}^{\alpha+\gamma}\left|\operatorname{ch}2\lambda(\varphi-\alpha)-2\right|d\varphi \le \frac{1}{4|\operatorname{sh}\lambda\gamma|^2}\int_{\alpha}^{\alpha+\gamma}(e^{2t(\varphi-\alpha)}+3)d\varphi \le$$

$$\le \frac{t^{-1}(e^{2t\gamma}-1)+6\gamma}{8|\operatorname{ch}2t\gamma-\cos 2\mu\gamma|} = \frac{1}{|\lambda|}\frac{\dfrac{|\lambda|(e^{2t\gamma}-1)}{t}+6\gamma|\lambda|}{8|\operatorname{ch}2t\gamma-\cos 2\mu\gamma|} \le \frac{C_5}{|\lambda|}, \tag{14}$$

стала C_5 залежить від γ, μ неперервним чином, але не залежить від t, α.

Внаслідок подання (9), нерівностей (12), (13), (14) нерівності Коші-Буняковського, та елементарних інтегральних оцінок, можемо легко отримати нерівність вигляду

$$\|\hat{u}\|_{2,(\alpha,\alpha+\gamma)} \le \frac{C_6}{|\sin\mu\gamma|}\left(\frac{1}{|\lambda|}\|\hat{f}\|_{2,(\alpha,\alpha+\gamma)} + \frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}(|\hat{g}_\alpha|+|\hat{g}_{\alpha+\gamma}|)\right), \tag{16}$$

в якій числова стала C_6 залежить від γ, μ неперервним чином, але не залежить від t, α.

Повністю аналогічно до отримання нерівності (14) можна одержати оцінки і для похідних функції $\hat{u}$ до потрібного порядку. Загалом, отримуємо оцінку норми розв'язку задачі (4) – (5) у просторі Соболєва

$$\|\hat{u}\|^{(2+k)}_{2,(\alpha,\alpha+\gamma)} + |\lambda|^{2+k}\|\hat{u}\|_{2,(\alpha,\alpha+\gamma)} \le \frac{C_7}{|\sin\mu\gamma|}\left(\|\hat{f}\|^{(k)}_{2,(\alpha,\alpha+\gamma)} + |\lambda|^k\|\hat{f}\|_{2,(\alpha,\alpha+\gamma)} + |\lambda|^{k+\frac{3}{2}}(|\hat{g}_\alpha|+|\hat{g}_{\alpha+\gamma}|)\right), \tag{17}$$

в якій числова стала C_7 залежить від γ, μ неперервним чином, але не залежить від t, α. Зауважимо, що оцінка (17) уточнює нерівність (6) у частині характеру залежності сталої від даних задачі.

Внаслідок нерівності (17) за стандартною методикою, запропонованою у [3], можемо отримати апріорну оцінку розв'язку задачі (1), (2), яка уточнює нерівність (7):

$$\|u\|^{(2+k)}_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)} \le \frac{C_8}{|\sin\mu\gamma|}\left(\|f\|^{(k)}_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)} + \|g\|^{\left(\frac{3}{2}+k\right)}_{2,\delta,\partial K(\alpha,\alpha+\gamma)}\right). \tag{18}$$

Тут C_8 – числова стала, яка залежить від γ, μ неперервним чином, але не залежить від α.

4. Розв'язність та апріорна оцінка у випадку найпростішої задачі з параметром. Нехай d – деяка додатна дійсна стала, $\alpha,\gamma \in [0,2\pi)$, $\gamma \ne \pi$. Розглянемо крайову задачу Діріхле у нескінченному куті між променями під кутами α, $\alpha+\gamma$ до напрямку осі Ox:

$$u_{xx} + d^2u_{yy} = f(x,y), \ \alpha < \arg(x,y) < \alpha+\gamma, \tag{19}$$

$$u\big|_{\arg(x,y)=\alpha} = g_\alpha(x,y), \ u\big|_{\arg(x,y)=\alpha+\gamma} = g_{\alpha+\gamma}(x,y), \tag{20}$$

На жаль, безпосереднє застосування методу, викладеного в [3], до дослідження задачі (1) – (2) у загальному випадку призводить до аналізу спектральної задачі з комплексним параметром, для якої не вдається встановити розташування особливих точок оператора розв'язку і, як наслідок – довести аналог наведеного вище твердження.

