Вибравши величину N достатньо великою, а саме $N > N_1$, отримаємо $A_{N_1}^{(\delta)} \subset [-N; N]$, і, з урахуванням цього, подальше доведення теореми можна провести подібно до того, як це було зроблено у [3].

4. Висновки

Розглянуто послідовність серій однорідних ланцюгів Маркова ξ_{nk} і випадкові ламані з вершинами в точках $(t_{nk}, G_n(\xi_{nk}))$, де $G_n(x)$ – достатньо гладкі функції. Досліджено, при яких умовах буде мати місце компактність таких ламаних (теорема 1) та їх збіжність до розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь (теореми 2, 3).

1. *Гихман И.И.*, *Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. – М., 1965. 2. *Крылов Н.В.* Управляемые процессы диффузионного типа. – М., 1977. 3. *Кулініч Г.Л.*, *Єршов А.В.* Збіжність послідовності ланцюгів Маркова до процесів дифузійного типу // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2008. – Вип. 78. – С. 103-118. 4. *Скороход А.В.* Исследования по теории случайных процессов. – К., 1961.

Надійшла до редколегії 02.02.09

УДК 519.21

Д. Каплуненко, асп.
E-mail: *darya_mk@bigmir.net*

ГРАНИЦЯ ДЛЯ СПРАВЕДЛИВОЇ ВАРТОСТІ КОНТРАКТУ З ОПЦІОНОМ ДИСКРЕТНОЇ МОДЕЛІ З ВИПАДКОВОЮ ЕВОЛЮЦІЄЮ НЕРИЗИКОВОГО АКТИВУ

У даній статті описано всі можливі граничні процеси дискретної моделі, в якій ризиковий та неризиковий активи еволюціонують випадково, встановлено умови збіжності до цих процесів. Знайдено границі справедливої ціни контракту з опціоном для таких еволюцій.

In this article all possible limit processes for discrete model with stochastic evolution of risk and riskfree asset are described. Conditions of such convergence are obtained. Limits of rational option price for this kind of evolutions are determined.

1. Вступ

Одним з основних завдань фінансової математики є побудова відповідних дійсності математичних моделей еволюції вартості активів, які еволюціонують випадково, і розрахунку на їх основі справедливої ціни контракту з опціоном. У даній роботі досліджується модель, в якій випадковій еволюції підлягають два ризикових активи: банківський рахунок і вартість акції. Важливим є врахування впливу на справедливу вартість контракту з опціоном і другого ризикового активу – банківського рахунку. Метою роботи є вивчення всіх можливих граничних процесів дискретної багатоперіодичної моделі, в якій ризиковий та неризиковий активи еволюціонують випадково, встановлення умов збіжності до цих процесів, а також знаходження границі справедливої ціни контракту з опціоном для таких еволюцій.

2. Постановка задачі

Вважаємо, що на часовому інтервалі $[1, N]$ еволюція ставки відсотка є випадковою і відбувається за законом [1]

$$R_n = \prod_{i=1}^{n}(1+r_i) = (1+r_n)R_{n-1}, \quad R_0 = 1, \quad n = \overline{1, N}, \tag{1}$$

де $r_1, r_2, \dots, r_N$ – послідовність незалежних однаково розподілених величин, кожна з яких набуває два значення – r_1 і r_2 з ймовірностями $P(r_i = r_1) = 1-p$, $P(r_i = r_2) = p, \quad 0 < p < 1$. Припустимо, що еволюція вартості облігації відбувається за законом

$$B_n = R_n B_0 = (1+r_n)B_{n-1}, \quad n = \overline{1, N}, \tag{2}$$

де B_0 – початкова вартість облігації. Також припустимо, що еволюція вартості ризикового активу – акції описується на тому ж проміжку часу $[1, N]$ за законом [1]

$$S_n = \prod_{i=1}^{n}(1+\rho_i)S_0 = (1+\rho_n)S_{n-1}, \quad n = \overline{1, N}, \tag{3}$$

де S_0 – початкова вартість акції, тобто її вартість у нульовий момент часу. Послідовність випадкових величин ρ_i, $i = \overline{1, N}$ є послідовністю незалежних однаково розподілених величин, кожна з яких набуває два значення – b_1 і b_2 з ймовірностями $P(\rho_i = b_1) = p$, $P(\rho_i = b_2) = 1-p, \quad 0 < p < 1$.

