Так як $\lim\limits_{N\to\infty} N\left(1-\overline{p}\right)=a$ та $\lim\limits_{N\to\infty} N\left(1-\overline{\overline{p}}\right)=b$, застосуємо граничну теорему Пуассона для обчислення границь

$$\lim_{N\to\infty}\left(S_0\,P\left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_i\le k_0\right)\right)=S_0\lim_{N\to\infty}P\left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_i\le k_0\right)=S_0\lim_{N\to\infty}\sum_{k:k\le[k_0]}P\left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_i=k\right)=S_0\sum_{k=1}^{G}\frac{a^k}{k!}e^{-a}=S_0,$$ де

$$G=\lim_{N\to\infty}[k_0]=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{\ln K-\ln(1+b_2)^N S_0}{\ln(1+b_1)(1+b_2)^{-1}}\right]=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{\ln\dfrac{K}{S_0}-N\ln(1+b_2)}{\ln(1+b_1)-\ln(1+b_2)}\right]=\infty.$$ Аналогічно і для другого доданку

$$\lim_{N\to\infty}\left(KL^N P\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i\le k_0\right)\right)=K\lim_{N\to\infty}\left(L^N P\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i\le k_0\right)\right)=K\,l\sum_{k=1}^{G}\frac{b^k}{k!}e^{-b}=K\,l.$$ Отже $\lim\limits_{N\to\infty}C_N=S_0-K\,l$.

Теорема доведена.

Проілюструємо застосування наведених теорем на прикладах.

Приклад 3. Нехай $r_1(N)=\exp\left\{r_0\frac{t}{N}\right\}-1$, $r_2(N)=\exp\left\{r_0'\frac{t}{N}\right\}-1$, $b_1(N)=\exp\left\{-b_0\sqrt{\frac{t}{N}}\right\}-1$, $b_2(N)=\exp\left\{b_0\sqrt{\frac{t}{N}}\right\}-1$.

Застосувавши теорему 3 отримаємо, що границя справедливої ціни контракту з опціоном є наступною:

$$\lim_{N\to\infty}C_N=S_0\,\Phi\left(-\frac{1}{b_0\sqrt{t}}\left(\ln K/S_0+\frac{1}{2}\left(r_0'+r_0+b_0^2\right)t\right)\right)-Ke^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}b_0^2-r_0{}'-r_0\right)t}\,\Phi\left(-\frac{1}{b_0\sqrt{t}}\left(\ln K/S_0+\frac{1}{2}\left(b_0^2-r_0'-r_0\right)t\right)\right),$$

де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{s^2}{2}}ds$.

Приклад 4. Нехай $r_1(N)=\exp\left\{r_0\frac{t}{N}\right\}-1$, $r_2(N)=\exp\left\{r_0'\frac{t}{N}\right\}-1$, $b_1(N)=\exp\left\{-\mu\frac{t}{N}\right\}-1$, $b_2(N)=\exp\{\lambda\}-1$.

За торемою 4 границя справедливої ціни контракту з опціоном є наступною $\lim\limits_{N\to\infty}C_N=S_0-K\exp\left\{\dfrac{\lambda r_0'+2\mu}{\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2}T\right\}$, та

$\lim\limits_{N\to\infty}C_N=0$, якщо $\dfrac{\lambda r_0'+2\mu}{\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2}T>\ln\dfrac{S_0}{K}$.

5. Висновки

В результаті проведених у даній роботі досліджень отримано ряд результатів: встановлено, що в рамках поставленої задачі єдиними можливими безмежно подільними граничними розподілами для еволюції двох ризикових активів є вироджений, нормальний розподіли та розподіл Пуассона з певними параметрами; знайдено умови, виконання яких гарантує збіжність саме до отриманих розподілів; отримано границі для справедливої ціни контракту з опціоном для дискретної моделі з випадковою еволюцією ризикових активів та умови їх існування. Застосування отриманих результатів проілюстровано на прикладах, в яких розглядаються конкретні моделі еволюції ризикового та неризикового активу, що еволюціонують випадково і для яких явно знайдені граничні розподіли з конкретними параметрами та отримано формули для границі справедливої ціни контракту з опціоном.

1. *Гончар М.С.* Фондовий ринок і економічний ріст. – К., 2001. 2. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение теорию случайных процессов. – М., 1965. 3. *Карташов М.В.* Теорія ймовірностей та математична статистика. – К., 2004. 4. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М., 1962. 5. *Рачев С.Т., Рушендорф Л.* Модели и расчеты контрактов с опционами // Теория вероятностей и ее применения – 1994. – Том 39. – с.150-188. 6. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической и финансовой математики. – М., 1998.

Надійшла до редакції 11.11.08

УДК 519.21

О. Усольцева, асп.
***E**-mail: elena_usolceva@ukr.net*

КОНЗИСТЕНТНА ОЦІНКА В МОДЕЛІ ВИЖИВАННЯ З ПОХИБКАМИ ВИМІРЮВАННЯ

У статті розглядається модель виживання з похибкою вимірювання. Деякі тривалості життя можуть бути цензурованими. Їх розподіл залежить від невідомого параметра, що оцінюється. В статті оцінюється цей параметр, від якого розподіл цензору не залежить. Доведено консистентність одержаної адаптованої оцінки максимальної вірогідності у випадку невиродженої кореляційної матриці регресора.