Однак, задачу (19) – (20) можна за допомогою заміни

$$\xi = x, \ \eta = \frac{y}{d} \tag{21}$$

звести до задачі вигляду (1) – (2):

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = F(\xi,\eta), \ \tilde{\alpha} < \arg(\xi,\eta) < \tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}, \tag{22}$$

$$U\big|_{\arg(\xi,\eta)=\tilde{\alpha}} = G_{\tilde{\alpha}}(\xi,\eta), \ U\big|_{\arg(\xi,\eta)=\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}} = G_{\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}}(\xi,\eta), \tag{23}$$

де $\arg(\xi,\eta)=\tilde{\alpha}$, $\arg(\xi,\eta)=\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}$ – промені, що виникають з променів $\arg(x,y)=\alpha$, $\arg(x,y)=\alpha+\gamma$ відповідно після виконання заміни (21), $U(\xi,\eta)=u(\xi,d\eta)$, $F(\xi,\eta)=f(\xi,d\eta)$, $G_{\tilde{\alpha}}(\xi,\eta)=g_\alpha(\xi,d\eta)$, $G_{\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}}(\xi,\eta)=g_{\alpha+\gamma}(\xi,d\eta)$.

При виконанні заміни (21) стандартний простір з вагою $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha,\alpha+\gamma))$ у координатах x, y переходить у координатах ξ, η у простір $\tilde{V}_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}))$, норму в якому можна знайти за формулою

$$\widetilde{\|U\|}_{2,\delta,K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})}^{(2+k)}=\left(d\sum_{i_1+i_2\le 2+k}\int\limits_{K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})}(\xi^2+d^2\eta^2)^{\frac{\delta}{2}-2-k+i_1+i_2}\left|\frac{1}{d^{i_2}}\frac{\partial^{i_1+i_2}U}{\partial\xi^{i_1}\partial\eta^{i_2}}\right|^2 d\xi d\eta\right)^{1/2}.$$

З очевидної нерівності $\min\{1;d^2\}\cdot(\xi^2+\eta^2)\le\xi^2+d^2\eta^2\le\max\{1;d^2\}\cdot(\xi^2+\eta^2)$ нескладно встановити, що норма простору $\tilde{V}_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}))$ буде еквівалентною до норми простору $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}))$, тобто будуть справедливими нерівності

$$C_9(d,k,\delta)\|U\|_{2,\delta,K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})}^{(2+k)}\le\widetilde{\|U\|}_{2,\delta,K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})}^{(2+k)}\le C_{10}(d,k,\delta)\|U\|_{2,\delta,K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})}^{(2+k)},\qquad(24)$$

причому залежність сталих C_9, C_{10} від $d\in(0,+\infty)$ є неперервною. Можна також встановити оцінки, аналогічні до нерівностей (24), до функцій F та G, де $G(\xi,\eta)=\begin{cases}G_{\tilde{\alpha}}(\xi,\eta), & \arg(\xi,\eta)=\tilde{\alpha},\\ G_{\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}}(\xi,\eta), & \arg(\xi,\eta)=\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}.\end{cases}$

Внаслідок оцінки (24) ми можемо розглядати розв'язок задачі (22), (23) у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}))$. Використовуючи наведений раніше результат з [3], а також нерівність (18), можна стверджувати, що задача (22), (23) буде розв'язною однозначно у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}))$ тоді й лише тоді, коли

$$\mu=k-\frac{\delta}{2}+1\ne\frac{l\pi}{\tilde{\gamma}},\ l\in Z,\qquad(25)$$

а розв'язок U задачі (22), (23) буде задовольняти нерівність

$$\|U\|_{2,\delta,K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})}^{(2+k)}\le\frac{C_{11}}{|\sin\mu\tilde{\gamma}|}\left(\|F\|_{2,\delta,K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})}^{(k)}+\|G\|_{2,\delta,\partial K(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)}\right),\qquad(26)$$

де C_{11} – числова стала, яка залежить від $\tilde{\gamma}$, μ неперервним чином, але не залежить від α.

Внаслідок цього факту, а також нерівностей (24) і аналогічних до них нерівностей для функцій F та G, отримаємо, що при виконанні умови (25) задача (19), (20) буде однозначно розв'язною у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha,\alpha+\gamma))$, а її розв'язок u буде задовольняти нерівність

$$\|u\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(2+k)}\le\frac{C_{12}(d,k,\delta,\tilde{\gamma})}{|\sin\mu\tilde{\gamma}|}\left(\|f\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(k)}+\|g\|_{2,\delta,\partial K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)}\right),\qquad(27)$$

де стала C_{12} залежить від d, k, δ, $\tilde{\gamma}$, причому залежність від $d\in(0,+\infty)$ є неперервною.