Щоб урахувати спостережуваний в економічній дійсності факт, який полягає в тому, що з ростом ставки відсотка вартість акції спадає, слід вважати, що і послідовність $\{\rho_i\}_{i=1}^{N}$, і послідовність $\{r_i\}_{i=1}^{N}$ означені на одному й тому ж імовірнісному просторі Ω, який можна ототожнити з $\Omega = \{-1, 1\}^N$, через те, що між послідовністю незалежних однаково розподілених величин $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{N}$ і кожною з послідовностей $\{\rho_i\}_{i=1}^{N}$ і $\{r_i\}_{i=1}^{N}$ існує взаємно однозначна відповідність, де випадкова величина набуває два значення – +1 та -1, причому $P(\varepsilon_i = 1) = p$, $P(\varepsilon_i = -1) = 1-p, \quad 0 < p < 1$.Емпірично спостережуваний факт буде враховано, якщо задовольнятимуться умови $-1 < b_1 < r_1 < r_2 < b_2$,

$$S_n = \exp\left\{ \sum_{i=1}^{n} \ln(1+\rho_i) \right\} S_0 ,\ B_n = \exp\left\{ \sum_{i=1}^{n} \ln(1+r_i) \right\} B_0 ,$$

$$\ln\left(\frac{S_n}{S_0} \right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1+\rho_i) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\varepsilon_i \ln \frac{1+b_2}{1+b_1} - \ln(1+b_1)(1+b_2) \right), \tag{4}$$

$$\ln\left(\frac{B_n}{B_0} \right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1+r_i) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\varepsilon_i \ln \frac{1+r_1}{1+r_2} - \ln(1+r_1)(1+r_2) \right). \tag{5}$$

Після встановлення теорем про еволюцію ризикового активу в континуальній границі та визначення конкретних асимптотик, для яких ці границі існують, ставиться задача відшукання границі для справедливої ціни контракту з опціоном дискретної моделі з випадковою еволюцією неризикового активу.

Справедлива ціна контракту з опціоном Європейського типу визначається наступною формулою:

$$C_N = S_0 \sum_{k=0}^{k_0} C_N^k \bar{p}^k \left(1-\bar{p}\right)^{N-k} - KL^N \sum_{k=0}^{k_0} C_N^k \bar{\bar{p}}^k \left(1-\bar{\bar{p}}\right)^{N-k}, \tag{6}$$

де

$$\bar{p} = \frac{(b_2 - r_1)(1+b_1)}{(r_2 - b_1)(1+b_2) + (b_2 - r_1)(1+b_1)} ,\quad \bar{\bar{p}} = \frac{b_2 - r_1}{(b_2 - r)_1 + (r_2 - b_1)} ,$$

$$L = \frac{(b_2 - r_1) + (r_2 - b_1)}{(b_2 - r_1)(1+r_2) + (r_2 - b_1)(1+r_1)} ,\quad k_0 = \left[\frac{\ln K - \ln(1+b_2)^N S_0}{\ln(1+b_1)(1+b_2)^{-1}} \right],$$

де S_0 – початкова вартість акції, тобто її вартість у нульовий момент часу, K – страйкова ціна, обумовлена в контракті. Слід зауважити, що наведена формула для C_N справедлива лише при $k_0 > 0$. Якщо ж $k_0 \le 0$, то $C_N = 0$.

3. Теореми про еволюцію ризикового активу з еволюцією не ризикового активу, що еволюціонує випадково, в континуальній границі

В рамках поставленої задачі єдиними можливими безмежно подільними граничними розподілами для еволюції двох ризикових активів є вироджений, нормальний розподіли та розподіл Пуассона з певними параметрами. В наступних двох теоремах сформульовано умови, виконання яких гарантує збіжність дискретних розподілів до вищевказаних безмежно подільних законів.

Теорема 1.

Нехай справедливі асимптотики $b_1(n), b_2(n), r_1(n), r_2(n)$, та $p(n)$: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \ln(1+b_1(n)) = \beta_1$, $\beta_1 \in R$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \ln(1+b_2(n)) = \beta_2$, $\beta_2 \in R$, $\lim_{n\to\infty} n \ln(1+r_1(n)) = \varphi_1$, $\varphi_1 \in R$, $\lim_{n\to\infty} n \ln(1+r_2(n)) = \varphi_2$, $\varphi_2 \in R$, та $\lim_{n\to\infty} p(n) = d$, причому $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(p(n) - d) = c$.

