де

$$P[\mathbf{r}, f] = \mathbf{r}^\top f, \tag{29}$$

$$Q[\mathbf{r}, f] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (\hat{\mathbf{r}}^\top v_i)^{(i)} f^{(i-j-1)}, \tag{30}$$

$$R[\mathbf{r}, f] = \alpha^{-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (\hat{\mathbf{r}}^\top u_i)^{(i)} f^{(i-j-1)} + \alpha^{-1}\Omega_0[\mathbf{r}, q]\mathbf{M}_0\Omega_0[\mathbf{r}, f], \tag{31}$$

а $\Omega_0[\mathbf{r}, q]$ та $\Omega_0[\mathbf{r}, f]$ мають наступний вигляд

$$\Omega_0[\mathbf{r}, q] = \int_{(x_0,t_0,y)}^{(x,t,y)} P[\mathbf{r}, q]dx + Q[\mathbf{r}, q]dt,$$

$$\Omega_0[\mathbf{r}, f] = \int_{(x_0,t_0,y)}^{(x,t,y)} P[\mathbf{r}, f]dx + Q[\mathbf{r}, f]dt.$$

3. Висновки

Запропонований в роботах [2-3] метод інтегрування нелінійних рівнянь, асоційованих з оператором Лакса (1) не дозволяє накладення на оператор L (1) додаткових, так званих "фізичних", редукцій типу ермітового спряження навіть в просторово-одновимірному випадку при $\alpha = 0$ (див. [1]). Результати, отримані нами в попередньому розділі усувають ці проблеми, що буде продемонстровано в окремій роботі.

1 *Беркела Ю.Ю., Сидоренко Ю.М.* Теореми Дарбу і оператори перетворень для нелокально редукованої ермітової ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі (Hk-cKP).// Математичні студії. – 2006. – Т.25, №1. – С. 38–64. 2 *Митропольський Ю.О., Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М.* Просторово-двовимірне узагальнення ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями // Доповіді НАН України. – 1999. – №9. – С.19–23. 3 *Самойленко А.М., Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М.* Ієрархія рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями: Багатовимірні узагальнення та точні розв'язки редукованих систем // Укр.мат.журн. – 1999. – Т. 51, №1. – С. 78–97. 4 *Matveev V.B., Salle M.A.* Darboux transformations and solitons. – Berlin Heidelberg, Springer-Verlag. – 1991. 5 *Sidorenko Yu.* Binary transformation and (2+1)-dimensional integrable systems, *Ukr. math. journ.*, 2002, V.52, №11, P.1531–1550. 6 *Sydorenko Yu.M.* Factorization of matrix differential operators and Darboux–like transformations // Математичні студії. – 2003. – Т. 19, №2. – С.181–192. 7 *Sydorenko Yu.* Generalized Binary Darboux–like Theorem for Constrained Kadomtsev–Petviashvili (cKP) Flows // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2004. – V. 50, Part 1. – P. 470–477.

Надійшла до редколегії 03.09.09

УДК 519.21

А. Єршов, асист.
E-mail: a_yershov@univ.kiev.ua

ПРО СЛАБКУ ЗБІЖНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ЛАМАНИХ ДО ПРОЦЕСІВ ДИФУЗІЙНОГО ТИПУ

Досліджено умови, при яких випадкова ламана, побудована за послідовністю серій однорідних ланцюгів Маркова, слабко збігається до процесів дифузійного типу при вельми нерегулярній залежності локальних характеристик цих ланцюгів від номера серії.

Conditions, under which a random polygon, that is built by a sequence of series of homogeneous Markov chains, weakly converges to diffusion type processes with quite irregular dependence of the local characteristics of these chains on the number of the series, are studied.

