Як і в [2, с. 12] можна показати, що $\det\left(K^*(t)B(t)\psi_\alpha(t,\alpha)\right)\neq 0$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$. Більше того, якщо $\left\|F_1^{-1}(t)F_2(t)\right\|=O(t)$ і $\left\|F_3(t)F_1^{-1}(t)\right\|=O(1)$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$, або $\left\|F_1^{-1}(t)F_2(t)\right\|=O(1)$ і $\left\|F_3(t)F_1^{-1}(t)\right\|=O(t)$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$, то враховуючи структуру матриці $K^*(t)B(t)\psi_\alpha(t,\alpha)$, існуватиме стала $c>0$ така, що $\det\left(K^*(t)B(t)\psi_\alpha(t,\alpha)\right)\geq c$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$.

19) Нехай система (28) має розв'язок $\alpha=\alpha(t)$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$, для якого $\left\|\psi(t,\alpha(t))\right\|<a$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$.

Тоді $x_1(t)=\psi_\alpha(t,\alpha)\alpha_1(t)+\tilde{x}_1(t)$, де $\alpha_1(t)$ – поки що невизначена $(n-m)$-вимірна вектор-функція, а $\tilde{x}_1(t)$ – деякий частинний розв'язок системи (27) при $s=1$.

Аналогічно можна довести сумісність систем (27) для $s\geq 2$.

20) Нехай $\left\|x_s(t)\right\|=O(1)$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$, $s\geq 1$.

Зробивши в системі (1) заміну (15), де $x_m(t,\varepsilon)=\bar{x}_0(t)+\sum_{s=1}^{m}\varepsilon^s x_s(t)$, дістанемо

$$\varepsilon B(t)\frac{dy}{dt}=q\left(y(t,\varepsilon),\left[y(t,\varepsilon)\right],t,\varepsilon\right), \tag{29}$$

$q\left(y(t,\varepsilon),\left[y(t,\varepsilon)\right],t,\varepsilon\right)=f\left(x_m(t,\varepsilon)+y(t,\varepsilon),\left[x_m(t,\varepsilon)+y(t,\varepsilon)\right],t,\varepsilon\right)-\varepsilon B(t)\dfrac{dx_m(t,\varepsilon)}{dt}$. За побудовою $\left\|q(0,0,t,\varepsilon)\right\|=O\left(\varepsilon^{m+1}\right)$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$.

21) Нехай система (29) на відрізку $[k\varepsilon;t_0]$ має розв'язок $y=y(t,\varepsilon)$ такий, що $\left\|y(t,\varepsilon)\right\|=O(1)$, $t\in[k\varepsilon;t_0]$, і $y(\varepsilon,\varepsilon)=x_\varepsilon-x_m(k\varepsilon,\varepsilon)$.

Теорема 3. Нехай виконуються умови 1), 2), 5), 15) – 17), 19) – 21). Тоді для $t\in[k\varepsilon;t_0]$, $t_0\leq T$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_1]$, $\varepsilon_1\leq\varepsilon_0$, задача (1), (26) має єдиний розв'язок $x=x(t,\varepsilon)$.

Наслідок. Якщо виконуються умови теорем 2 та 3, то для $\varepsilon\in(0;\varepsilon_1]$, $\varepsilon_1\leq\varepsilon_0$, задача (1), (2) на відрізку $[\varepsilon;t_0]$, $t_0\leq T$, має єдиний розв'язок $x=x(t,\varepsilon)$.

Результати та їх обговорення

Результати роботи обговорювались на Міжнародній конференції "Боголюбівські читання 2007" (28 – 30 серпня 2007 р., м. Київ).

Висновки

У роботі доведено теореми про існування та єдиність розв'язку основної початкової задачі для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням аргументу і виродженням у точці як у некритичному, так і у критичному випадках. При цьому побудовано рівномірне асимптотичне розвинення зазначеного розв'язку.

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с. 2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. – М.: Изд-во Моск. унив., 1978. – 106 с. 3. *Родионов А.М.* Применение метода возмущений к линейным уравнениям с распределенным запаздыванием // ЖВММФ, 1964. – 4, 2. – С. 358–363. 4. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с. 5. *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Пидченко Ю.П., Сотниченко Н.А.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – К.: Наук. думка, 1981. – 294 с. 6. *Cooke K.* Functional differential equations with asymptotically vanishing lag // Rend. circ. mat. Palermo, 1967. – 16, 1. – P. 39–56.