Якщо виконується умова $(d\beta_1 - d\beta_2 + \beta_2) = 0$, то єдиним можливим безмежно подільним граничним розподілом для $\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)$ є нормальний розподіл, а єдиним можливим безмежно подільним граничним розподілом для $\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)$ є вироджений розподіл. При цьому $L\left(\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)\right) \longrightarrow \mathrm{N}(\alpha_1, \sigma_1^2)$, $n \to \infty$, $L\left(\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)\right) \longrightarrow L(\alpha_2)$, $n \to \infty$, де $\alpha_1 = c(\beta_1 - \beta_2), \sigma_1^2 = (\beta_1 - \beta_2)^2 (1-d)^2 d + (\beta_1 - \beta_2)^2 (1-d) d^2, \alpha_2 = (1-d)\varphi_1 + d\varphi_2$.

Теорема 1 доводиться із застосуванням центральної граничної теореми (див., наприклад, [4]). Для зручності посилань наведемо її формулювання.

Теорема (Центральна гранична теорема).

Нехай X_{nk} є рівномірно нескінченно малими незалежними доданками.

1. Сім'я граничних законів послідовностей $L\left(\sum_k X_{nk}\right)$ співпадає з сім'єю безмежно подільних законів, або, з сім'єю законів, логарифм характеристичних функцій яких $\psi = \psi(\alpha, \Psi)$ визначається формулою

$$\psi(u) = iu\alpha + \int \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Psi(x), \tag{7}$$

де $\alpha \in R$, і Ψ з точністю до постійного множника є функцією розподілу.

2. $L\left(\sum_k X_{nk}\right) \to L(X)$, логарифм характеристичної функції якого обов'язково має вигляд $\psi = \psi(\alpha, \Psi)$ тоді і тільки тоді, коли $\Psi_n \to \Psi$, $\alpha_n \to \alpha$, де

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\left(a_{n,k} + \int \frac{x}{1+x^2}\, d\overline{F}_{n,k}(x)\right), \quad (8)$$

$$\psi_n(x) = n\int_{-\infty}^{x} \frac{y^2}{1+y^2}\, d\overline{F}_{n,k}(y) \quad)$$

і $a_{n,k} = \int x\chi_{\{|x|<\tau\}} dF_{n.k}(x)$, $\overline{F}_{n,k} = F_{n,k}(x + a_{n,k})$.

Доведення теореми 1. Спочатку дослідимо збіжність $\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)$. Позначимо $\sum_{i=1}^{n} X_i^n = \ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right) =$ $= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\varepsilon_i \ln\frac{1+b_2}{1+b_1} - \ln(1+b_1)(1+b_2)\right)$. Функція розподілу для випадкової величини X_i^n буде наступною: $F_1(x) = p\chi_{[\ln(1+b_1),\infty)}(x) + (1-p)\chi_{[\ln(1+b_2),\infty)}(x)$. Умова рівномірної нескінченної малості виконується, оскільки за умовою теореми $\lim_{n\to\infty}\ln(1+b_1(n)) = 0$, $\lim_{n\to\infty}\ln(1+b_2(n)) = 0$, а $\lim_{n\to\infty} p(n) = d$:

$$\max_k \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk} = \left(\frac{\ln^2(1+b_1(n))}{1+\ln^2(1+b_1(n))}\, p(n) + \frac{\ln^2(1+b_2(n))}{1+\ln^2(1+b_2(n))}(1-p(n))\right) \to 0, \quad n\to\infty.$$

Для подальшого доведення застосуємо центральну граничну теорему. Для $\sum_{i=1}^{N} X_i^n$ коефіцієнти $a_{n,k}$, та функції $\overline{F}_{n,k}$ мають вигляд

$$a_{n,i}^1 = \int_{|x|<\tau} x\, dF_{n,i}^1(x) = p\ln(1+b_1) + (1-p)\ln(1+b_2), \quad \overline{F}_{n,i}^1(x) = p\delta\left(x - (1-p)\ln\frac{1+b_1}{1+b_2}\right) + (1-p)\delta\left(x - p\ln\frac{1+b_2}{1+b_1}\right).$$

Наступним кроком визначимо α_n та $\psi_n^1(x)$ за формулами (8) та (9) відповідно:

$$\alpha_n^1 = np\ln(1+b_1) + n(1-p)\ln(1+b_2) + np\frac{(1-p)\ln\frac{1+b_1}{1+b_2}}{1+(1-p)^2\ln^2\frac{1+b_1}{1+b_2}} + n(1-p)\frac{p\ln\frac{1+b_2}{1+b_1}}{1+p^2\ln^2\frac{1+b_2}{1+b_1}},$$