1. Вступ

У даній роботі продовжено дослідження достатніх умов збіжності випадкових ламаних до процесів дифузійного типу, розпочате у [3]. За рахунок введення додаткової умови (умова *(I_7)* в теоремі 1) вдалось значно послабити ряд інших умов, при яких має місце слабка збіжність випадкових ламаних, побудованих за послідовністю серій однорідних ланцюгів Маркова, до процесів дифузійного типу. Як і раніше, припускається можливість вельми нерегулярної залежності локальних характеристик цих ламаних від номера серії.

Розглянемо послідовність випадкових величин $\xi_{n0}, \xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk_n}$, пов'язаних в кожній серії в однорідний ланцюг Маркова і нехай $0 = t_{n0} < t_{n1} < \ldots < t_{nk_n} = 1$ – розбиття відрізка $[0,1]$, таке, що $\lambda_n = \max_k [t_{nk+1} - t_{nk}] \to 0$ при $n \to \infty$.

Позначимо: $\Delta t_{nk} = t_{nk+1} - t_{nk}$, $\Delta\xi_{nk} = \xi_{nk+1} - \xi_{nk}$, F_{nk} – мінімальна σ-алгебра, породжена випадковими величинами $\xi_{n0}, \xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk}$,

$$a_n(x) = \frac{1}{\Delta t_{nk}} E\{\Delta\xi_{nk} \,|\, \xi_{nk} = x\},\ \sigma_n^2(x) = \frac{1}{\Delta t_{nk}} E\{[\Delta\xi_{nk}]^2 \,|\, \xi_{nk} = x\} - a_n^2(x)\Delta t_{nk},$$

$$\Delta\omega_{nk} = [\Delta\xi_{nk} - a_n(\xi_{nk})\Delta t_{nk}]\sigma_n^{-1}(\xi_{nk}) \ (\ \sigma_n(x) \neq 0\ ),\ w_n(t) = \sum_{t_{nk} < t} \Delta\omega_{nk}.$$

Нехай $\zeta_n(t)$ – випадкова ламана з вершинами в точках (t_{nk}, ζ_{nk}), $\zeta_{nk} = G_n(\xi_{nk})$, де $G_n(x)$ – певна сім'я двічі неперервно диференційовних функцій.

У подальшому будемо дотримуватись наступних позначень:

$$LG_n(x) = G_n'(x)a_n(x) + \frac{1}{2}G_n''(x)\sigma_n{}^2(x);\quad \eta_i = \int_{\xi_{ni}}^{\xi_{ni+1}} \int_{\xi_{ni}}^{x} [G_n''(u) - G_n''(\xi_{ni})]du\,dx;\quad P_n^{(N)} = P\left\{\sup_{0 \le t \le 1} |\zeta_n(t)| > N\right\};$$

$\chi_A(x)$ – індикатор множини A; $\chi_{ni}^{(N)} = \chi_{[-N,N]}(\zeta_{ni})$; K, C з різними індексами – сталі, значення яких несуттєві.

2. Компактність

Теорема 1. Нехай існує сім'я двічі неперервно диференційовних функцій $G_n(x)$, $x \in \mathbf{R}^1$, така, що:

(I₁) для певної сталої $K > 0$ виконується нерівність $[LG_n(x)]^2 + \left[G_n{}'(x)\sigma_n(x)\right]^2 \le K\left(1 + [G_n(x)]^2\right)$ при всіх x і n ;

(I₂) для довільного $N > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\sum\limits_{i=0}^{k_n-1} |\eta_i| \chi_{ni}^{(N)}\right)^2 = 0$;

(I₃) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{k_n-1} E\left(\left|G_n{}''(\xi_{ni})\right|^2 |\Delta\xi_{ni}|^4 \chi_{ni}^{(N)}\right) = 0$;

(I₄) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n \sup\limits_{|G_n(x)|\le N} \left|G_n{}''(x)\right| \left[a_n{}^2(x) + |a_n(x)\sigma_n(x)|\right] = 0$;

(I₅) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n \sup\limits_{|G_n(x)|\le N} \left|G_n{}''(x)\sigma_n{}^2(x)\right|^2 = 0$;

(I₆) $E|G_n(\xi_{n0})|^2 \le C$;

(I₇) $\lim\limits_{N\to\infty} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P\left\{\sup\limits_k |\zeta_{nk}| > N\right\} = 0$.