Основним питанням, на яке потрібно відповісти для визначення розв'язності задачі (19), (20) у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha,\alpha+\gamma))$, є величина кута $\tilde{\gamma}$ в умові (25). Зауважимо, що в загальному випадку величина кута $\tilde{\gamma}$ залежить не лише від параметрів γ та d, але й від параметру α.

Справді, нескладно переконатись у тому, що при заміні координат (21) промені $\{\arg(x,y)=\tilde{\alpha}\}$, $\{\arg(x,y)=\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}\}$ будуть розташовані у тих же квадрантах, що й промені $\{\arg(x,y)=\alpha\}$, $\{\arg(x,y)=\alpha+\gamma\}$ відповідно. Враховуючи це, тригонометричну формулу

$$\operatorname{ctg}\tilde{\gamma}=\operatorname{ctg}(\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}-\tilde{\alpha})=\frac{\operatorname{ctg}(\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})\operatorname{ctg}\tilde{\alpha}+1}{\operatorname{ctg}\tilde{\alpha}-\operatorname{ctg}(\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})}=\frac{d^2\operatorname{ctg}(\alpha+\gamma)\operatorname{ctg}\alpha+1}{d(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}(\alpha+\gamma))},\qquad(28)$$

а також властивості функції ctg, можна встановити, що

$$\tilde{\gamma}=\operatorname{arcctg}\left(\frac{d^2\operatorname{ctg}(\alpha+\gamma)\operatorname{ctg}\alpha+1}{d(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}(\alpha+\gamma))}\right)+\pi\left[\frac{\gamma}{\pi}\right],\qquad(29)$$

де $[\,]$ – функція цілої частини дійсного числа.

Таким чином, доведено лему про розв'язність задачі (19), (20):

Лема 1. Нехай праві частини задачі (19), (20) задовольняють умову (3). Тоді з виконання умови (25), в якій $\tilde{\gamma}$ визначена рівністю (29), випливає існування та єдиність розв'язку задачі (19), (20) у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha,\alpha+\gamma))$, а також виконання для розв'язку апріорної оцінки (27), стала C_{12} в якій залежить лише від d, k, δ, $\tilde{\gamma}$, причому ця залежність є неперервною.

Доведемо лему, яка встановлює достатні умови розв'язності задачі (19), (20) для довільного $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Лема 2. Позначимо

$$D_* = \min\left\{ d\,\mathrm{ctg}\,\gamma - \frac{1}{2}\left(d - \frac{1}{d}\right)\mathrm{ctg}\,\frac{\gamma}{2}; d\,\mathrm{ctg}\,\gamma + \frac{1}{2}\left(d - \frac{1}{d}\right)\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2} \right\}, \tag{30}$$

$$D^* = \max\left\{ d\,\mathrm{ctg}\,\gamma - \frac{1}{2}\left(d - \frac{1}{d}\right)\mathrm{ctg}\,\frac{\gamma}{2}; d\,\mathrm{ctg}\,\gamma + \frac{1}{2}\left(d - \frac{1}{d}\right)\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2} \right\}, \tag{31}$$

$$\tilde\gamma_{\min} = \mathrm{arcctg}\, D^* + \left[\frac{\gamma}{\pi}\right]\pi, \ \tilde\gamma_{\max} = \mathrm{arcctg}\, D_* + \left[\frac{\gamma}{\pi}\right]\pi. \tag{32}$$

Нехай числа k, δ задовольняють умову

$$\frac{(l-1)\pi}{\tilde\gamma_{\min}} < \left| k - \frac{\delta}{2} + 1 \right| < \frac{l\pi}{\tilde\gamma_{\max}} \tag{33}$$

при деякому натуральному l, такому, що $l < \dfrac{\tilde\gamma_{\max}}{\tilde\gamma_{\max} - \tilde\gamma_{\min}}$, а праві частини задачі (19), (20) задовольняють умову (3).

Тоді для довільного $\alpha \in [0, 2\pi)$ у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha+\gamma))$ існує єдиний розв'язок задачі (19), (20), для якого виконана апріорна оцінка

$$\|u\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(2+k)} \le \frac{C_{13}(d,k,\delta,\tilde\gamma_{\min},\tilde\gamma_{\max})}{\min\{|\sin\mu\tilde\gamma_{\min}|,|\sin\mu\tilde\gamma_{\max}|\}}\left(\|f\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(k)} + \|g\|_{2,\delta,\partial K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)} \right) \tag{34}$$

де величина μ визначена з (25), стала C_{13} залежить лише від d, k, δ, $\tilde\gamma_{\min}$, $\tilde\gamma_{\max}$, причому залежність від $d \in (0, +\infty)$ є неперервною.