$$\psi_n^1(x) = n\int_{-\infty}^{x}\frac{y^2}{1+y^2}\, d\overline{F}^1_{n,k}(y) = n\int_{-\infty}^{x}\frac{y^2}{1+y^2}\, d\left(p\delta\left(x-(1-p)\ln\frac{1+b_1}{1+b_2}\right) + (1-p)\delta\left(x - p\ln\frac{1+b_2}{1+b_1}\right)\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, \; x < (1-p)\ln\frac{1+b_1}{1+b_2} \\ np\frac{(1-p)^2\ln^2\frac{1+b_1}{1+b_2}}{1+(1-p)^2\ln^2\frac{1+b_1}{1+b_2}}, \quad (1-p)\ln\frac{1+b_1}{1+b_2} \le x < p\ln\frac{1+b_2}{1+b_1} \\ np\frac{(1-p)^2\ln^2\frac{1+b_1}{1+b_2}}{1+(1-p)^2\ln^2\frac{1+b_1}{1+b_2}} + n(1-p)\frac{p^2\ln^2\frac{1+b_2}{1+b_1}}{1+p^2\ln^2\frac{1+b_2}{1+b_1}}, \quad x \ge p\ln\frac{1+b_2}{1+b_1} \end{cases}.$$

Так як за умовою теореми $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+b_1(n)) = \beta_1$, $\beta_1\in R$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+b_2(n)) = \beta_2$, $\beta_2 \in R$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(p(n)-d) = c$, тоді

$$\alpha_n^1 \sim c\beta_1 - c\beta_2 + (d\beta_1 - d\beta_2 + \beta_2)\sqrt{n} + (\beta_1-\beta_2)\frac{c - 2dc - d^2\sqrt{n} - \frac{c^2}{\sqrt{n}}}{1+\left(1-d-\frac{c}{\sqrt{n}}\right)^2\frac{(\beta_1-\beta_2)^2}{n}} + (\beta_2-\beta_1)\frac{c-2dc-d^2\sqrt{n}-\frac{c^2}{\sqrt{n}}}{1+\left(d+\frac{c}{\sqrt{n}}\right)^2\frac{(\beta_2-\beta_1)^2}{\sqrt{n}}},$$

$n\to\infty$. Неважко помітити, що при виконанні умови $(d\beta_1 - d\beta_2 + \beta_2) = 0$ $\alpha_n^1 \to c(\beta_1-\beta_2)$, $n\to\infty$.

Аналогічно, враховуючи умови теореми, знаходимо границю для $\psi_n^1(x)$:

$$\psi_n^1(x) \to \psi^1(x) = \begin{cases} 0, \ x<0, \\ (\beta_1-\beta_2)^2(1-d)^2 d, \quad x=0, \ n\to\infty, \text{де} \ \ \sigma^2 = (\beta_1-\beta_2)^2(1-d)^2 d + (\beta_1-\beta_2)^2(1-d)d^2. \\ \sigma^2, \quad x>0 \end{cases}$$

За центральною граничною теоремою сім'я граничних законів послідовностей $L\left(\sum_{i=1}^N X_i^n\right)$ збігається з сім'єю безмежно подільних законів, або, з сім'єю законів, логарифм характеристичних функцій яких $\psi = \psi(\alpha, \Psi)$ визначається формулою (7). У нашому випадку логарифм характеристичної функції набуває вигляду

$$\psi(u) = \frac{1}{2} iu\alpha_1 - \frac{\sigma^2 u^2}{2}, \text{ де } \quad \sigma^2 = (\beta_1-\beta_2)^2(1-d)^2 d + (\beta_1-\beta_2)^2(1-d)d^2.$$

В результаті отримали характеристичну функцію нормального розподілу. Отже, дійсно $L\left(\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)\right) \longrightarrow \mathrm{N}\left(\alpha_1, \sigma_1{}^2\right), \quad n\to\infty$.

Тепер знайдемо граничний розподіл для $\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)$. Позначимо $\sum_{i=1}^N Y_i^n = \ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right) =$ $= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\varepsilon_i \ln\frac{1+r_1}{1+r_2} - \ln(1+r_1)(1+r_2)\right)$. Функція розподілу F_2 для випадкової величини Y_i^n: $F_2(x) = (1-p)\chi_{[\ln(1+r_1),\infty)}(x) + p\chi_{[\ln(1+r_2),\infty)}(x)$. Умова рівномірної нескінченної малості виконується оскільки за умовою теореми $\max_k \int \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk} = \frac{\ln^2(1+r_1(n))}{1+\ln^2(1+r_1(n))}(1-p(n)) + \frac{\ln^2(1+r_2(n))}{1+\ln^2(1+r_2(n))} p(n) \to 0, \quad n\to\infty$, тому до $\sum_{i=1}^N Y_i^n$ також застосуємо центральну граничну теорему. Знайдемо коефіцієнти α_n^2 та функції $\psi_n^2(x)$ для $\sum_{i=1}^N Y_i^n$ за формулами (8) та (9) відповідно:

$$\alpha_n^2 = n(1-p)\ln(1+r_1) + n\,p\ln(1+r_2) + n(1-p)\frac{p\ln\frac{1+r_1}{1+r_2}}{1+p^2\ln^2\frac{1+r_1}{1+r_2}} + n\,p\frac{(1-p)\ln\frac{1+r_2}{1+r_1}}{1+(1-p)^2\ln^2\frac{1+r_2}{1+r_1}},$$

$$\psi_n^2(x) = \begin{cases} 0, \quad x < p\ln\frac{1+r_1}{1+r_2} \\ n(1-p)\dfrac{p^2\ln^2\frac{1+r_1}{1+r_2}}{1+p^2\ln^2\frac{1+r_1}{1+r_2}}, \quad p\ln\frac{1+r_1}{1+r_2} \le x < (1-p)\ln\frac{1+r_2}{1+r_1} \\ n(1-p)\dfrac{p^2\ln^2\frac{1+r_1}{1+r_2}}{1+p^2\ln^2\frac{1+r_1}{1+r_2}} + np\dfrac{(1-p)^2\ln^2\frac{1+r_2}{1+r_1}}{1+(1-p)^2\ln^2\frac{1+r_2}{1+r_1}}, \quad x \ge (1-p)\ln\frac{1+r_2}{1+r_1} \end{cases}.$$

Крім того, при виконанні умов теореми границі послідовності існують і скінченні наступні границі: $\alpha_2 = \lim_{n\to\infty}\alpha_n^2 = (1-d)\varphi_1 + d\varphi_2$, $\psi^2(x) = \lim_{n\to\infty}\psi_n^2(x) = 0$.Характеристична функція для граничного розподілу: $\psi(u) = iu\alpha_2 + \int\left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}d\Psi(x) = iu\alpha_2$, і тому єдиним можливим безмежно подільним граничним розподілом для $\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)$ є вироджений розподіл $L\left(\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)\right) \longrightarrow L(\alpha_2), \ n\to\infty$. Теорему доведено.

Теорема 2.

Нехай справедливі асимптотики $b_1(n), b_2(n), r_1(n), r_2(n)$, та $p(n)$: $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1+b_1(n)) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1+b_2(n)) = \gamma$, $0 < \gamma < \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln(1+r_1(n)) = \varphi_1$, $\varphi_1 \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln(1+r_2(n)) = \varphi_2$, $\varphi_2 \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty}(1-p(n)) = 0$.

Якщо існують границі $a = \lim\limits_{n\to\infty} n(1-p(n))$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} n \ln(1+b_1(n))$, то єдиним можливим безмежно подільним граничним розподілом для $\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)$ є розподіл Пуассона зі зсувом, а єдиним можливим безмежно подільним граничним розподілом для $\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)$ є вироджений розподіл. При цьому $L\left(\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)\right) \to \mathrm{P}(a; b, \gamma)$, $n \to \infty$, $L\left(\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)\right) \longrightarrow \mathrm{L}(\alpha)$, $n\to\infty$, де $\alpha = \varphi_2$.

Доведення теореми 2 є аналогічним доведенню теореми 1.

Проілюструємо застосування наведених теорем на прикладах.

Приклад 1. Нехай задані асимптотики для $b_1(n), b_2(n), r_1(n), r_2(n)$, та $p(n)$ мають такий вигляд: $r_1(n) = \exp\left\{r_0 \frac{t}{n}\right\} - 1$, $r_2(n) = \exp\left\{r_0' \frac{t}{n}\right\} - 1$, $b_1(n) = \exp\left\{-b_0\sqrt{\frac{t}{n}}\right\} - 1$, $b_2(n) = \exp\left\{b_0\sqrt{\frac{t}{n}}\right\} - 1$, та $p(n) = \frac{(b_2 - r_1)(1+r_2)}{(b_2-r_1)(1+r_2) + (r_2 - b_1)(1+r_1)}$.

Тоді, за теоремою 1, єдиним можливим безмежно подільним граничним розподілом для $\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)$ є нормальний розподіл, а єдиним можливим безмежно подільним граничним розподілом для $\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)$ є вироджений розподіл. При цьому $L\left(\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)\right) \to \mathrm{N}\left(\frac{1}{2}\left(r_0' + r_0 - b_0^2\right)t, b_0^2\, t\right)$, $n\to\infty$, $L\left(\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)\right) \to\ \to \mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\left(r_0{}' + r_0\right)t\right)$, $n\to\infty$.