Тоді можна вибрати підпослідовність $n' \to \infty$, ймовірнісний простір $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P}\right)$ і випадкові процеси $\tilde{\zeta}_{n'}(t)$, $\tilde{\zeta}_0(t)$ на цьому просторі так, щоб всі скінченновимірні розподіли процесу $\tilde{\zeta}_{n'}(t)$ співпадали з відповідними скінченновимірними розподілами процесу $\zeta_{n'}(t)$ і $\tilde{\zeta}_{n'}(t) \xrightarrow{\tilde{P}} \tilde{\zeta}_0(t)$ для кожного $t \ge 0$ при $n' \to \infty$.

Доведення.

Для доведення теореми достатньо переконатися [4], що виконуються дві умови:

$$\lim_{C\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{0\le t\le 1} P\{|\zeta_n(t)| > C\} = 0 \; ; \tag{1}$$

$$\lim_{h\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{|t'-t''|\le h} P\{|\zeta_n(t'') - \zeta_n(t')| > \varepsilon\} = 0 \text{ для довільного } \varepsilon > 0 . \tag{2}$$

Умова (1) одразу випливає з (*I₇*).

Щоб довести (2), скористаємось представленням

$$\zeta_{nk+1} = \zeta_{n0} + \sum_{i=0}^{k}[\zeta_{ni+1} - \zeta_{ni}] = \zeta_{n0} + \alpha_{nk+1} + \gamma_{nk+1} + \beta_{nk+1}, \; , k = \overline{0, k_n - 1} ,$$

де $\alpha_{nk} = \sum\limits_{i=0}^{k-1} LG_n(\xi_{ni})\Delta t_{ni}$, $\gamma_{nk} = \sum\limits_{i=0}^{k-1} G_n{}'(\xi_{ni})\sigma_n(\xi_{ni})\Delta\omega_{ni}$,

$$\beta_{nk} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1} G_n{}''(\xi_{ni})\left[a_n^2(\xi_{ni})(\Delta t_{ni})^2 + 2\,a_n(\xi_{ni})\sigma_n(\xi_{ni})\Delta t_{ni}\Delta\omega_{ni} + \sigma_n^2(\xi_{ni})\left((\Delta\omega_{ni})^2 - \Delta t_{ni}\right)\right] + \sum_{i=0}^{k-1}\eta_i .$$

Розглянемо випадкову ламану з вершинами в точках (t_{nk}, ζ_{nk}), тобто $\zeta_n(t) = \zeta_{nk} + \dfrac{t - t_{nk}}{\Delta t_{nk}} \Delta\zeta_{nk}$ при $t_{nk} \le t \le t_{nk}$.

Аналогічно будемо розглядати випадкові ламані $\alpha_n(t)$, $\gamma_n(t), \beta_n(t)$ з вершинами, відповідно, в точках (t_{nk}, α_{nk}), (t_{nk}, γ_{nk}), (t_{nk}, β_{nk}). Тоді при всіх $t \in [0,1]$

$$\zeta_n(t) = \zeta_n(0) + \alpha_n(t) + \gamma_n(t) + \beta_n(t) . \tag{3}$$

Використовуючи умови (*I₁*), (*I₇*) та той факт, що γ_{nk} є мартингальною послідовністю можна довести, що мають місце співвідношення

$$\lim_{h\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{|t'-t''|\le h} P\{|\alpha_n(t'') - \alpha_n(t')| > \varepsilon\} = 0 , \tag{4}$$

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{h\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{|t'-t''|\le h} P\{|\gamma_n(t'') - \gamma_n(t')| > \varepsilon\} = 0 . \tag{5}$$

Позначимо $\beta_{nk}^{(N)} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{k-1} G_n{}''(\xi_{ni})\left[a_n^2(\xi_{ni})(\Delta t_{ni})^2 + 2\,a_n(\xi_{ni})\sigma_n(\xi_{ni})\Delta t_{ni}\Delta\omega_{ni} + \sigma_n^2(\xi_{ni})\left((\Delta\omega_{ni})^2 - \Delta t_{ni}\right)\right]\chi_{ni}^{(N)} + \sum\limits_{i=0}^{k-1}\eta_i\chi_{ni}^{(N)}$.