Доведення. При перетворенні координат (21) величина $\mathrm{ctg}\,\tilde\gamma$ може бути знайдена за формулою (29). Використовуючи елементарні тригонометричні перетворення, можемо встановити еквівалентну формулу

$$\mathrm{ctg}\,\tilde\gamma = \frac{d^2\,\mathrm{ctg}\,\gamma\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha + (1-d^2)\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\gamma}{d(\mathrm{ctg}^2\,\alpha + 1)}. \tag{35}$$

Знайдемо мінімальне та максимальне значення виразу (35) при $\alpha \in [0, 2\pi)$. Оскільки при цьому $\mathrm{ctg}\,\alpha$ пробігає весь діапазон від $-\infty$ до $+\infty$ включно, то у виразі (35) можемо зробити заміну $t = \mathrm{ctg}\,\alpha$ і дослідити на мінімальне та максимальне значення вираз

$$h(t) = \frac{d^2\,\mathrm{ctg}\,\gamma\, t^2 + (1-d^2)t + \mathrm{ctg}\,\gamma}{d(t^2+1)} = d\,\mathrm{ctg}\,\gamma - \left(d - \frac{1}{d}\right)\frac{t + \mathrm{ctg}\,\gamma}{t^2+1}, \ t \in [-\infty; +\infty].$$

Нескладно встановити, що точками екстремумів виразу $H(t) = \dfrac{t + \mathrm{ctg}\,\gamma}{t^2+1}$ будуть значення $t_{1,2} = -\mathrm{ctg}\,\gamma \pm \dfrac{1}{\sin\gamma}$, а значення $H(t)$ у цих точках становлять $H(t_1) = \dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}\,\dfrac{\gamma}{2}$, $H(t_2) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\,\dfrac{\gamma}{2}$. Тому мінімальне та максимальне значення $h(t)$ можна знайти за формулами $\min\limits_{t\in R} h(t) = \min\{h(t_1); h(t_2)\}$, $\max\limits_{t\in R} h(t) = \max\{h(t_1); h(t_2)\}$, з яких підстановкою значень $t_{1,2}$ отримаємо вирази (30), (31) відповідно.

З формул (30), (31), враховуючи той факт, що при заміні координат (21) промені $\{\arg(x,y) = \tilde\alpha\}$, $\{\arg(x,y) = \tilde\alpha + \tilde\gamma\}$ будуть розташовані у тих же квадрантах, що й промені $\{\arg(x,y) = \alpha\}$, $\{\arg(x,y) = \alpha + \gamma\}$ відповідно, а також властивості функції ctg, можемо встановити, що мінімальне та максимальне значення кута $\tilde\gamma$ при заміні (21) та зміні $\alpha \in [0, 2\pi)$ можна знайти відповідно за формулами (32), а повний діапазон зміни кута $\tilde\gamma$ становитиме $[\tilde\gamma_{\min}, \tilde\gamma_{\max}]$. Застосовуючи результат леми 1, можемо стверджувати, що задача (1), (2) буде однозначно розв'язною у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha+\gamma))$ при довільному $\alpha \in [0, 2\pi)$ тоді й лише тоді, коли для усіх $\tilde\gamma \in [\tilde\gamma_{\min}, \tilde\gamma_{\max}]$ числа k, δ будуть задовольняти умову (25). Звідси нескладно отримати достатність виконання умови (33) для існування розв'язку задачі (19), (20) при довільному $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Для отримання оцінки (34) потрібно оцінити максимальне значення виразу $\dfrac{C_{12}(d,k,\delta,\tilde\gamma)}{|\sin\mu\tilde\gamma|}$ при зміні $\alpha \in [0, 2\pi)$. В силу неперервної залежності C_{12} від $\tilde\gamma$ можемо обрати $C_{13} = \max\limits_{\gamma\in[\gamma_{\min},\gamma_{\max}]} C_{12}(d,k,\delta,\tilde\gamma)$. З нерівностей (33) дістаємо, що $(l-1)\pi < |\mu|\,\tilde\gamma < l\pi$ при $\tilde\gamma \in [\tilde\gamma_{\min}, \tilde\gamma_{\max}]$, і отже $\sin\mu\tilde\gamma \ne 0$ для $\tilde\gamma \in [\tilde\gamma_{\min}, \tilde\gamma_{\max}]$. Враховуючи характер поведінки функції $\sin t$ при $t \in ((l-1)\pi, l\pi)$, отримаємо нерівність $\min\limits_{[\tilde{\gamma}_{\min}, \tilde{\gamma}_{\max}]} |\sin \mu\tilde{\gamma}| = \min\{|\sin \mu\tilde{\gamma}_{\min}|, |\sin \mu\tilde{\gamma}_{\max}|\}$. Тоді з нерівності (27) дістаємо апріорну оцінку (34).