Приклад 2. Нехай $r_1(n) = \exp\left\{r_0 \frac{t}{n}\right\} - 1$, $r_2(n) = \exp\left\{r_0' \frac{t}{n}\right\} - 1$, $b_1(n) = \exp\left\{-\mu \frac{t}{n}\right\} - 1$, $b_2(n) = \exp\{\lambda\} - 1$, та $p(n) = 1 - \nu\frac{t}{n}$.Застосовуючи теорему 2, отримаємо, що єдиним можливим безмежно подільними граничним розподілом для $\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)$ є розподіл Пуассона зі зсувом, а єдиним можливим безмежно подільним граничним розподілом для $\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)$ є вироджений розподіл. При цьому $L\left(\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)\right) \to \mathrm{P}(\nu t; -\mu t, \lambda)$, $n\to\infty$, $L\left(\ln\left(\frac{B_n}{B_0}\right)\right) \to \mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\left(r_0{}' + r_0\right)t\right)$, $n\to\infty$.

4. Границі для справедливої ціни контракту з опціоном

Постає задача відшукання границі для справедливої ціни контракту з опціоном дискретної моделі з випадковою еволюцією неризикового активу, а саме:

$$\lim_{N\to\infty} C_N = \lim_{N\to\infty}\left(S_0 \sum_{k=0}^{k_0} C_N^k\, \overline{p}^k \left(1-\overline{p}\right)^{N-k} - KL^N \sum_{k=0}^{k_0} C_N^k\, \overline{\overline{p}}^k \left(1-\overline{\overline{p}}\right)^{N-k}\right). \tag{8}$$

Теорема 3.

Нехай $\lim\limits_{N\to\infty} \ln(1+b_1(N)) = 0$, $\lim\limits_{N\to\infty} \ln(1+b_2(N)) = 0$, а також $\lim\limits_{N\to\infty} \ln(1+r_1(N)) = 0$, $\lim\limits_{N\to\infty} \ln(1+r_2(N)) = 0$.

Якщо існують скінченні границі $H = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{k_0 - N\overline{p}}{N\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)}$, $F = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{k_0 - N\overline{\overline{p}}}{N\overline{\overline{p}}\left(1-\overline{\overline{p}}\right)}$, $l = \lim\limits_{N\to\infty} L^N$,то границя справедливої ціни контракту з опціоном є наступною $\lim\limits_{N\to\infty} C_N = S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{H} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - K\, l\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{F} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Доведення теореми 3. Введемо послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\zeta_i, i=\overline{1,N}$, які приймають значення 1 і 0 з ймовірностями $\overline{p}$ і $1-\overline{p}$ відповідно, тобто $P(\zeta_i=1)=\overline{p}, \quad P(\zeta_i=0)=1-\overline{p}\ i=\overline{1,N}$. Тоді першу суму в виразі (8) можна представити наступним чином $\sum_{k=0}^{k_0} C_N^k \overline{p}^k \left(1-\overline{p}\right)^{N-k} = P\left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_i \le k_0\right)$. Застосуємо Теорему Ліндебергa для знаходження границі цієї суми.

$$P\left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_i \le k_0\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\zeta_i - E\left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_i\right)}} \le \frac{k_0 - E\left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_i\right)}}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{H} e^{-\frac{x^2}{2}}dx, \quad N\to\infty, \text{ де } H=\lim_{N\to\infty}\frac{k_0 - N\overline{p}}{N\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)}.$$

Отже, знайшли границю першої суми. Аналогічним чином визначимо границю для другої суми. Введемо послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\xi_i, i=\overline{1,N}$, які приймають значення 1 і 0 з ймовірностями $\overline{\overline{p}}$ і $1-\overline{\overline{p}}$ відповідно $P(\xi_i=1)=\overline{\overline{p}}, \quad P(\xi_i=0)=1-\overline{\overline{p}}\ i=\overline{1,N}$.

Тоді другу суму в виразі (8) можна представити наступним чином $\sum_{k=0}^{k_0} C_N^k \overline{\overline{p}}^k \left(1-\overline{\overline{p}}\right)^{N-k} = P\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i \le k_0\right)$. За теоремою Ліндебергa границя цієї суми наступна:

$$P\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i \le k_0\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\xi_i - E\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i\right)}} \le \frac{k_0 - E\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i\right)}}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{F} e^{-\frac{x^2}{2}}dx, \quad N\to\infty, \text{ де } F=\lim_{N\to\infty}\frac{k_0 - N\overline{\overline{p}}}{N\overline{\overline{p}}\left(1-\overline{\overline{p}}\right)}.$$

Отже, границя справедливої ціни

$$\lim_{N\to\infty} C_N = \lim_{N\to\infty}\left(S_0 P\left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_i \le k_0\right) - KL^N P\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i \le k_0\right)\right) = S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{H} e^{-\frac{x^2}{2}}dx - K\,l\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{F} e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

де $H=\lim_{N\to\infty}\frac{k_0 - N\overline{p}}{N\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)}$, $F=\lim_{N\to\infty}\frac{k_0 - N\overline{\overline{p}}}{N\overline{\overline{p}}\left(1-\overline{\overline{p}}\right)}$, $l=\lim_{N\to\infty} L^N$.

