Доведення. Після виконання у задачі (40), (41) заміни (46) за умови (45) можемо отримати задачу (48), (49). Після цього твердження теореми є наслідком леми 2.

Теорема 3. Нехай праві частини задачі (40), (41) задовольняють умову (3), а для коефіцієнтів a, b, c виконана умова (42).

Припустимо, що коефіцієнти a, b, c змінюються в замкненій обмеженій множині, яка є підмножиною множини $\{a \geq c\}$ або $\{a \leq c\}$, при цьому величина d, визначена за допомогою (43), приймає значення з проміжку $[d_1, d_2]$. Нехай величини $\tilde{\gamma}_{\min}(d_1,d_2)$, $\tilde{\gamma}_{\max}(d_1,d_2)$ визначені з формул (36) і задовольняють умову (37) при деякому натуральному l, такому, що $l < \dfrac{\tilde{\gamma}_{\max}(d_1,d_2)}{\tilde{\gamma}_{\max}(d_1,d_2) - \tilde{\gamma}_{\min}(d_1,d_2)}$.

Тоді для довільного $\alpha \in [0, 2\pi)$ у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K(\alpha,\alpha+\gamma))$ існує єдиний розв'язок задачі (40), (41), для якого виконана апріорна оцінка

$$\|u\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(2+k)} \leq \frac{C_{17}(k,\delta,d_1,d_2,\tilde{\gamma}_{\min},\tilde{\gamma}_{\max})}{\min\{|\sin\mu\tilde{\gamma}_{\min}|,|\sin\mu\tilde{\gamma}_{\max}|\}} \left(\|f\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(k)} + \|g\|_{2,\delta,\partial K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)} \right),$$

причому залежність C_{17} буде неперервною на множині коефіцієнтів $\{a \geq c\}$ або на множині $\{a \leq c\}$.

Доведення. Після виконання у задачі (40), (41) заміни (45) за умови (47) можемо отримати задачу (48), (49). Після цього твердження теореми є наслідком леми 3.

6. Висновки. Лінійні еліптичні задачі в областях з кутовими та конічними точками на нинішній момент досить добре досліджені. Однак істотною перешкодою у розповсюдженні результатів стосовно розв'язності еліптичних задач на нелінійні задачі є відсутність зручних для застосування апріорних оцінок розв'язків цих задач. Результати даної роботи, хоча й отримані для найпростішого випадку, дозволяють говорити про можливість встановлення таких оцінок, а також уточнюють доведені іншими дослідниками апріорні оцінки розв'язку.

Отримані твердження дають підставу говорити про можливість розповсюдження отриманих результатів принаймні на випадок задачі з кутовою точкою у просторах розмірності більше, ніж 2. Цілком можливо, що техніка отримання подібних оцінок у задачах з конічною точкою буде суттєво відрізнятись від наведеної у даній роботі.

1. *Джафаров Р.М.* Весовые априорные оценки решения квазилинейной задачи Дирихле в области с конической точкой // Труды ИПММ НАН Украины. – 1998. – Т.2. – С. 55-63. 2. *Коваленко О.В.* Апріорна оцінка розв'язку лінійної еліптичної крайової задачі в області з конічною точкою // Вісн. Київ. ун-ту. Математика. Механіка. – 2005. – Вип. 13 – 14. – С. 25 – 29. 3. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Труды Моск. мат. о-ва. -1967. – Т. 16. – с. 209 – 292. 4. *Мазья В.Г.* Оценки L_p – средних и асимптотика решений эллиптических краевых задач в конусе. II. Операторы с переменными коэффициентами // Mathematische. Nachrichten. – 1988. – Bd 137. – S. 113 – 139. 5. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* Об асимптотике фундаментальных решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Проблемы матем. анализа. – 1979. – Вып. 7. – с. 100 – 145. 6. *Фуфаев В.В.* К задаче Дирихле для областей с углами // ДАН. – 1960. – Т. 131, № 1. – с. 37 – 39.

Надійшла до редколегії 16.03.09

УДК 517.943

П. Самусенко, канд.фіз.-мат.наук, доц.
E-mail: psamusenko@ukr.net

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ І ВИРОДЖЕННЯМ У ТОЧЦІ

У роботі побудовано асимптотичний розв'язок основної початкової задачі для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням аргументу і виродженням у точці.

The asymptotic solution of the initial-value problem for the singularly perturbed systems of the delay differential equations with degeneration in a point is constructed in work.

Вступ

Системи диференціальних рівнянь з малим запізненням аргументу розглядались в роботах Ю.О. Рябова, А. Халаная, А.М. Родіонова, Дж. Като, А.Б. Васильєвої, В.І. Рожкова тощо. Зокрема, А.М. Родіонов [3] побудував асимптотичне розвинення розв'язку початкової задачі за степенями малого запізнення. Аналогічне твердження для систем диференціальних рівнянь з малим відхиленням отримала А.Б. Васильєва [1, с. 246-266]. Поведінку розв'язків у випадку, коли запізнення $\tau = \tau(t) \to 0$ при $t \to \infty$ досліджував К. Кук [6].

Лінійні системи диференціальних рівнянь із запізненням аргументу розглядались С.Ф. Фещенком та М.І. Шкілем [5]. А саме, використовуючи метод кроків, у випадку сталого запізнення вони розв'язали основну початкову задачу. Більше того, С.Ф. Фещенко та М.І. Шкіль розробили алгоритм побудови асимптотичного розв'язку регулярно збуреної системи диференціальних рівнянь, який може застосовуватись і за умови змінного запізнення аргументу.