Лема 3. Нехай стала d в задачі (19), (20) приймає значення з проміжку $[d_1, d_2] \subset R^+$. Позначимо

$$D_*(d_1, d_2) = \min_{d\in[d_1,d_2]} \left\{ d \operatorname{ctg}\gamma - \frac{1}{2}\left(d - \frac{1}{d}\right)\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}; d\operatorname{ctg}\gamma + \frac{1}{2}\left(d - \frac{1}{d}\right)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \right\},$$

$$D^*(d_1, d_2) = \max_{d\in[d_1,d_2]} \left\{ d \operatorname{ctg}\gamma - \frac{1}{2}\left(d - \frac{1}{d}\right)\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}; d\operatorname{ctg}\gamma + \frac{1}{2}\left(d - \frac{1}{d}\right)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \right\},$$

$$\tilde{\gamma}_{\min}(d_1, d_2) = \operatorname{arcctg} D^*(d_1, d_2) + \left[\frac{\gamma}{\pi}\right]\pi, \ \tilde{\gamma}_{\max}(d_1, d_2) = \operatorname{arcctg} D_*(d_1, d_2) + \left[\frac{\gamma}{\pi}\right]\pi. \tag{36}$$

Нехай числа k, δ, d_1, d_2 задовольняють умову

$$\frac{(l-1)\pi}{\tilde{\gamma}_{\min}(d_1, d_2)} < \left| k - \frac{\delta}{2} + 1 \right| < \frac{l\pi}{\tilde{\gamma}_{\max}(d_1, d_2)} \tag{37}$$

з деяким натуральним l, таким, що $l < \dfrac{\tilde{\gamma}_{\max}(d_1, d_2)}{\tilde{\gamma}_{\max}(d_1, d_2) - \tilde{\gamma}_{\min}(d_1, d_2)}$.

Нехай праві частини задачі (19), (20) задовольняють умову (3).

Тоді для довільних $\alpha \in [0, 2\pi)$, $d \in [d_1, d_2]$ у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha+\gamma))$ існує єдиний розв'язок задачі (19), (20), для якого виконана апріорна оцінка

$$\|u\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(2+k)} \le \frac{C_{14}(d, k, \delta, \gamma_{\min}, \gamma_{\max})}{\min\{|\sin \mu\tilde{\gamma}_{\min}|, |\sin \mu\tilde{\gamma}_{\max}|\}} \left(\|f\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(k)} + \|g\|_{2,\delta,\partial K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)} \right), \tag{38}$$

стала C_{14} в якій залежить лише від k, δ, d_1, d_2, $\tilde{\gamma}_{\min}(d_1, d_2)$, $\tilde{\gamma}_{\max}(d_1, d_2)$.

Доведення. З доведення леми 2 ми можемо отримати, що для довільних $d > 0$ та $\alpha \in [0, 2\pi)$ будуть справедливими нерівності

$$\min\left\{ d \operatorname{ctg}\gamma - \frac{1}{2}\left(d - \frac{1}{d}\right)\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}; d\operatorname{ctg}\gamma + \frac{1}{2}\left(d - \frac{1}{d}\right)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \right\} \le \operatorname{ctg}\tilde{\gamma} \le$$

$$\le \max\left\{ d \operatorname{ctg}\gamma - \frac{1}{2}\left(d - \frac{1}{d}\right)\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}; d\operatorname{ctg}\gamma + \frac{1}{2}\left(d - \frac{1}{d}\right)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \right\}.$$

Тоді для $d \in [d_1, d_2]$ отримуємо нерівність

$$D_*(d_1, d_2) \le \operatorname{ctg}\tilde{\gamma} \le D^*(d_1, d_2),$$

де $D_*(d_1, d_2)$, $D^*(d_1, d_2)$ визначені у формулюванні теореми. Звідси можемо отримати, що повний діапазон зміни кута $\tilde{\gamma}$ при $\alpha \in [0, 2\pi)$, $d \in [d_1, d_2]$ становитиме $[\tilde{\gamma}_{\min}(d_1, d_2), \tilde{\gamma}_{\max}(d_1, d_2)]$. Крім того, нерівності (37) гарантують для довільних $\alpha \in [0, 2\pi)$, $d \in [d_1, d_2]$ виконання умов

$$(l-1)\pi < |\mu|\tilde{\gamma}_{\min} \le |\mu\tilde{\gamma}| \le |\mu|\tilde{\gamma}_{\max} < l\pi, \tag{39}$$

де параметр μ визначено у формулі (25). Тоді при кожному $\alpha \in [0, 2\pi)$, $d \in [d_1, d_2]$ будуть справедливими умови леми 1 і задача (19), (20) має єдиний розв'язок у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha+\gamma))$.