Використовуючи оцінку

$$E\sup_k\left|\beta_{nk}^{(N)}\right|^2 \le 4\left\{\frac{1}{4}\lambda_n{}^2\sup_{|G_n(x)|\le N}\left|G_n''(x)a_n{}^2(x)\right|^2+4\lambda_n{}^2\sup_{|G_n(x)|\le N}\left|G_n{}''(x)a_n(x)\sigma_n(x)\right|^2+\right.$$

$$\left.+16\sum_{i=0}^{k_n-1}E\left(\left[G_n''(\xi_{ni})\right]^2(\Delta\xi_{ni})^4\chi_{ni}^{(N)}\right)+16\lambda_n{}^3\sup_{|G_n(x)|\le N}\left|G_n''(x)a_n{}^2(x)\right|^2+2\lambda_n\sup_{|G_n(x)|\le N}\left|G_n''(x)\sigma_n{}^2(x)\right|^2+E\left(\sum_{i=0}^{k_n-1}|\eta_i|\chi_{ni}^{(N)}\right)^2\right\}$$

та умови (I_2) – (I_5), маємо

$$E\sup_k\left|\beta_{nk}^{(N)}\right|^2 \le C(n,N), \tag{6}$$

де $C(n,N)\to 0, n\to\infty$ для довільного $N>0$.

Зі співвідношення (6) отримуємо

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{|t'-t''|\le h}P\left\{\left|\beta_n(t'')-\beta_n(t')\right|>\varepsilon\right\}=0. \tag{7}$$

Зі співвідношень (3)–(5) та (7) випливає (2), а отже, і остаточне доведення теореми.

3. Збіжність до процесів дифузійного типу

В умовах теореми 1 неважко переконатись, що збіжність типу (1) має місце для кожного з процесів $\alpha_n(t)$, $\gamma_n(t)$ і $\beta_n(t)$. Для процесу $w_n(t)=\sum_{t_{nk}<t}\Delta\omega_{nk}$ також виконуються умови вигляду (1) та (2).

Тому, згідно з [4], можна вибрати підпослідовність $n'\to\infty$, ймовірнісний простір $\left(\widetilde{\Omega},\widetilde{F},\widetilde{P}\right)$ і випадкові вектори $\widetilde{\eta}_{n'}(t)=\left(\widetilde{\zeta}_{n'}(t),\widetilde{\alpha}_{n'}(t),\widetilde{\gamma}_{n'}(t),\widetilde{\beta}_{n'}(t),\widetilde{w}_{n'}(t)\right)$, $\widetilde{\eta}_0(t)=\left(\widetilde{\zeta}_0(t),\widetilde{\alpha}_0(t),\widetilde{\gamma}_0(t),\widetilde{\beta}_0(t),\widetilde{w}_0(t)\right)$ на цьому просторі так, щоб всі скінченновимірні розподіли процесу $\widetilde{\eta}_{n'}(t)$ співпадали зі скінченновимірними розподілами процесу $\eta_{n'}(t)=\left(\zeta_{n'}(t),\alpha_{n'}(t),\gamma_{n'}(t),\beta_{n'}(t),w_{n'}(t)\right)$ і для кожного $t\ge 0$ відповідні компоненти процесу $\widetilde{\eta}_{n'}(t)$ збігалися за ймовірністю при $n'\to\infty$ до відповідних компонентів процесу $\widetilde{\eta}_0(t)$. Можна показати [2], що співвідношення, які пов'язують компоненти процесу $\eta_{n'}(t)$ мають місце і для компонентів процесу $\widetilde{\eta}_{n'}(t)$. Тому в подальшому для простоти будемо вважати, що $n'=n$ і компоненти самого процесу $\eta_n(t)$ збігаються за ймовірністю при $n\to\infty$ до відповідних компонентів процесу $\eta_0(t)=\left(\zeta_0(t),\alpha_0(t),\gamma_0(t),\beta_0(t),w_0(t)\right)$.