Об'єкт та методи досліджень

У даній роботі досліджується основна початкова задача

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = f\big(x(t,\varepsilon), x(t-\varepsilon,\varepsilon), t, \varepsilon\big), \quad t \in [\varepsilon; T], \tag{1}$$

$$x_{|0 \leq t \leq \varepsilon} = \varphi(t), \tag{2}$$

де $B(t)$ – квадратна матриця n-го порядку, $f(x(t,\varepsilon),x(t-\varepsilon,\varepsilon),t,\varepsilon)$ та $\varphi(t)$ – вектор-функції розмірності n, $x(t,\varepsilon)$ – шукана n-вимірна вектор-функція, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$, $0\le\varepsilon_0<<1$.

Нехай мають місце умови:

1) $B(t)\in C^{\infty}_{[0;T]}$;

2) вектор-функція $f(x,[x],t,\varepsilon)$ $([x(t)=x(t-\varepsilon)])$ має нескінченну кількість неперервних частинних похідних за всіма змінними на множині $G=\{(x,[x],t,\varepsilon):\|x\|\le a,\|[x]\|\le a,\ 0\le t\le T,\ 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0\}$, $\|\varphi(t)\|<a$, $t\in[0;\varepsilon_0]$;

3) $\varphi(t)\in C^{\infty}_{[0;\varepsilon]}$;

4) рівняння $f(x,x,t,0)=0$ на множині $D=\{(x,x,t):\|x\|\le a,\ 0\le t\le T\}$ має неперервний розв'язок $x=\psi(t)$;

5) в'язка матриць $f_x(\psi(0),\psi(0),0,0)-\lambda B(0)$, де $f_x(\psi(0),\psi(0),0,0)$ – квадратна матриця n-го порядку, стовпцями якої є $\frac{\partial f_i(x,[x],0,0)}{\partial x_j}\Big|_{(x,[x],t)=(\psi(0),\psi(0),0)}$, $i,j=\overline{1,n}$ – регулярна, має $n-1$ простих "скінченних" і один "нескінчений" елементарних дільників;

6) $f_{[x]}(\psi(0),\psi(0),0,0)=0$;

7) $\operatorname{Re}\lambda_i<0$, $i=\overline{1,n-1}$, де λ_i – власні значення матриці $f_x(\psi(0),\psi(0),0,0)$ відносно $B(0)$.

Тоді існуватимуть неособливі матриці $P(t)$ та $Q(t)$ такі, що

$$P(t)\big(f_x(\psi(t),\psi(t),t,0)+f_{[x]}(\psi(t),\psi(t),t,0)\big)Q(t)=\Omega(t),\ \ P(t)B(t)Q(t)=H(t),$$

де $\Omega(t)=\begin{pmatrix}\omega_1(t)&0\\0&\Omega_2(t)\end{pmatrix}$, $H(t)=\begin{pmatrix}h_1(t)&0\\0&H_2(t)\end{pmatrix}$, $\Omega_0\equiv\Omega(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&W\end{pmatrix}$, $H_0\equiv H(0)=\begin{pmatrix}0&0\\0&E_{n-1}\end{pmatrix}$,

$W=diag\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{n-1}\}$, E_{n-1} – одинична матриця $(n-1)$-го порядку. Не обмежуючи загальності вважатимемо, що

$$f_x(\psi(t),\psi(t),t,0)+f_{[x]}(\psi(t),\psi(t),t,0)=\Omega(t),\ \ B(t)=H(t).$$

Розв'язок задачі (1), (2) шукатимемо у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=\bar{x}(t,\varepsilon)+\Pi x(\tau,\varepsilon), \tag{3}$$

де $\bar{x}(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\bar{x}_s(t)$ – регулярний ряд, а $\Pi x(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\Pi_s x(\tau)$ – примежевий ряд, $\tau=\frac{t}{\varepsilon}$ [1, c. 248].

Запишемо $f(x(t,\varepsilon),[x(t,\varepsilon)],t,\varepsilon)$ у вигляді

$$f(x(t,\varepsilon),[x(t,\varepsilon)],t,\varepsilon)=f(\bar{x}(t,\varepsilon),[\bar{x}(t,\varepsilon)],t,\varepsilon)+$$

$$+f(\bar{x}(\varepsilon\tau,\varepsilon)+\Pi x(\tau,\varepsilon),[\bar{x}(\varepsilon\tau,\varepsilon)+\Pi x(\tau,\varepsilon)],\varepsilon\tau,\varepsilon)-f(\bar{x}(\varepsilon\tau,\varepsilon),[\bar{x}(\varepsilon\tau,\varepsilon)],\varepsilon\tau,\varepsilon)\equiv\bar{f}(t,\varepsilon)+\Pi f(\tau,\varepsilon)$$

і розкладемо вектор-функції $\bar{f}(t,\varepsilon)$ та $\Pi f(\tau,\varepsilon)$ у формальні ряди за степенями ε:

$$\bar{f}(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\bar{f}_s(t),\ \ \Pi f(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\Pi_s f(\tau).$$

Тут, зокрема,

$$\bar{f}_0(t)=f(\bar{x}_0(t),\bar{x}_0(t),t,0),\ \ \bar{f}_s(t)=\big(\bar{f}_x(t)+\bar{f}_{[x]}(t)\big)\bar{x}_s(t)+f_s(t),\ \ s=1,2,...,$$

$$\Pi_0 f(\tau)=f(\bar{x}_0(0)+\Pi_0x(\tau),\bar{x}_0(0)+[\Pi_0x(\tau)],0,0)-f(\bar{x}_0(0),\bar{x}_0(0),0,0)$$

$$\Pi_s f(\tau)=f_x(\tau)\Pi_s x(\tau)+f_{[x]}(\tau)[\Pi_s x(\tau)]+F_s(\tau),\ \ s=1,2,...,$$

елементи матриць $\bar{f}_x(t)$, $\bar{f}_{[x]}(t)$ та $f_x(\tau)$, $f_{[x]}(\tau)$ обчислюються в точках $(\bar{x}_0(t),\bar{x}_0(t),t,0)$ та $(\bar{x}_0(0)+\Pi_0x(\tau),\bar{x}_0(0)+[\Pi_0x(\tau)],0,0)$ відповідно; вектор-функції $f_s(t)$ та $F_s(\tau)$ певним чином виражаються через $\bar{x}_i(t)$, $[\bar{x}_i(t)]$ та $\Pi_i x(\tau)$, $[\Pi_i x(\tau)]$, $i<s$.