Додатково з нерівностей (39) можемо отримати, що $\sin \mu\tilde{\gamma} \ne 0$ для $\tilde{\gamma} \in [\tilde{\gamma}_{\min}, \tilde{\gamma}_{\max}]$. Враховуючи характер поведінки функції $\sin t$ при $t \in ((l-1)\pi, l\pi)$, отримаємо нерівність $\min\limits_{[\tilde{\gamma}_{\min}, \tilde{\gamma}_{\max}]} |\sin \mu\tilde{\gamma}| = \min\{|\sin \mu\tilde{\gamma}_{\min}|, |\sin \mu\tilde{\gamma}_{\max}|\}$. Тоді з нерівності (34) дістаємо апріорну оцінку (38).

5. Результати для задачі з довільними сталими коефіцієнтами. Нехай a, b, c – дійсні сталі, $\alpha, \gamma \in [0, 2\pi)$, $\gamma \ne \pi$. Розглянемо крайову задачу Діріхле:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f(x, y), \ \alpha < \arg(x, y) < \alpha + \gamma, \tag{40}$$

$$u\big|_{\arg(x,y)=\alpha} = g_\alpha(x, y), \ u\big|_{\arg(x,y)=\alpha+\gamma} = g_{\alpha+\gamma}(x, y). \tag{41}$$

Будемо розглядати розв'язок u задачі (40) – (41) у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha+\gamma))$.

Від коефіцієнтів a, b, c будемо вимагати виконання умови еліптичності, а також додатності коефіцієнтів a, c. Ці вимоги можна записати у термінах нерівностей

$$4ac - b^2 > 0, \ a > 0. \tag{42}$$

Доведемо ряд теорем про розв'язність та існування апріорної оцінки для розв'язку задачі (40), (41).

Теорема 1. Нехай праві частини задачі (40), (41) задовольняють умову (3), а для коефіцієнтів a, b, c виконана умова (42). Позначимо

$$d = \sqrt{\frac{a+c-\operatorname{sign}(a-c)\sqrt{b^2+(a-c)^2}}{a+c+\operatorname{sign}(a-c)\sqrt{b^2+(a-c)^2}}}\,, \tag{43}$$

і нехай величина $\tilde{\gamma}$ визначена за допомогою формули

$$\tilde{\gamma} = \operatorname{arcctg}\left(\frac{d^2 \operatorname{ctg}(\alpha+\beta+\gamma)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)+1}{d(\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)-\operatorname{ctg}(\alpha+\beta+\gamma))}\right)+\pi\left[\frac{\gamma}{\pi}\right], \tag{44}$$

де

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}\dfrac{b}{c-a},\ c \neq a, \\ \dfrac{\pi}{4},\ c = a. \end{cases} \tag{45}$$

Тоді з виконання умови (25) випливає існування та єдиність розв'язку задачі (40), (41) у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha,\alpha+\gamma))$, а також виконання для розв'язку апріорної оцінки

$$\|u\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(2+k)} \le \frac{C_{15}(a,b,c,k,\delta,\gamma)}{|\sin\mu\tilde{\gamma}|}\left(\|f\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(k)}+\|g\|_{2,\delta,\partial K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)}\right),$$

причому залежність C_{15} від змінних a, b, c буде неперервною на множині коефіцієнтів $\{a \ge c\}$ або на множині $\{a \le c\}$.

Доведення: Зробимо у задачі (40), (41) заміну

$$\xi = x\cos\beta - y\sin\beta,\quad \eta = x\sin\beta + y\cos\beta. \tag{46}$$

Тоді рівняння (40) набуде вигляду

$$\begin{gathered}\left(a+c+(a-c)\cos 2\beta - b\sin 2\beta\right)u_{\xi\xi} + 2((a-c)\sin 2\beta + b\cos 2\beta)u_{\xi\eta} + \\ +\left(a+c-(a-c)\cos 2\beta + b\sin 2\beta\right)u_{\eta\eta} = F(\xi,\eta),\end{gathered} \tag{47}$$

де $F(\xi,\eta)$ – функція, яка виникає з функції $f(x,y)$ внаслідок виконання заміни (45) та множення на 2.