Лема 1. Нехай виконуються умова *(I_7)*, а також наступна умова:

(I_8) для довільного $N>0$ $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{k_n-1}E\left(\left|\frac{\Delta\xi_{ni}}{\sigma_n(\xi_{ni})}\right|^4\chi_{ni}^{(N)}\right)=0$, $\lim_{n\to\infty}\lambda_n{}^3\sup_{|G_n(x)|\le N}\left|\frac{a_n(x)}{\sigma_n(x)}\right|^4=0$.

Тоді граничний процес $w_0(t)$ – вінерів.

Доведення. Введемо процес $w_n^{(N)}(t)=\sum_{t_{nk}<t}\Delta\omega_{nk}^{(N)}$, де $\Delta\omega_{nk}^{(N)}=\Delta\omega_{nk}\,\chi_{nk}^{(N)}$.

Міркуючи аналогічно до [1, с. 530], але вже стосовно процесу $w_n^{(N)}(t)$, можна довести, що виконується співвідношення $\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|Ee^{i\sum_{k=0}^{k_n-1}\lambda_{nk}\Delta\omega_{nk}^{(N)}}-e^{-\sum_{k=0}^{k_n-1}\frac{\lambda_{nk}{}^2}{2}\Delta t_{nk}}\right|=0$. Після цього, довівши, що аналогічна збіжність має місце і для самих процесів $w_n(t)$, отримуємо остаточне доведення леми.

Теорема 2. Нехай виконуються умови *(I_1) – (I_8)*. Припустимо, що існують неперервні функції $a_0(y)$, $\sigma_0(y)$, такі, що для довільного $N>0$

1. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{k_n-1}E\left(\left|LG_n(\xi_{nk})-a_0(G_n(\xi_{nk}))\right|\chi_{nk}^{(N)}\right)\Delta t_{nk}=0$;
2. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{k_n-1}E\left(\left[G_n'(\xi_{nk})\sigma_n(\xi_{nk})-\sigma_0(G_n(\xi_{nk}))\right]^2\chi_{nk}^{(N)}\right)\Delta t_{nk}=0$;
3. стохастичне рівняння

$$\zeta_0(t)=\zeta_0(0)+\int_0^t a_0(\zeta_0(s))ds+\int_0^t\sigma_0(\zeta_0(s))dw_0(s) \tag{8}$$

має єдиний слабкий розв'язок.

Тоді випадкова ламана $\zeta_n(t)$ слабко збігається при $n\to\infty$ до розв'язку $\zeta_0(t)$ рівняння (8).

Доведення. Спершу покажемо, що

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|\alpha_n(t)-\int_0^t a_0(\zeta_n(s))ds\right|\xrightarrow{P}0,\ n\to\infty. \tag{9}$$

Для цього скористаємось нерівністю $\sup\limits_{0\le t\le 1}\left|\alpha_n(t)-\int\limits_0^t a_0(\zeta_n(s))ds\right|\le S_n^{(1)}+S_n^{(2)}$, де $S_n^{(1)}=\sum\limits_{i=0}^{k_n-1}\left|LG_n(\xi_{ni})-a_0(\zeta_{ni})\right|\Delta t_{ni}$, $S_n^{(2)}=\sum\limits_{i=0}^{k_n-1}\int\limits_{t_{ni}}^{t_{ni+1}}\left|a_0(\zeta_n(s))-a_0(\zeta_n(t_{ni}))\right|ds$.