Підставимо ряд (3) до системи (1) і зрівняємо окремо вирази, що залежать від t і τ:

$$\varepsilon B(t)\frac{d\bar{x}}{dt}=\bar{f}(t,\varepsilon),\ \ t\in[\varepsilon;T], \tag{4}$$

$$B(\varepsilon\tau)\frac{d\Pi x}{d\tau}=\Pi f(\tau,\varepsilon),\ \ \tau\ge 1. \tag{5}$$

Початкова умова (2) при цьому набуде вигляду $\bar{x}(t,\varepsilon)_{|0\le t\le\varepsilon}+\Pi x(\tau,\varepsilon)_{|0\le\tau\le 1}=\varphi(t)$. Звідси

$$\left(\Pi_0 x(\tau)+\varepsilon\Pi_1 x(\tau)+\ldots\right)\Big|_{0\le\tau\le 1}=\varphi(\varepsilon\tau)-\bar{x}_0(\varepsilon\tau)-\varepsilon\bar{x}_1(\varepsilon\tau)-\ldots=$$

$$=\left(\varphi(0)-\bar{x}_0(0)\right)+\varepsilon\left(\varphi'(0)\tau-\bar{x}_0'(0)\tau-\bar{x}_1(0)\right)+\ldots+\varepsilon^s\left(\frac{\varphi^{(s)}(0)}{s!}\tau^s-\sum_{k=0}^{s-1}\frac{\bar{x}_k^{(s-k)}(0)}{(s-k)!}\tau^{s-k}-\bar{x}_s(0)\right)+\ldots \tag{6}$$

У тотожностях (4), (5) зрівняємо коефіцієнти біля однакових степенів ε. Зокрема, при ε^0 матимемо:

$$f\left(\bar{x}_0(t),\bar{x}_0(t),t,0\right)=0,$$

$$H_0\frac{d\Pi_0 x(\tau)}{d\tau}=f\left(\bar{x}_0(0)+\Pi_0 x(\tau),\bar{x}_0(0)+[\Pi_0 x(\tau)],0,0\right)-f\left(\bar{x}_0(0),\bar{x}_0(0),0,0\right).$$

Звідси $\bar{x}_0(t)=\psi(t)$, $t\in[0;T]$, і тому

$$H_0\frac{d\Pi_0 x(\tau)}{d\tau}=f\left(\psi(0)+\Pi_0 x(\tau),\psi(0)+[\Pi_0 x(\tau)],0,0\right). \tag{7}$$

Надалі припускатимемо:

8) $\varphi_1(0)=\psi_1(0)$, де $\varphi_1(0)$ та $\psi_1(0)$ – перші компоненти векторів $\varphi(0)$ та $\psi(0)$ відповідно;

9) функція $f_1(x,[x],t,\varepsilon)$ не містить x_2, x_3, …, x_n;

10) система (7) має розв'язок $\Pi_0 x=\Pi_0 x(\tau)$, $\tau\ge 1$, такий, що $\Pi_0 x(1)=\varphi(0)-\psi(0)$ і $\Pi_0 x(\tau)\to 0$, $\tau\to\infty$, причому $\left\|\psi(t)+\Pi_0 x(t/\varepsilon)\right\|<a$, $t\in[0;T]$.

З умов 8), 9) випливає, що $\Pi_{01}x(\tau)\equiv 0$, $\tau\ge 1$.

Останні $n-1$ рівнянь системи (7) запишемо наступним чином:

$$\frac{d\Pi_{02}x(\tau)}{d\tau}=W\Pi_{02}x(\tau)+G_2\left(\Pi_0 x(\tau),[\Pi_0 x(\tau)]\right),\ \tau\ge 1, \tag{8}$$

де $G\left(\Pi_0 x(\tau),[\Pi_0 x(\tau)]\right)=f\left(\psi(0)+\Pi_0 x(\tau),\psi(0)+[\Pi_0 x(\tau)],0,0\right)-\Omega_0\Pi_0 x(\tau)$ ($\Pi_{02}x(\tau)$ – вектор-функція, що містить $n-1$ останніх компонент $\Pi_0 x(\tau)$, $G_2(\Pi_0 x(\tau),[\Pi_0 x(\tau)])$ побудована аналогічно).

Використовуючи метод послідовних наближень, розв'яжемо систему (8) на кожному з піввідрізків $[l;l+1)$, $l=\overline{1,l_0-1}$. При цьому $\Pi_{02}x(0)=\varphi_2(0)-\psi_2(0)$. Покладемо $c_{l_0}=\lim\limits_{\tau\to l_0}\Pi_{02}x(\tau)$ і $P=\sup\limits_{l_0-1\le\tau<l_0}\left\|\Pi_{02}x(\tau)\right\|$.

Оскільки $\Pi_{02}x(\tau)\to 0$, $\tau\to\infty$, то вважатимемо, що $\max\left\{\left\|c_{l_0}\right\|,P\right\}<\delta$, де δ – довільне фіксоване число.

Зазначимо, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існуватиме число $\eta(\varepsilon)$ таке, що

$$\left\|G(u,[\omega])-G(\upsilon,[\omega])\right\|<\frac{\varepsilon}{k_0}\left\|u-\upsilon\right\| \text{ і } \left\|G(u,\upsilon)\right\|<\frac{\varepsilon}{k_0}\left(\|u\|+\|\upsilon\|\right)$$

(число k_0 визначимо нижче) для всіх $\|u\|\le\eta(\varepsilon)$, $\|\upsilon\|\le\eta(\varepsilon)$, $\|[\omega]\|\le\eta(\varepsilon)$.

Розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$\Pi_{02}x(\tau)=\exp\left(W(\tau-l_0)\right)c_{l_0}+\int_{l_0}^{\tau}\exp\left(W(\tau-s)\right)G_2\left(\Pi_0 x(s),[\Pi_0 x(s)]\right)ds, \tag{9}$$

$\tau\in[l_0;l_0+1)$. Для розв'язання системи (10) скористаємось методом послідовних наближень. Нехай $\Pi_{02}^{(0)}x(\tau)=\exp\left(W(\tau-l_0)\right)c_{l_0}$,

$$\Pi_{02}^{(k+1)}x(\tau)=\exp\left(W(\tau-l_0)\right)c_{l_0}+\int_{l_0}^{\tau}\exp\left(W(\tau-s)\right)G_2\left(\Pi_0^{(k)}x(s),[\Pi_0 x(s)]\right)ds,\ k=0,1,\ldots \tag{10}$$

Тоді $\left\|\Pi_{02}^{(0)}x(\tau)\right\|\le e^{\lambda(\tau-l_0)}\left\|c_{l_0}\right\|$, де $\lambda=\max\{\operatorname{Re}\lambda_1,\ldots,\operatorname{Re}\lambda_{n-1}\}$. Число $k_0>1$ підберемо так, щоб

$$\frac{1}{k_0}\left(e^{\lambda(\tau-l_0)}\left\|c_{l_0}\right\|+P\right)\le e^{\lambda(\tau-l_0)}\left\|c_{l_0}\right\|.$$

Тоді $\left\|\Pi_{02}^{(1)}x(\tau)-\Pi_{02}^{(0)}x(\tau)\right\|\le\varepsilon e^{\lambda(\tau-l_0)}\left\|c_{l_0}\right\|$ і $\left\|\Pi_{02}^{(1)}x(\tau)\right\|\le(1+\varepsilon)e^{\lambda(\tau-l_0)}\left\|c_{l_0}\right\|\le\frac{1}{1-\varepsilon}e^{\lambda(\tau-l_0)}\left\|c_{l_0}\right\|$.

Вважатимемо, що $\frac{\delta}{1-\varepsilon}<\eta(\varepsilon)$.

Припустимо, що $\left\|\Pi_{02}^{(k)}x(\tau)-\Pi_{02}^{(k-1)}x(\tau)\right\|\le\varepsilon^k e^{\lambda(\tau-l_0)}\left\|c_{l_0}\right\|$ і $\left\|\Pi_{02}^{(k)}x(\tau)\right\|\le\left(1+\varepsilon+\ldots+\varepsilon^k\right)e^{\lambda(\tau-l_0)}\left\|c_{l_0}\right\|\le\frac{1}{1-\varepsilon}e^{\lambda(\tau-l_0)}\left\|c_{l_0}\right\|$.

Тоді $\left\|\Pi_{02}^{(k+1)}x(\tau)-\Pi_{02}^{(k)}x(\tau)\right\|\le\varepsilon^{k+1}e^{\lambda(\tau-l_0)}\left\|c_{l_0}\right\|$ і $\left\|\Pi_{02}^{(k+1)}x(\tau)\right\|\le\left(1+\varepsilon+\ldots+\varepsilon^{k+1}\right)e^{\lambda(\tau-l_0)}\left\|c_{l_0}\right\|\le\frac{1}{1-\varepsilon}e^{\lambda(\tau-l_0)}\left\|c_{l_0}\right\|$.

Тому, використовуючи метод послідовних наближень, можна довести існування та єдиність розв'язку $\Pi_{02}x = \Pi_{02}x(\tau)$, $\tau \in [l_0; l_0+1)$, системи (9) такого, що $\|\Pi_{02}x(\tau)\| \le \frac{1}{1-\varepsilon} e^{\lambda(\tau - l_0)} \|c_{l_0}\|$, $\tau \in [l_0; l_0+1)$.

Покладемо $c_{l_0+1} = \lim\limits_{\tau \to l_0+1} \Pi_{02}x(\tau)$. Тоді $\|c_{l_0+1}\| \le \frac{e^{\lambda}}{1-\varepsilon}\|c_{l_0}\|$. Використовуючи метод послідовних наближень, можна аналогічно довести існування та єдиність розв'язку $\Pi_{02}x = \Pi_{02}x(\tau)$, системи (9) на піввідрізку $[l_0+k; l_0+k+1)$. При цьому $\|\Pi_{02}x(\tau)\| \le \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{e^{\lambda}}{1-\varepsilon}\right)^k e^{\lambda(\tau - l_0 - k)}\|c_{l_0}\|$, $\tau \in [l_0+k; l_0+k+1)$, $k = 0,1,...$

А тому для досить малого ε існуватимуть сталі $c^{(0)} > 0$ та κ_0, $\lambda < \kappa_0 < 0$, такі, що $\|\Pi_0 x(\tau)\| \le c^{(0)} e^{\kappa_0 \tau}$, $\tau \ge 1$.

Відповідну малість сталих ε та δ можна гарантувати вибором досить великого l_0. Зазначимо, що за побудовою $\Pi_0 x(\tau) \in C^{\infty}_{[1;\infty)}$.

У тотожностях (4), (5) зрівняємо коефіцієнти при ε^1:

$$\left(\bar f_x(t) + \bar f_{[x]}(t)\right)\bar x_1(t) = B(t)\frac{d\psi(t)}{dt} - f_1(t),\ H_0 \frac{d\Pi_1 x(\tau)}{d\tau} = f_x(\tau)\Pi_1 x(\tau) + a(\tau), \tag{11}$$

де $a(\tau) = f_{[x]}(\tau)[\Pi_1 x(\tau)] + F_1(\tau) - \tau \frac{dB(0)}{dt}\frac{d\Pi_0 x(\tau)}{d\tau}$.