Надійшла до редколегії 05.03.09

УДК 517.98

А. Чайковський, канд. фіз.-мат. наук, доц.
E-mail: ChaikovskiyAV@ukr.net

ВИЗНАЧЕНІ НА ОСІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Наведено нові класи розв'язків, визначених на всій осі, лінійних диференціальних рівнянь з запізненням аргументу відносно абстрактних функцій. Показані диференціальні властивості всіх розв'язків, визначених на осі.

New classes of solutions, which are defined on the whole axis, of linear differential equations with argument's delay for abstract functions are given. Differential properties of any solution, which is defined on the axis, are given.

1. Вступ. Нехай $(B,\|\cdot\|)$ – комплексний банахів простір, $A\in L(B)$ – лінійний неперервний оператор в B. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння першого порядку з запізненням аргументу

$$x'(t)=Ax(t-1)+y(t),\ t\in\mathbf{R}, \tag{1}$$

де $y\in C(\mathbf{R},B)$ – відома функція, $x\in C^1(\mathbf{R},B)$ – шукана. Рівнянням такого типу присвячено чимало робіт. Проте переважно вдається або знайти розв'язки на піввісі [2,3], або обмежені чи періодичні розв'язки за умови наявності аналогічної властивості у функції y. Питання про опис розв'язків, визначених на осі, для довільного y залишається відкритим. В цій роботі буде наведено деякі класи таких розв'язків та описано їх властивості.

2. Розв'язки, визначені на вісі. В першій теоремі наводиться розв'язок рівняння (1) з довільним обмеженим операторним коефіцієнтом A за умови, що функція $y(t)$ фінітна. При цьому отриманий розв'язок, взагалі кажучи, відмінний від описаного в [4].

Теорема 1. Для кожної фінітної функції $y \in C(\mathbf{R}, B)$ рівняння (1) має визначений на всій осі розв'язок

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \int_{-\infty}^{t} \frac{(t-s)^k}{k!} y(s-k)\,ds,\ t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Доведення. Нехай $\operatorname{supp} y \subset [-N, N],\ N \in \mathbf{N}$. Тоді вираз (2) може бути перетворений таким чином:

$$x(t) = 0,\ t \le -N,$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{p+N} A^k \int_{-\infty}^{t} \frac{(t-s)^k}{k!} y(s-k)\,ds,\ t \in [p, p+1],\ p \in \mathbf{Z},\ p \ge -N.$$

При цьому

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{p+N} A^k \int_{-\infty}^{t} \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} y(s-k)\,ds + y(t) = \begin{vmatrix} s-1=\tau \\ k-1=m \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{m=0}^{p-1+N} A^{m+1} \int_{-\infty}^{t-1} \frac{(t-1-\tau)^m}{m!} y(\tau-m)\,d\tau + y(t) = Ax(t-1) + y(t),\ t \in [p, p+1],\ p \in \mathbf{Z},\ p \ge -N.$$

Отже, (2) дійсно задає розв'язок рівняння (1), визначений на всій осі. Теорему 1 доведено.

Зауваження. У випадку, коли спектр $\sigma(A)$ оператора A не перетинається з подвійною спіраллю $\{ite^{it} \mid t \in \mathbf{R}\}$, в роботі [4] показано, що для всіх обмежених y (в тому числі фінітних) рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок. Наступний приклад показує, що отриманий розв'язок (2) не завжди є обмеженим.

Приклад. Нехай $u : \mathbf{R} \to [0, +\infty),\ u(t) = 1,\ t \in [0,1],\ \operatorname{supp} u \subset [-1, 2]$. Для довільного ненульового елемента $y_0 \in B$ розглянемо функцію $y(t) = y_0 u(t),\ t \in \mathbf{R}$. Нехай при цьому оператор A – це оператор, що діє за формулою $Ab := \alpha b,\ b \in B,$ де $\alpha > 0$ – фіксоване. Тоді $x(t) = v(t) y_0,\ t \in \mathbf{R},$ де

$$v(N) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \int_{-\infty}^{N} \frac{(N-s)^k}{k!} u(s-k)\,ds \ge \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k \int_{k}^{k+1} \frac{(N-s)^k}{k!} u(s-k)\,ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k \int_{k}^{k+1} \frac{(N-s)^k}{k!} ds \ge \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k \frac{(N-k-1)^k}{k!},\ N \in \mathbf{N}.$$

Останній вираз при $N \to \infty$ прямує до $+\infty$, причому швидше будь-якого степеня N.