З умови (I_7), умови 1 теореми 2 та нерівності $P\left\{S_n^{(1)}>\varepsilon\right\}\le P_n^{(N)}+\frac{2}{\varepsilon}\sum\limits_{i=0}^{k_n-1}E\left(\left|LG_n(\xi_{ni})-a_0(\zeta_{ni})\right|\chi_{ni}^{(N)}\right)\Delta t_{ni}$ випливає збіжність $S_n^{(1)}\xrightarrow{P}0$ при $n\to\infty$. Доведення збіжності $S_n^{(2)}\xrightarrow{P}0$ при $n\to\infty$ можна провести аналогічно до того, як це було зроблено у [3], з урахуванням умови *(I_7)*.

Таким же чином доводимо збіжності

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|\int_0^t a_0(\zeta_n(s))ds-\int_0^t a_0(\zeta_0(s))ds\right|\xrightarrow{P}0,\ n\to\infty, \tag{10}$$

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|\gamma_n(t)-\int_0^t \sigma_0(\zeta_n(s))dw_n(s)\right|\xrightarrow{P}0,\ n\to\infty, \tag{11}$$

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|\int_0^t \sigma_0(\zeta_n(s))dw_n(s)-\int_0^t \sigma_0(\zeta_0(s))dw_0(s)\right|\xrightarrow{P}0. \tag{12}$$

Далі, використовуючи нерівність

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|\zeta_n(t)-\zeta_0(0)-\int_0^t a_0(\zeta_0(s))ds-\int_0^t \sigma_0(\zeta_0(s))dw_0(s)\right|\le$$

$$\le\sup_{0\le t\le 1}\left|\alpha_n(t)-\int_0^t a_0(\zeta_0(s))ds\right|+\sup_{0\le t\le 1}\left|\gamma_n(t)-\int_0^t \sigma_0(\zeta_0(s))dw_0(s)\right|+\left|\zeta_n(0)-\zeta_0(0)\right|+\sup_{0\le t\le 1}\left|\beta_n(t)\right|,$$

збіжності (9)-(12) та збіжність $\sup\limits_{0\le t\le 1}\left|\beta_n(t)\right|\xrightarrow{P}0$, $n\to\infty$, яка має місце внаслідок (6) та (I_7), отримуємо

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|\zeta_n(t)-\zeta_0(0)-\int_0^t a_0(\zeta_0(s))ds-\int_0^t \sigma_0(\zeta_0(s))dw_0(s)\right|\xrightarrow{P}0 \tag{13}$$

при $n\to\infty$.

Отже, існує підпослідовність $n''\to\infty$ послідовності n' така, що збіжність (13) має місце з ймовірністю 1 при $n''\to\infty$, а отже, і $F(\zeta_{n''}(t))\to F(\zeta_0(t))$ з ймовірністю 1 при $n''\to\infty$ для довільного неперервного на просторі $C[0,1]$ функціонала F, тобто [1] має місце слабка збіжність процесу $\zeta_{n''}(t)$ до процесу $\zeta_0(t)$. Таким чином, граничні процеси для послідовності процесів $\zeta_n(t)$ є розв'язками рівняння (8). Із слабкої єдиності розв'язку рівняння (8) випливає остаточне доведення теореми 2.

Наслідок. Якщо в теоремі 2 не вимагати єдиності слабкого розв'язку рівняння (8), то послідовність випадкових ламаних $\zeta_n(t)$ слабко компактна і граничні точки цієї послідовності є розв'язками рівняння (8).

Теорема 3. Нехай виконуються умови (I_2) – (I_8), а також умови

(I_9) для певної сталої $K>0$ має місце нерівність $\left|LG_n(x)\right|^2+\left|G_n'(x)\sigma_n(x)\right|^2\le K$,

(I_{10}) існує таке δ, що $G_n'(x)\sigma_n(x)\ge\delta>0$.