З умов 6), 7) випливає, що $\det\left(\bar f_x(0) + \bar f_{[x]}(0)\right) \ne 0$. А тому $\bar x_1(t) = \left(\bar f_x(t) + \bar f_{[x]}(t)\right)^{-1}\left(B(t)\frac{d\psi(t)}{dt} - f_1(t)\right)$, $t \le t_0 \le T$.

Із системи (11) дістаємо

$$\Pi_{11}x(\tau) = -a_1(\tau), \tag{12}$$

$$\frac{d\Pi_{12}x(\tau)}{d\tau} = W\Pi_{12}x(\tau) + b(\tau), \tag{13}$$

де $\{b(\tau)\}_i = \sum\limits_{l=1}^{n}\left(\{f_x(\tau)\}_{il} - \delta_{il}\lambda_i\right)\{\Pi_1 x(\tau)\}_l + \{a(\tau)\}_i$, $i = \overline{2,n}$, δ_{ik} – символ Кронекера.

Звідси

$$\Pi_{12}x(\tau) = \exp(W(\tau-1))c_1 + \int\limits_1^{\tau}\exp(W(\tau - s))b(s)ds,\ \tau \ge 1. \tag{14}$$

Тоді, як і в попередньому випадку, можна показати, що система (12), (14) має єдиний розв'язок $\Pi_1 x = \Pi_1 x(\tau)$, $\tau \ge 1$. Зазначимо, що $\|\Pi_1 x(\tau)\| \le c^{(1)} e^{\kappa_1 \tau}$, $\tau \ge 1$, $\lambda < \kappa_1 < 0$.

11) Нехай $\varphi_1'(0) - \psi_1'(0) + f_{\varepsilon 1}(\psi(0), \psi(0), 0, 0) = 0$.

Тоді сталу $c_1 > 0$ можна підібрати так, щоб мала місце рівність $\Pi_1 x(1) = \varphi'(0) - \psi'(0) - \bar x_1(0)$.

Зрівнюючи коефіцієнти біля ε^s, $s \ge 1$, приходимо до умови:

12) $\Pi_{s1}x(1) = \frac{\varphi_1^{(s)}(0)}{s!} - \sum\limits_{k=0}^{s-1}\frac{\bar x_{k1}^{(s-k)}(0)}{(s-k)!} - \bar x_{s1}(0)$, $s \ge 1$.

Тоді сталу c_k, що виникає під час інтегрування, можна підібрати так, щоб

$$\Pi_s x(1) = \frac{\varphi^{(s)}(0)}{s!} - \sum\limits_{k=0}^{s-1}\frac{\bar x_k^{(s-k)}(0)}{(s-k)!} - \bar x_s(0),\ s \ge 1.$$

Зазначимо, що умови 11), 12) матимуть місце якщо, наприклад, $\varphi_1(t) = \psi_1(t) = const$, $t \ge \varepsilon$, $f_{1\varepsilon}(\psi(t), \psi(t), t, \varepsilon) \equiv 0$, $t \in [0; t_0]$, $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$.

За побудовою, $\|\Pi_s x(\tau)\| \le c^{(s)} e^{\kappa_s \tau}$, $\tau \ge 1$, $\lambda < \kappa_s < 0$, $s = 2,3,...$

Покажемо, що побудований формальний розв'язок (3) є рівномірним асимптотичним розвиненням "точного" розв'язку задачі (1), (2) на відрізку $[0; t_0]$, $t_0 \le T$.

Для цього в системі (1) зробимо заміну

$$x(t,\varepsilon) = x_m(t,\varepsilon) + y(t,\varepsilon), \tag{15}$$

де $x_m(t,\varepsilon) = \sum\limits_{s=0}^{m}\varepsilon^s\left(\bar x_s(t) + \Pi_s x(\tau)\right)$, а $y(t,\varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція. Дістанемо

$$\varepsilon B(t)\frac{dy}{dt} = g(y(t,\varepsilon), [y(t,\varepsilon)], t, \varepsilon), \tag{16}$$

де $g(y(t,\varepsilon), [y(t,\varepsilon)], t, \varepsilon) = f(x_m(t,\varepsilon) + y(t,\varepsilon), [x_m(t,\varepsilon) + y(t,\varepsilon)], t, \varepsilon) - \varepsilon B(t)\frac{dx_m(t,\varepsilon)}{dt}$.

За побудовою $\|g(0,0,t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{m+1})$, $t \in [0;t_0]$. При цьому

$$y(t,\varepsilon)_{|0 \le t \le \varepsilon} = O(\varepsilon^{m+1}). \qquad (17)$$

Нехай θ_i, $i = \overline{1,n-1}$, – власні вектори матриці Ω_0 відносно H_0, $\tilde{\theta}$, ξ_i, $i = \overline{1,n-1}$, та $\tilde{\xi}$ – елементи нуль-простору матриць H_0, $(\Omega_0 - \lambda_i H_0)^*$ та H_0^* відповідно. Вважатимемо, що

$$(H_0\theta_i, \xi_j) = \delta_{ij}, \; i,j = \overline{1,n-1}, \; (\Omega_0\tilde{\theta}, \tilde{\xi}) = 1$$

[4, с. 32]. Зауважимо, що вектори θ_i, $i = \overline{1,n-1}$, $\tilde{\theta}$, та ξ_i, $i = \overline{1,n-1}$, $\tilde{\xi}$ – лінійно незалежні на відрізку $[0;T]$.

За умов, накладених на матриці H_0 та Ω_0, система $\varepsilon H_0 \dfrac{dy}{dt} = \Omega_0 y$, має $n-1$ формальних лінійно незалежних розв'язків $y_i(t,\varepsilon) = \theta_i \exp\left(\dfrac{t}{\varepsilon}\lambda_i\right)$, $i = \overline{1,n-1}$.