Наступне твердження дає умови існування і єдності розв'язку рівняння (1) в деяких класах, більш широких, ніж клас фінітних функцій. Це твердження узагальнює результат з [4].

Теорема 2. Рівняння (1) для кожного $r \ge 0$ і кожної функції

$$y \in E_r := \left\{ y \in C(\mathbf{R}, B) \mid \|y\|_r := \sup_{t \in \mathbf{R}} \frac{\|y(t)\|}{e^{rt}} < +\infty \right\}$$

має єдиний розв'язок в класі $E_r \cap C^1(\mathbf{R}, B)$ тоді й лише тоді, коли

$$\sigma(A) \cap \{(is - r)e^{r-is} \mid s \in \mathbf{R}\} = \varnothing. \tag{3}$$

Доведення. Зробимо заміну відомої та невідомої функції: $z(t) = e^{-rt} x(t),\ u(t) = e^{-rt} y(t),\ t \in \mathbf{R}$. Отримаємо рівняння $z'(t) = Ae^{-r} z(t-1) - rz(t) + u(t),\ t \in \mathbf{R}$, де відома функція u та невідома функція z є обмеженими. Як показано в [4], умова існування і єдиності розв'язку для отриманого рівняння є такою:

$$\forall s \in \mathbf{R} : 0 \notin \sigma\left(-isI - Ae^{-r+is} + rI\right),$$

де I – одиничний оператор в B. Враховуючи теорему Данфорда про відображення спектра [1], ця умова може бути переписана у вигляді $0 \notin \{-is - \lambda e^{-r+is} + r \mid s \in \mathbf{R},\ \lambda \in \sigma(A)\}$, що еквівалентно умові (3).

Теорему 2 доведено.

Наступне твердження показує, що вираз (2) задає розв'язок рівняння (1) не тільки для фінітних функцій, але й для більш широкого класу функцій y, визначеного в теоремі 2, якщо додатково накласти деякі умови на оператор A.

Теорема 3. Нехай $r > 0$ і $\|A\| < e^r$. Тоді рівняння (1) для кожної функції $y \in E_r$ має єдиний в класі $E_r \cap C^1(\mathbf{R}, B)$ розв'язок x, причому цей розв'язок задається формулою (2) і $\|x\|_r \le \dfrac{e^r \|y\|_r}{re^r - \|A\|}$.

Доведення. Якщо $\|A\| < re^r$, то $\forall s \in \mathbf{R}$: $\left|(is-r)e^{r-is}\right| = \sqrt{s^2+r^2}e^r \ge re^r > |\lambda|$, $\lambda \in \sigma(A)$, отже виконується умова (3). Згідно теореми 2 розв'язок існує і єдиний. Покажемо, що його можна задати формулою (2). Якщо $y \in E_r$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k \int_{-\infty}^{t}\frac{(t-s)^k}{k!}\|y(s-k)\|ds \le \|y\|_r \sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k \int_{-\infty}^{t}\frac{(t-s)^k}{k!}e^{r(s-k)}ds = \|y\|_r e^{rt}\sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k \int_{0}^{+\infty}\frac{s^k}{k!}e^{-r(s+k)}ds =$$

$$= \|y\|_r e^{rt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k e^{-rk}}{r^{k+1}k!}\int_0^{+\infty}\tau^k e^{-\tau}d\tau = \|y\|_r e^{rt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k e^{-rk}}{r^{k+1}} = \frac{\|y\|_r e^{rt}}{r\left(1-\frac{\|A\|e^{-r}}{r}\right)} = \frac{\|y\|_r e^{r(t+1)}}{re^r-\|A\|},\ t \in \mathbf{R}.$$