Якщо існують функції $a_0(x)$, $\sigma_0(x)$, які є неперервними за виключенням лише скінченного числа точок розриву першого роду на відрізку $[-N_1;N_1]$ для довільного $N_1<\infty$, для яких виконуються умови 1. – 3. теореми 2, то випадкова ламана $\zeta_n(t)$ слабко збігається при $n\to\infty$ до розв'язку $\zeta_0(t)$ рівняння (8).

Доведення. Як і при доведенні теореми 2 тут досить показати, що мають місце аналоги збіжностей (9) – (12). Для цього беремо довільне $N_1>0$. Нехай $x_1,x_2,\ldots,x_m$ – всі точки розриву функцій $a_0(x)$, $\sigma_0(x)$ на відрізку $[-N_1;N_1]$. На цьому відрізку розглянемо множину $A_{N_1}^{(\delta)}=\bigcup\limits_{k=1}^{m}\left\{x:\left|x-x_k\right|<\delta\right\}$ і на цій множині згладимо функції $a_0(x)$, $\sigma_0(x)$ до неперервності. Позначимо згладжені функції через $a^{(\delta)}(x)$, $\sigma^{(\delta)}(x)$. Величину $\delta>0$ виберемо достатньо малою, щоб $A_{N_1}^{(\delta)}\subset[-N_1;N_1]$.

Для доведення аналога збіжності (9) досить показати, що і в цьому випадку $S_n^{(2)}\xrightarrow{P}0$ при $n\to\infty$.

Для довільного $\varepsilon>0$ $P\left\{S_n^{(2)}>\varepsilon\right\}\le P_n^{(N)}+\frac{2}{\varepsilon}E\sum\limits_{i=0}^{k_n-1}\int\limits_{t_{ni}}^{t_{ni+1}}\left|a_0^{(\delta)}(\zeta_n(s))-a_n^{(\delta)}(\zeta_n(t_{ni}))\right|\chi_{|x|\le N}(\zeta_n(s))ds+$

$$+\frac{2}{\varepsilon}E\sum_{i=0}^{k_n-1}\int_{t_{ni}}^{t_{ni+1}}\left|a_0(\zeta_n(s))-a_0^{(\delta)}(\zeta_n(s))\right|\chi_{|x|\le N}(\zeta_n(s))ds+\frac{2}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{k_n-1}\int_{t_{ni}}^{t_{ni+1}}E\left|a_0(\zeta_n(t_{ni}))-a_0^{(\delta)}(\zeta_n(t_{ni}))\right|\chi_{|x|\le N}(\zeta_n(t_{ni}))ds.$$

Вибравши величину N достатньо великою, а саме $N > N_1$, отримаємо $A_{N_1}^{(\delta)} \subset [-N; N]$, і, з урахуванням цього, подальше доведення теореми можна провести подібно до того, як це було зроблено у [3].

4. Висновки

Розглянуто послідовність серій однорідних ланцюгів Маркова ξ_{nk} і випадкові ламані з вершинами в точках $(t_{nk}, G_n(\xi_{nk}))$, де $G_n(x)$ – достатньо гладкі функції. Досліджено, при яких умовах буде мати місце компактність таких ламаних (теорема 1) та їх збіжність до розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь (теореми 2, 3).

1. *Гихман И.И.*, *Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. – М., 1965. 2. *Крылов Н.В.* Управляемые процессы диффузионного типа. – М., 1977. 3. *Кулініч Г.Л.*, *Єршов А.В.* Збіжність послідовності ланцюгів Маркова до процесів дифузійного типу // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2008. – Вип. 78. – С. 103-118. 4. *Скороход А.В.* Исследования по теории случайных процессов. – К., 1961.