Нехай кут β у заміні (46) визначено рівністю (45). Тоді рівняння (47) набуде вигляду

$$\left(a+c+\operatorname{sign}(a-c)\sqrt{b^2+(a-c)^2}\right)u_{\xi\xi}+\left(a+c-\operatorname{sign}(a-c)\sqrt{b^2+(a-c)^2}\right)u_{\eta\eta} = F(\xi,\eta),$$

а крайову задачу (40), (41) можна переписати у формі

$$u_{\xi\xi}+\frac{a+c-\operatorname{sign}(a-c)\sqrt{b^2+(a-c)^2}}{a+c+\operatorname{sign}(a-c)\sqrt{b^2+(a-c)^2}}u_{\eta\eta} = F(\xi,\eta),\ \alpha+\beta < \arg(x,y) < \alpha+\beta+\gamma, \tag{48}$$

$$u\big|_{\arg(\xi,\eta)=\alpha+\beta} = G_{\alpha+\beta}(\xi,\eta),\ U\big|_{\arg(\xi,\eta)=\alpha+\beta+\gamma} = G_{\alpha+\beta+\gamma}(\xi,\eta), \tag{49}$$

де $G_{\alpha+\beta}(\xi,\eta)$, $G_{\alpha+\beta+\gamma}(\xi,\eta)$ – функції, які виникають відповідно з функцій $g_a(x,y)$, $g_{a+\gamma}(x,y)$ внаслідок виконання заміни.

Введення позначення (43) зводить крайову задачу (48), (49) до вигляду, аналогічного вигляду задачі (19), (20). Тому з леми 1 випливає твердження стосовно існування та єдиності розв'язку задачі (48), (49) та наявності для нього апріорної оцінки (27) у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma))$. Нескладно переконатись у тому, що на множині $\{a \ge c\}$ або на множині $\{a \le c\}$ залежність коефіцієнта d, визначеного за допомогою формули (43), від коефіцієнтів a, b, c, буде неперервною. Враховуючи також те, що заміна (46) є заміною повороту координат і не змінює значення норм функцій у (27), отримуємо твердження теореми відносно апріорної оцінки.

Теорема 2. Нехай праві частини задачі (40), (41) задовольняють умову (3), а для коефіцієнтів a, b, c виконана умова (42). Нехай величина d визначена за допомогою (43), а величини $\tilde{\gamma}_{\min}$, $\tilde{\gamma}_{\max}$ – з формул (32). Нехай при деякому натуральному l, такому, що $l < \dfrac{\tilde{\gamma}_{\max}}{\tilde{\gamma}_{\max}-\tilde{\gamma}_{\min}}$, справедливі нерівності (33).

Тоді для довільного $\alpha \in [0,2\pi)$ у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha,\alpha+\gamma))$ існує єдиний розв'язок задачі (40), (41), для якого виконана апріорна оцінка

$$\|u\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(2+k)} \le \frac{C_{16}(a,b,c,k,\delta,\tilde{\gamma}_{\min},\tilde{\gamma}_{\max})}{\min\{|\sin\mu\tilde{\gamma}_{\min}|,|\sin\mu\tilde{\gamma}_{\max}|\}}\left(\|f\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(k)}+\|g\|_{2,\delta,\partial K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)}\right),$$

причому залежність C_{16} буде неперервною на множині коефіцієнтів $\{a \ge c\}$ або на множині $\{a \le c\}$.

Доведення. Після виконання у задачі (40), (41) заміни (46) за умови (45) можемо отримати задачу (48), (49). Після цього твердження теореми є наслідком леми 2.

Теорема 3. Нехай праві частини задачі (40), (41) задовольняють умову (3), а для коефіцієнтів a, b, c виконана умова (42).

Припустимо, що коефіцієнти a, b, c змінюються в замкненій обмеженій множині, яка є підмножиною множини $\{a \ge c\}$ або $\{a \le c\}$, при цьому величина d, визначена за допомогою (43), приймає значення з проміжку $[d_1, d_2]$. Нехай величини $\tilde{\gamma}_{\min}(d_1, d_2)$, $\tilde{\gamma}_{\max}(d_1, d_2)$ визначені з формул (36) і задовольняють умову (37) при деякому натуральному l, такому, що $l < \dfrac{\tilde{\gamma}_{\max}(d_1,d_2)}{\tilde{\gamma}_{\max}(d_1,d_2) - \tilde{\gamma}_{\min}(d_1,d_2)}$.