Тому вираз (2) має сенс і задана ним функція x належить класу E_r. Крім того, почленно продиференційований ряд (2) абсолютно та рівномірно на кожному відрізку збіжний:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k \int_{-\infty}^{t}\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\|y(s-k)\|ds \le \|y\|_r \sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k \int_{-\infty}^{t}\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}e^{r(s-k)}ds = \|y\|_r e^{rt}\sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k \int_{0}^{+\infty}\frac{s^{k-1}}{(k-1)!}e^{-r(s+k)}ds =$$

$$= \|y\|_r e^{rt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k e^{-rk}}{r^{k+1}(k-1)!}\int_0^{+\infty}\tau^{k-1} e^{-\tau}d\tau = \|y\|_r e^{rt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k e^{-rk}}{r^{k+1}} = \frac{\|y\|_r e^{rt}}{r\left(1-\frac{\|A\|e^{-r}}{r}\right)} = \frac{\|y\|_r e^{r(t+1)}}{re^r-\|A\|},\ t \in \mathbf{R}.$$

Тому перевірка того, що (2) є розв'язком рівняння (1) аналогічна доведенню теореми 1.

Остання теорема показує, що диференціальні властивості довільного розв'язку рівняння (1), визначеного на всій вісі, визначаються властивостями виразу (2).

Теорема 4. Нехай рівняння (1) має розв'язок $x \in C^1(\mathbf{R}, B)$. Позначимо через $x_N(t)$ N-ту часткову суму ряду (2). Тоді x має ті ж особливості похідних до порядку N, що і x_N, тобто $x - x_N \in C^{N+1}(\mathbf{R}, B)$.

Доведення. Для похідної різниці $x - x_N$ правильна формула

$$\left(x(t)-x_N(t)\right)' = Ax(t-1)+y(t)-\left(y(t)+\sum_{k=1}^{N}A^k\int_{-\infty}^{t}\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}y(s-k)ds\right) =$$

$$= A\left(x(t-1)-\sum_{k=0}^{N-1}A^k\int_{-\infty}^{t}\frac{(t-s)^k}{k!}y(s-k-1)ds\right) = A\left(x(t-1)-\sum_{k=0}^{N-1}A^k\int_{-\infty}^{t-1}\frac{(t-1-s)^k}{k!}y(s-k)ds\right) =$$

$$= A\left(x(t-1)-x_{N-1}(t-1)\right),\ t \in \mathbf{R},\ N \in \mathbf{N}.$$

Тому за індукцією маємо

$$\left(x(t)-x_N(t)\right)^{(N)} = A^N\left(x(t-N)-x_0(t-N)\right) = A^N\left(x(t-N)-\int_{-\infty}^{t-N}y(s)ds\right),\ t \in \mathbf{R},\ N \in \mathbf{N},$$

і $x - x_N \in C^{N+1}(\mathbf{R}, B)$.

3. Висновки. В роботі описано нові класи визначених на всій осі розв'язків, диференціальних рівнянь з запізненням аргументу відносно функцій зі значеннями в банановому просторі у випадку обмеженого операторного коефіцієнта. Встановлено диференціальні властивості всіх таких розв'язків.

1. *Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г.* Функциональный анализ. – К., 1990. – 600 с. 2. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М., 1972. – 352 с. 3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М., 1984. – 421 с. 4. *Чайковський А.В.* Про існування та єдиність обмежених розв'язків диференціальних рівнянь зі зсувами аргументу в банаховому просторі // Доповіді НАН України. – 2000. – №8 – С. 33-37.

Надійшла до редколегії 29.09.08

УДК 515.126, 517.91

Т. Будницька, асп.
Email:Budnitska_T@ukr.net

ТОПОЛОГІЧНА КЛАСИФІКАЦІЯ АФІННИХ ВІДОБРАЖЕНЬ З C В C

Отримано необхідні та достатні умови топологічної спряженості афінних відображень, що діють з C в C.
Necessary and sufficient conditions for topological conjugacy of affine maps from C to C are obtained.

1. Вступ

Всюди в роботі розглядаються матриці над полем дійсних чисел. Нехай $X = R^n$ або C.

Відображення f, $g : X \to X$ називаються *лінійно спряженими* (будемо позначати $f \overset{l}{\sim} g$), якщо існує бієктивне лінійне відображення $h : X \to X$ таке, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$.