Надійшла до редколегії 02.02.09

УДК 519.21

Д. Каплуненко, асп.
E-mail: *darya_mk@bigmir.net*

ГРАНИЦЯ ДЛЯ СПРАВЕДЛИВОЇ ВАРТОСТІ КОНТРАКТУ З ОПЦІОНОМ ДИСКРЕТНОЇ МОДЕЛІ З ВИПАДКОВОЮ ЕВОЛЮЦІЄЮ НЕРИЗИКОВОГО АКТИВУ

У даній статті описано всі можливі граничні процеси дискретної моделі, в якій ризиковий та неризиковий активи еволюціонують випадково, встановлено умови збіжності до цих процесів. Знайдено границі справедливої ціни контракту з опціоном для таких еволюцій.

In this article all possible limit processes for discrete model with stochastic evolution of risk and riskfree asset are described. Conditions of such convergence are obtained. Limits of rational option price for this kind of evolutions are determined.

1. Вступ

Одним з основних завдань фінансової математики є побудова відповідних дійсності математичних моделей еволюції вартості активів, які еволюціонують випадково, і розрахунку на їх основі справедливої ціни контракту з опціоном. У даній роботі досліджується модель, в якій випадковій еволюції підлягають два ризикових активи: банківський рахунок і вартість акції. Важливим є врахування впливу на справедливу вартість контракту з опціоном і другого ризикового активу – банківського рахунку. Метою роботи є вивчення всіх можливих граничних процесів дискретної багатоперіодичної моделі, в якій ризиковий та неризиковий активи еволюціонують випадково, встановлення умов збіжності до цих процесів, а також знаходження границі справедливої ціни контракту з опціоном для таких еволюцій.

2. Постановка задачі

Вважаємо, що на часовому інтервалі $[1, N]$ еволюція ставки відсотка є випадковою і відбувається за законом [1]

$$R_n = \prod_{i=1}^{n} (1 + r_i) = (1 + r_n) R_{n-1}, \quad R_0 = 1, \quad n = \overline{1, N}, \tag{1}$$

де $r_1, r_2, \ldots, r_N$ – послідовність незалежних однаково розподілених величин, кожна з яких набуває два значення – r_1 і r_2 з ймовірностями $P(r_i = r_1) = 1 - p$, $P(r_i = r_2) = p, \quad 0 < p < 1$. Припустимо, що еволюція вартості облігації відбувається за законом

$$B_n = R_n B_0 = (1 + r_n) B_{n-1}, \quad n = \overline{1, N}, \tag{2}$$

де B_0 – початкова вартість облігації. Також припустимо, що еволюція вартості ризикового активу – акції описується на тому ж проміжку часу $[1, N]$ за законом [1]

$$S_n = \prod_{i=1}^{n} (1 + \rho_i) S_0 = (1 + \rho_n) S_{n-1}, \quad n = \overline{1, N}, \tag{3}$$

де S_0 – початкова вартість акції, тобто її вартість у нульовий момент часу. Послідовність випадкових величин ρ_i, $i = \overline{1, N}$ є послідовністю незалежних однаково розподілених величин, кожна з яких набуває два значення – b_1 і b_2 з ймовірностями $P(\rho_i = b_1) = p$, $P(\rho_i = b_2) = 1 - p, \quad 0 < p < 1$.

Щоб урахувати спостережуваний в економічній дійсності факт, який полягає в тому, що з ростом ставки відсотка вартість акції спадає, слід вважати, що і послідовність $\{\rho_i\}_{i=1}^{N}$, і послідовність $\{r_i\}_{i=1}^{N}$ означені на одному й тому ж імовірнісному просторі Ω, який можна ототожнити з $\Omega = \{-1, 1\}^N$, через те, що між послідовністю незалежних однаково розподілених величин $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{N}$ і кожною з послідовностей $\{\rho_i\}_{i=1}^{N}$ і $\{r_i\}_{i=1}^{N}$ існує взаємно однозначна відповідність, де випадкова величина набуває два значення – +1 та -1, причому $P(\varepsilon_i = 1) = p$, $P(\varepsilon_i = -1) = 1 - p, \quad 0 < p < 1$.Емпірично спостережуваний факт буде враховано, якщо задовольнятимуться умови $-1 < b_1 < r_1 < r_2 < b_2$,