Тоді для довільного $\alpha \in [0, 2\pi)$ у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha, \alpha+\gamma))$ існує єдиний розв'язок задачі (40), (41), для якого виконана апріорна оцінка

$$\|u\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(2+k)} \le \frac{C_{17}(k,\delta,d_1,d_2,\tilde{\gamma}_{\min},\tilde{\gamma}_{\max})}{\min\{|\sin \mu\tilde{\gamma}_{\min}|, |\sin \mu\tilde{\gamma}_{\max}|\}} \left(\|f\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(k)} + \|g\|_{2,\delta,\partial K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)} \right),$$

причому залежність C_{17} буде неперервною на множині коефіцієнтів $\{a \ge c\}$ або на множині $\{a \le c\}$.

Доведення. Після виконання у задачі (40), (41) заміни (45) за умови (47) можемо отримати задачу (48), (49). Після цього твердження теореми є наслідком леми 3.

6. Висновки. Лінійні еліптичні задачі в областях з кутовими та конічними точками на нинішній момент досить добре досліджені. Однак істотною перешкодою у розповсюдженні результатів стосовно розв'язності еліптичних задач на нелінійні задачі є відсутність зручних для застосування апріорних оцінок розв'язків цих задач. Результати даної роботи, хоча й отримані для найпростішого випадку, дозволяють говорити про можливість встановлення таких оцінок, а також уточнюють доведені іншими дослідниками апріорні оцінки розв'язку.

Отримані твердження дають підставу говорити про можливість розповсюдження отриманих результатів принаймні на випадок задачі з кутовою точкою у просторах розмірності більше, ніж 2. Цілком можливо, що техніка отримання подібних оцінок у задачах з конічною точкою буде суттєво відрізнятись від наведеної у даній роботі.

1. *Джафаров Р.М.* Весовые априорные оценки решения квазилинейной задачи Дирихле в области с конической точкой // Труды ИПММ НАН Украины. – 1998. – Т.2. – С. 55-63. 2. *Коваленко О.В.* Апріорна оцінка розв'язку лінійної еліптичної крайової задачі в області з конічною точкою // Вісн. Київ. ун-ту. Математика. Механіка. – 2005. – Вип. 13 – 14. – С. 25 – 29. 3. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Труды Моск. мат. о-ва. -1967. – Т. 16. – с. 209 – 292. 4. *Мазья В.Г.* Оценки L_p – средних и асимптотика решений эллиптических краевых задач в конусе. II. Операторы с переменными коэффициентами // Mathematische. Nachrichten. – 1988. – Bd 137. – S. 113 – 139. 5. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* Об асимптотике фундаментальных решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Проблемы матем. анализа. – 1979. – Вып. 7. – с. 100 – 145. 6. *Фуфаев В.В.* К задаче Дирихле для областей с углами // ДАН. – 1960. – Т. 131, № 1. – с. 37 – 39.

Надійшла до редколегії 16.03.09

УДК 517.943

П. Самусенко, канд.фіз.-мат.наук, доц.
E-mail: psamusenko@ukr.net

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ І ВИРОДЖЕННЯМ У ТОЧЦІ

У роботі побудовано асимптотичний розв'язок основної початкової задачі для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням аргументу і виродженням у точці.

The asymptotic solution of the initial-value problem for the singularly perturbed systems of the delay differential equations with degeneration in a point is constructed in work.

Вступ

Системи диференціальних рівнянь з малим запізненням аргументу розглядались в роботах Ю.О. Рябова, А. Халаная, А.М. Родіонова, Дж. Като, А.Б. Васильєвої, В.І. Рожкова тощо. Зокрема, А.М. Родіонов [3] побудував асимптотичне розвинення розв'язку початкової задачі за степенями малого запізнення. Аналогічне твердження для систем диференціальних рівнянь з малим відхиленням отримала А.Б. Васильєва [1, с. 246-266]. Поведінку розв'язків у випадку, коли запізнення $\tau = \tau(t) \to 0$ при $t \to \infty$ досліджував К. Кук [6].

Лінійні системи диференціальних рівнянь із запізненням аргументу розглядались С.Ф. Фещенком та М.І. Шкілем [5]. А саме, використовуючи метод кроків, у випадку сталого запізнення вони розв'язали основну початкову задачу. Більше того, С.Ф. Фещенко та М.І. Шкіль розробили алгоритм побудови асимптотичного розв'язку регулярно збуреної системи диференціальних рівнянь, який може застосовуватись і за умови змінного запізнення аргументу.

Об'єкт та методи досліджень

У даній роботі досліджується основна початкова задача

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = f\big(x(t,\varepsilon), x(t-\varepsilon,\varepsilon), t, \varepsilon\big), \; t \in [\varepsilon; T], \tag{1}$$

$$x_{|0 \le t \le \varepsilon} = \varphi(t), \tag{2}$$