Утворимо матриці $P_1 = [\Xi, \tilde{\xi}]^*$, $Q_1 = [\Theta, \tilde{\theta}]$, де $\Xi = [\xi_1,...,\xi_{n-1}]$, $\Theta = [\theta_1,...,\theta_{n-1}]$. У системі (16) покладемо

$$y(t,\varepsilon) = Q_1 z(t,\varepsilon) \qquad (18)$$

і домножимо її обидві частини зліва на P_1:

$$\varepsilon P_1 B(t) Q_1 \frac{dz}{dt} = P_1\Omega_0 Q_1 z + h(z,[z],t,\varepsilon), \qquad (19)$$

$$h(z,[z],t,\varepsilon) = P_1 g(Q_1 z, [Q_1 z], t, \varepsilon) - P_1\Omega_0 Q_1 z.$$

Оскільки $\Xi^*\Omega_0\Theta = W$, $\tilde{\xi}^*\Omega_0\Theta = 0$ та $\Xi^*\Omega_0\tilde{\theta} = 0$, то система (19) набуде вигляду

$$\varepsilon\begin{pmatrix} \Xi^* B(t)\Theta & \Xi^* B(t)\tilde{\theta} \\ \tilde{\xi}^* B(t)\Theta & \tilde{\xi}^* B(t)\tilde{\theta} \end{pmatrix}\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u + h(z,[z],t,\varepsilon). \qquad (20)$$

Доведемо існування та єдиність розв'язку системи (20) такого, що

$$z(\varepsilon,\varepsilon) = Q_1^{-1}(\varphi(\varepsilon) - x_m(\varepsilon,\varepsilon)). \qquad (21)$$

Для цього розглянемо рівняння

$$z(t,\varepsilon) = V(t,\varepsilon)V^{-1}(\varepsilon,\varepsilon)Q_1^{-1}(\varphi(\varepsilon) - x_m(\varepsilon,\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^t V(t,\varepsilon)V^{-1}(s,\varepsilon) l(z(s,\varepsilon),[z(s,\varepsilon)],s,\varepsilon)ds, \qquad (22)$$

де $V(t,\varepsilon)$ – фундаментальна матриця системи

$$\varepsilon\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \tilde{\xi}^* B(t)\tilde{\theta} \end{pmatrix}\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z,$$

$$l(z,[z],s,\varepsilon) = (P_1 B(s) Q_1)^{-1}\left(-\varepsilon\begin{pmatrix} \Xi^*(B(s) - B(0))\Theta & \Xi^* B(s)\tilde{\theta} \\ \tilde{\theta}^* B(s)\Theta & 0 \end{pmatrix} V'(s,\varepsilon)V^{-1}(s,\varepsilon)z + h(z,[z],s,\varepsilon)\right).$$

Надалі припускатимемо виконання умов:

13) $\tilde{\xi}^* B(t)\tilde{\theta} = t d(t)$, причому $d(0) < 0$;

14) $|b_{i1}(t)| + |b_{1j}(t)| = O(t^2)$, $i,j = \overline{2,n}$, $b_{ij}(t)$ – компоненти матриці $B(t)$.

Тоді, використовуючи метод послідовних наближень, можна показати, що рівняння (22) на відрізку $[\varepsilon;t_0]$, $t_0 \le T$, має єдиний розв'язок $z = z(t,\varepsilon)$ для якого правильна рівність (21), причому $\|z(t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^m)$.

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1) – 14). Тоді для всіх $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$ на відрізку $[\varepsilon;t_0]$ $t_0 \le T$, існує єдиний розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$ задачі (1), (2), такий, що

$$\|x(t,\varepsilon) - x_m(t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^m). \qquad (23)$$

Розглянемо випадок, коли умова 7) не виконується. Припустимо, що:

15) рівняння $f(x,x,t,0) = 0$ на множині D має нескінченно диференційовний розв'язок $x = \psi(t,\alpha)$, $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_{n-m})$, α_i, $i = \overline{1,n-m}$, – деякі параметри;

16) в'язка матриць $f_x(\psi(t,\alpha),\psi(t,\alpha),t,0) + f_{[x]}(\psi(t,\alpha),\psi(t,\alpha),t,0) - \lambda B(t)$, $t \in (0;T]$ має n "скінченних" елементарних дільників;

17) $\operatorname{Re}\lambda_1(t) < 0$, $t \in (0;T]$; $\operatorname{Re}\lambda_i(t) \le 0$, $t \in [0;T]$, і $\lambda_i(0) \ne 0$, $i = \overline{2,m}$; $\lambda_i(t) \equiv 0$, $t \in [0;T]$, $i = \overline{m+1,n}$, де $\lambda_i(t)$ – власні значення матриці $f_x(\psi(t,\alpha),\psi(t,\alpha),t,0) + f_{[x]}(\psi(t,\alpha),\psi(t,\alpha),t,0)$ відносно $B(t)$.

Розв'язок задачі (1), (2) шукатимемо у вигляді (3), причому $\bar{x}(t,\varepsilon) = \bar{x}_0(t) + \sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s \bar{x}_s(t,\varepsilon)$.

Нехай

$$\bar f(t,\varepsilon)= f(\bar x_0(t),\bar x_0(t),t,0)+\varepsilon\left(\bar f_x(0)\bar x_1(t,\varepsilon)+ f_1(t,\varepsilon)\right)+\ldots+$$
$$+\varepsilon^s\left(\bar f_x(0)\bar x_s(t,\varepsilon)+ f_s(t,\varepsilon)\right)+\ldots\equiv \bar f_0(t)+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s\bar f_s(t,\varepsilon),$$
$$f_s(t,\varepsilon)=\frac{\bar f_x(t)-\bar f_x(0)}{\varepsilon}\bar x_{s-1}(t,\varepsilon)+\frac{\bar f_{[x]}(t)}{\varepsilon}\bar x_{s-1}(t,\varepsilon)+\tilde f_s(t,\varepsilon),\ s\ge 2,$$

$f_1(t,\varepsilon)=\tilde f_1(t,\varepsilon)$; вектори $\tilde f_s(t,\varepsilon)$ певним чином виражаються через $\bar x_i(t,\varepsilon)$, $i<s$.