Теорема доведена.

Теорема 4.

Нехай $\lim_{N\to\infty}\ln(1+b_1(N))=0$, $\lim_{N\to\infty}\ln(1+b_2(N))=\gamma$, $0<\gamma<\infty$,та $\lim_{N\to\infty}\ln(1+r_1(N))=0$, $\lim_{N\to\infty}\ln(1+r_2(N))=0$. Якщо існують границі $\lim_{N\to\infty} N\left(1-\overline{p}\right)=a$, $\lim_{N\to\infty} N\left(1-\overline{\overline{p}}\right)=b$, $l=\lim_{N\to\infty} L^N$,то границя справедливої ціни контракту з опціоном визначається наступним чином $\lim_{N\to\infty} C_N = S_0 - K\,l$.

Доведення теореми 4. Як і в попередньому випадку, вводимо послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\zeta_i, i=\overline{1,N}$, які приймають значення 1 і 0 з ймовірностями $1-\overline{p}$ і $\overline{p}$ $P(\zeta_i=1)=1-\overline{p}, \quad P(\zeta_i=0)=\overline{p}, \quad i=\overline{1,N}$, а також незалежних однаково розподілених випадкових величин $\xi_i, i=\overline{1,N}$, таку, що $P(\xi_i=1)=1-\overline{\overline{p}}, \quad P(\xi_i=0)=\overline{\overline{p}}, \quad i=\overline{1,N}$. Ввівши такі незалежні величини, маємо $E\, e^{iu\sum_{i=1}^{N}\varsigma_i} = \left(E\, e^{iu\varsigma_i}\right)^N = \left(e^{iu}\left(1-\overline{p}\right)+\overline{p}\right)^N$. Через те що $\lim_{N\to\infty} N\left(1-\overline{p}\right)=a$ можна представити $\overline{p}=1-\frac{a}{N}$ і $1-\overline{p}=\frac{a}{N}$, і

$$E\, e^{iu\sum_{i=1}^{N}\varsigma_i} = \left(E\, e^{iu\varsigma_i}\right)^N = \left(e^{iu}\left(1-\overline{p}\right)+\overline{p}\right)^N = \left(e^{iu}\frac{a}{N}+1-\frac{a}{N}\right)^N = \left(1+\frac{a}{N}\left(e^{iu}-1\right)\right)^N \to e^{a\left(e^{iu}-1\right)}, \quad N\to\infty.$$

Граничним є розподіл Пуассона. Аналогічні міркування можна провести і для суми випадкових величин $\zeta_i, i=\overline{1,N}$, теж отримавши розподіл Пуассона як граничний. Шукана границя для C_N набуває вигляду:

$$\lim_{N\to\infty} C_N = \lim_{N\to\infty}\left(S_0 P\left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_i \le k_0\right) - KL^N P\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i \le k_0\right)\right).$$

Так як $\lim\limits_{N\to\infty} N\left(1-\overline{p}\right)=a$ та $\lim\limits_{N\to\infty} N\left(1-\overline{\overline{p}}\right)=b$, застосуємо граничну теорему Пуассона для обчислення границь

$$\lim_{N\to\infty}\left(S_0\,P\left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_i\le k_0\right)\right)=S_0\lim_{N\to\infty}P\left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_i\le k_0\right)=S_0\lim_{N\to\infty}\sum_{k:k\le[k_0]}P\left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_i=k\right)=S_0\sum_{k=1}^{G}\frac{a^k}{k!}e^{-a}=S_0,$$ де

$$G=\lim_{N\to\infty}[k_0]=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{\ln K-\ln(1+b_2)^N S_0}{\ln(1+b_1)(1+b_2)^{-1}}\right]=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{\ln\dfrac{K}{S_0}-N\ln(1+b_2)}{\ln(1+b_1)-\ln(1+b_2)}\right]=\infty.$$ Аналогічно і для другого доданку

$$\lim_{N\to\infty}\left(KL^N P\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i\le k_0\right)\right)=K\lim_{N\to\infty}\left(L^N P\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i\le k_0\right)\right)=K\,l\sum_{k=1}^{G}\frac{b^k}{k!}e^{-b}=K\,l.$$ Отже $\lim\limits_{N\to\infty}C_N=S_0-K\,l$.