Задачу (1), (2) розглядатимемо на відрізку $[\varepsilon;k\varepsilon]$, число k визначимо нижче. Зазначимо, що $\bar x_0(t)=\psi(t,\alpha)$, $t\in[0;T]$, а $\Pi_s x(\tau)$, $s\ge 0$, будуються аналогічно до попереднього випадку. Припускаючи виконання раніше наведених умов, вважатимемо, що $\psi(t)=\psi(t,\alpha(t))$.

Для визначення $\bar x_s(t,\varepsilon)$, $s\ge 1$, в системі (4) зрівняємо коефіцієнти біля ε^s. Зокрема, біля ε^1 матимемо:

$$\Omega_0\bar x_1(t,\varepsilon)=B(t)\frac{d\bar x_0(t)}{dt}-f_1(t,\varepsilon). \tag{24}$$

Система (24) сумісна тоді і тільки тоді, коли $R\left(B(t)\frac{d\bar x_0(t)}{dt}-f_1(t,\varepsilon)\right)=0$, або $RB(t)\psi_\alpha(t,\alpha(t))\frac{d\alpha}{dt}=Rf_1(t,\varepsilon)$,

де R – $((n-m)\times n)$-матриця, рядками якої є власні вектори матриці Ω_0^*, що відповідають нульовому власному значенню. За побудовою $\det(RB(t)\psi_\alpha(t,\alpha(t)))\ne 0$, $t\in[\varepsilon;k\varepsilon]$. А тому матимемо

$$\frac{d\alpha}{dt}=\left(RB(t)\psi_\alpha(t,\alpha(t))\right)^{-1}Rf_1(t,\varepsilon). \tag{25}$$

18) Нехай система (25) має розв'язок $\alpha=\alpha(t)$, $t\in[0;k\varepsilon]$, такий, що $\|\psi(t,\alpha(t))+\Pi_0 x(t,\varepsilon)\|<a$, $t\in[0;k\varepsilon]$.

Тоді $\bar x_1(t,\varepsilon)=\psi_\alpha(0,\alpha(0))\beta(t)+\tilde x_1(t,\varepsilon)$, де $\beta(t)$ – поки що довільна $(n-m)$-вимірна вектор-функція, а $\tilde x_1(t,\varepsilon)$ – деякий частинний розв'язок системи (24).

З умови 11) випливає існування сталих c_1 та $\beta(0)=\beta_0$ таких, що $\Pi_1 x(1)=\varphi'(0)-\psi'(0,\alpha(0))-\bar x_1(0,\varepsilon)$.

При цьому функція $\beta=\beta(t)$, $t\in[0;k\varepsilon]$, для якої $\beta(0)=\beta_0$, визначатиметься з лінійної системи диференціальних рівнянь. На s-му кроці вираз для $\bar x_s(t,\varepsilon)$ міститиме довільну $(n-m)$-вимірну вектор-функцію $\gamma(t)$. Умова 12) дозволяє відповідним чином визначити $\gamma(0)=\gamma_0$, а потім з умови сумісності для $\bar x_{s+1}(t,\varepsilon)$ отримати лінійну систему, звідки знайти $\gamma=\gamma(t)$.

Зазначимо, що число k, $k>1$, можна підібрати так, щоб рівняння (22) мало єдиний розв'язок $z=z(t,\varepsilon)$, $t\in[\varepsilon;k\varepsilon]$, причому $\|z(t,\varepsilon)\|=O(\varepsilon^m)$.

Теорема 2. Нехай виконуються умови 1) – 3), 5), 6), 8) – 13), 15) – 18). Тоді для всіх $0<\varepsilon\le\varepsilon_1\le\varepsilon_0$ на відрізку $[\varepsilon;k\varepsilon]$, $k>1$, існує єдиний розв'язок $x=x(t,\varepsilon)$ задачі (1), (2) такий, що має місце оцінка (23).

Розглянемо тепер систему (1) на відрізку $[k\varepsilon;t_0]$, $t_0\le T$. Нехай

$$x(k\varepsilon,\varepsilon)=x_\varepsilon, \tag{26}$$

x_ε побудований за формулами (15), (18), (22) при $t=k\varepsilon$.

Розв'язок системи (1) на відрізку $[k\varepsilon;t_0]$ шукатимемо у вигляді $x(t,\varepsilon)=\bar x_0(t)+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s x_s(t)$. Як і раніше, підставляючи ряд $x(t,\varepsilon)$ до системи (1) і зрівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів ε, дістаємо

$$f(\bar x_0(t),\bar x_0(t),t,0)=0,$$
$$\left(\bar f_x(t)+\bar f_{[x]}(t)\right)x_s(t)=B(t)\frac{dx_{s-1}(t)}{dt}-f_s(t),\ s=1,2,\ldots \tag{27}$$

Нехай $F(t)=\begin{pmatrix}F_1(t) & F_2(t)\\ F_3(t) & F_4(t)\end{pmatrix}\equiv\bar f_x(t)+\bar f_{[x]}(t)$, де $F_1(t)$ – квадратна матриця m-го порядку. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що $\det F_1(t)\ne 0$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$, $t_0\le T$.

Система (27) при $s=1$ сумісна тоді і тільки тоді, коли

$$K^*(t)B(t)\psi_\alpha(t,\alpha)\frac{d\alpha}{dt}=K^*(t)f_1(t), \tag{28}$$

де $K(t)=\begin{pmatrix}\left(F_3(t)F_1^{-1}(t)\right)^*\\ -E_{n-m}\end{pmatrix}$.

Як і в [2, с. 12] можна показати, що $\det\left(K^*(t)B(t)\psi_\alpha(t,\alpha)\right)\neq 0$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$. Більше того, якщо $\left\|F_1^{-1}(t)F_2(t)\right\|=O(t)$ і $\left\|F_3(t)F_1^{-1}(t)\right\|=O(1)$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$, або $\left\|F_1^{-1}(t)F_2(t)\right\|=O(1)$ і $\left\|F_3(t)F_1^{-1}(t)\right\|=O(t)$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$, то враховуючи структуру матриці $K^*(t)B(t)\psi_\alpha(t,\alpha)$, існуватиме стала $c>0$ така, що $\det\left(K^*(t)B(t)\psi_\alpha(t,\alpha)\right)\geq c$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$.

19) Нехай система (28) має розв'язок $\alpha=\alpha(t)$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$, для якого $\left\|\psi(t,\alpha(t))\right\|<a$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$.

Тоді $x_1(t)=\psi_\alpha(t,\alpha)\alpha_1(t)+\tilde{x}_1(t)$, де $\alpha_1(t)$ – поки що невизначена $(n-m)$-вимірна вектор-функція, а $\tilde{x}_1(t)$ – деякий частинний розв'язок системи (27) при $s=1$.

Аналогічно можна довести сумісність систем (27) для $s\geq 2$.

20) Нехай $\left\|x_s(t)\right\|=O(1)$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$, $s\geq 1$.

Зробивши в системі (1) заміну (15), де $x_m(t,\varepsilon)=\bar{x}_0(t)+\sum_{s=1}^{m}\varepsilon^s x_s(t)$, дістанемо

$$\varepsilon B(t)\frac{dy}{dt}=q\left(y(t,\varepsilon),[y(t,\varepsilon)],t,\varepsilon\right), \tag{29}$$

$q\left(y(t,\varepsilon),[y(t,\varepsilon)],t,\varepsilon\right)=f\left(x_m(t,\varepsilon)+y(t,\varepsilon),[x_m(t,\varepsilon)+y(t,\varepsilon)],t,\varepsilon\right)-\varepsilon B(t)\dfrac{dx_m(t,\varepsilon)}{dt}$. За побудовою $\left\|q(0,0,t,\varepsilon)\right\|=O\left(\varepsilon^{m+1}\right)$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$.

21) Нехай система (29) на відрізку $[k\varepsilon;t_0]$ має розв'язок $y=y(t,\varepsilon)$ такий, що $\left\|y(t,\varepsilon)\right\|=O(1)$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$, і $y(\varepsilon,\varepsilon)=x_\varepsilon-x_m(k\varepsilon,\varepsilon)$.

Теорема 3. Нехай виконуються умови 1), 2), 5), 15) – 17), 19) – 21). Тоді для $t\in[k\varepsilon;t_0]$, $t_0\leq T$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_1]$, $\varepsilon_1\leq\varepsilon_0$, задача (1), (26) має єдиний розв'язок $x=x(t,\varepsilon)$.

Наслідок. Якщо виконуються умови теорем 2 та 3, то для $\varepsilon\in(0;\varepsilon_1]$, $\varepsilon_1\leq\varepsilon_0$, задача (1), (2) на відрізку $[\varepsilon;t_0]$, $t_0\leq T$, має єдиний розв'язок $x=x(t,\varepsilon)$.

Результати та їх обговорення

Результати роботи обговорювались на Міжнародній конференції "Боголюбівські читання 2007" (28 – 30 серпня 2007 р., м. Київ).

Висновки

У роботі доведено теореми про існування та єдиність розв'язку основної початкової задачі для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням аргументу і виродженням у точці як у некритичному, так і у критичному випадках. При цьому побудовано рівномірне асимптотичне розвинення зазначеного розв'язку.

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с. 2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. – М.: Изд-во Моск. унив., 1978. – 106 с. 3. *Родионов А.М.* Применение метода возмущений к линейным уравнениям с распределенным запаздыванием // ЖВММФ, 1964. – 4, 2. – С. 358–363. 4. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с. 5. *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Пидченко Ю.П., Сотниченко Н.А.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – К.: Наук. думка, 1981. – 294 с. 6. *Cooke K.* Functional differential equations with asymptotically vanishing lag // Rend. circ. mat. Palermo, 1967. – 16, 1. – P. 39–56.

Надійшла до редколегії 05.03.09

УДК 517.98

А. Чайковський, канд. фіз.-мат. наук, доц.
E-mail: ChaikovskiyAV@ukr.net

ВИЗНАЧЕНІ НА ОСІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Наведено нові класи розв'язків, визначених на всій осі, лінійних диференціальних рівнянь з запізненням аргументу відносно абстрактних функцій. Показані диференціальні властивості всіх розв'язків, визначених на осі.

New classes of solutions, which are defined on the whole axis, of linear differential equations with argument's delay for abstract functions are given. Differential properties of any solution, which is defined on the axis, are given.

1. Вступ. Нехай $(B,\|\cdot\|)$ – комплексний банахів простір, $A\in L(B)$ – лінійний неперервний оператор в B. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння першого порядку з запізненням аргументу

$$x'(t)=Ax(t-1)+y(t),\ t\in\mathbf{R}, \tag{1}$$

де $y\in C(\mathbf{R},B)$ – відома функція, $x\in C^1(\mathbf{R},B)$ – шукана. Рівнянням такого типу присвячено чимало робіт. Проте переважно вдається або знайти розв'язки на піввісі [2,3], або обмежені чи періодичні розв'язки за умови наявності аналогічної властивості у функції y. Питання про опис розв'язків, визначених на осі, для довільного y залишається відкритим. В цій роботі буде наведено деякі класи таких розв'язків та описано їх властивості.