Теорема доведена.

Проілюструємо застосування наведених теорем на прикладах.

П р и к л а д 3. Нехай $r_1(N)=\exp\left\{r_0\dfrac{t}{N}\right\}-1$, $r_2(N)=\exp\left\{r_0'\dfrac{t}{N}\right\}-1$, $b_1(N)=\exp\left\{-b_0\sqrt{\dfrac{t}{N}}\right\}-1$, $b_2(N)=\exp\left\{b_0\sqrt{\dfrac{t}{N}}\right\}-1$.

Застосувавши теорему 3 отримаємо, що границя справедливої ціни контракту з опціоном є наступною:

$$\lim_{N\to\infty}C_N=S_0\,\Phi\left(-\frac{1}{b_0\sqrt{t}}\left(\ln K/S_0+\frac{1}{2}\left(r_0'+r_0+b_0^2\right)t\right)\right)-Ke^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}b_0^2-r_0'-r_0\right)t}\,\Phi\left(-\frac{1}{b_0\sqrt{t}}\left(\ln K/S_0+\frac{1}{2}\left(b_0^2-r_0'-r_0\right)t\right)\right),$$

де $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{s^2}{2}}ds$.

П р и к л а д 4. Нехай $r_1(N)=\exp\left\{r_0\dfrac{t}{N}\right\}-1$, $r_2(N)=\exp\left\{r_0'\dfrac{t}{N}\right\}-1$, $b_1(N)=\exp\left\{-\mu\dfrac{t}{N}\right\}-1$, $b_2(N)=\exp\{\lambda\}-1$.

За торемою 4 границя справедливої ціни контракту з опціоном є наступною $\lim\limits_{N\to\infty}C_N=S_0-K\exp\left\{\dfrac{\lambda r_0'+2\mu}{\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2}T\right\}$, та

$\lim\limits_{N\to\infty}C_N=0$, якщо $\dfrac{\lambda r_0'+2\mu}{\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2}T>\ln\dfrac{S_0}{K}$.

5. Висновки

В результаті проведених у даній роботі досліджень отримано ряд результатів: встановлено, що в рамках поставленої задачі єдиними можливими безмежно подільними граничними розподілами для еволюції двох ризикових активів є вироджений, нормальний розподіли та розподіл Пуассона з певними параметрами; знайдено умови, виконання яких гарантує збіжність саме до отриманих розподілів; отримано границі для справедливої ціни контракту з опціоном для дискретної моделі з випадковою еволюцією ризикових активів та умови їх існування. Застосування отриманих результатів проілюстровано на прикладах, в яких розглядаються конкретні моделі еволюції ризикового та неризикового активу, що еволюціонують випадково і для яких явно знайдені граничні розподіли з конкретними параметрами та отримано формули для границі справедливої ціни контракту з опціоном.

1. *Гончар М.С.* Фондовий ринок і економічний ріст. – К., 2001. 2. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение теорию случайных процессов. – М., 1965. 3. *Карташов М.В.* Теорія ймовірностей та математична статистика. – К., 2004. 4. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М., 1962. 5. *Рачев С.Т., Рушендорф Л.* Модели и расчеты контрактов с опционами // Теория вероятностей и ее применения – 1994. – Том 39. – с.150-188. 6. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической и финансовой математики. – М., 1998.

Надійшла до редакції 11.11.08

УДК 519.21

О. Усольцева, асп.
***E**-mail: elena_usolceva@ukr.net*

КОНСИСТЕНТНА ОЦІНКА В МОДЕЛІ ВИЖИВАННЯ З ПОХИБКАМИ ВИМІРЮВАННЯ

У статті розглядається модель виживання з похибкою вимірювання. Деякі тривалості життя можуть бути цензурованими. Їх розподіл залежить від невідомого параметра, що оцінюється. В статті оцінюється цей параметр, від якого розподіл цензору не залежить. Доведено консистентність одержаної адаптованої оцінки максимальної вірогідності у випадку невиродженої кореляційної матриці регресора.

The Accelerated Failure Time Model is studied, where i.i.d. errors are present. Some lifetimes may be censored. The distribution of lifetime depends on unknown parameter, which is estimated. There is measurement error presents in the normal model. The adjusted quasi-likelihood estimator is obtained. It is consistent under nonsingular correlation matrix of regressor and some conditions on censoring distribution.