The Accelerated Failure Time Model is studied, where i.i.d. errors are present. Some lifetimes may be censored. The distribution of lifetime depends on unknown parameter, which is estimated. There is measurement error presents in the normal model. The adjusted quasi-likelihood estimator is obtained. It is consistent under nonsingular correlation matrix of regressor and some conditions on censoring distribution.

1. Вступ

Розглянемо модель виживання (Accelerated Failure Time Model) $\log T_i = \beta_0 + \beta_X^T X_i + \psi\varepsilon_i$, $\psi > 0$, $i \geq 1$. Досліджуються вектори X_i; $\{\varepsilon_i\}$ – незалежні однакові розподілені випадкові величини з нульовим середнім і скінченою дисперсією. У досліджуваних вибірках присутні цензуровані спостереження, тобто спостерігаються $Y_i = \min\{T_i, C_i\}$ та індикатори $\Delta_i = \mathrm{I}\{T_i \leq C_i\}$ замість T_i. Цензори $\{C_i\}$, що є незалежним однаково розподіленими, не залежать від досліджуваних даних. У статті оцінюється невідомий параметр θ, від якого залежить розподіл тривалості життя T_i, причому розподіл цензора C_i не залежить від нього. В роботі [1] була сконструйована незміщена адаптована виправлена оціночна функція (Corrected Score) у присутності похибки вимірювання. В даній статті, що основана на теорії оціночних рівнянь, доводиться, що це оціночне рівняння задає консистентну оцінку. Структура роботи наступна. У розділі 2 описана основна модель. Розглядаємо класичну модель у присутності похибки вимірювання, досліджуючи замість X_i сурогатні дані $W_i = X_i + U_i$, $i = \overline{1,n}$, де U_i – центровані незалежні однаково розподілені випадкові вектори із скінченим другим моментом. У розділі 3 доводиться консистентність наведеної оцінки при відомому розподілі цензора. У розділі 4 використовується метод Каплана-Мейєра для оцінювання невідомого розподілу цензора. В цьому випадку також доведено консистентність оцінки при виконанні певних умов на розподіл цензора.

2. Загальна модель

Розглядається *n* спостережень невід'ємних незалежних однаково розподілених випадкових величин T_i, $i = \overline{1,n}$. Під T_i розуміється час до того, як певна подія відбудеться. Припускається, що функція розподілу T_i неперервна. В моделі присутнє цензурування, тобто замість T_i досліджуються $Y_i = \min\{T_i, C_i\}$ та $\Delta_i = \mathrm{I}\{T_i \leq C_i\}$, де незалежні однаково розподілені випадкові величини C_i, що є обмеженими константою C – цензори, що не залежать від досліджуваних даних.

Розглянемо модель виживання (AFTM)

$$Z_i := \log T_i = \beta_0 + \beta_X^T X_i + \psi\varepsilon_i, \psi > 0 \tag{1}$$

при наявності цензурування. Розглядаються пари незалежних однаково розподілених випадкових величин (Y_i, Δ_i), $i = \overline{1,n}$. Через $\beta = (\beta_0, \beta_X^T)^T$ позначимо вектор, що належить компактній опуклій множині Θ. Позначимо наступні розмірності: $\dim\beta = k+1$, $\dim X_i = k$, $i = \overline{1,n}$. Позначимо через S кореляційну матрицю випадкового вектора X_i, $i = \overline{1,n}$. Припущення відносно розподілу X_i наступні: випадкові вектори $\{X_i\}$ однаково розподілені, матриця S – не вироджена, $E\|\left(1; X^T{}_i\right)^T\| < \infty$. Позначимо через x_i, $i = \overline{1,k}$ – випадкові величини, що є координатами вектора X_1. Тоді вимагається існування скінченних моментів $Ex_i x_j \exp\{\beta_0 + \beta_X^T X_1\}$ при всіх $i, j = \overline{1,k}$. В даній моделі присутня похибка вимірювання, тобто замість X_i досліджуються сурогатні дані $W_i = X_i + U_i$, $i = \overline{1,n}$, де $\{U_i\}$ – послідовність центрованих незалежних однаково розподілених випадкових векторів із скінченим другим моментом. U_i не залежать від X_k, Y_k, Δ_k, $k = \overline{1,n}$. Додатково припускається існування моменту $M_{U_i}(a) = E(\exp\{a^T U_i\})$, для всіх векторів $a \in R^{k+1}$, $i = \overline{1,n}$.

Нехай у моделі $Z_i = F(X_i, \theta)$, де спостерігаються $\{X_i\}$, розподіл Z_i залежить від параметра θ, що оцінюється. Оцінка квазімаксимальної вірогідності $\hat{\theta}$ визначається як корінь рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial m_i(\theta)}{\partial\theta} \cdot \frac{(Z_i - m_i(\theta))}{V_i(\theta)} = 0, \tag{2}$$

де функції середнього та дисперсії задаються наступним чином

$$\begin{cases} m_i(\theta) = E(Z_i | X_i) \\ V_i(\theta) = Cov(Z_i | X_i) \end{cases} \tag{3}$$

Рівняння (2) є незміщеним при виконанні певних стандартних умов регулярності, див. [3]. Замість введених функцій середнього та дисперсії у випадку нової адаптованої оцінки Quasi-Likelihood розглядаються умовні моменти $E(T_i | W_i; \theta)$ та $Var(T_i | W_i; \theta)$. Таким чином рівняння (2) набуває виду

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E(T_i | W_i; \theta)}{\partial\theta} \cdot \left(Var(T_i | W_i; \theta)\right)^{-1} \cdot \{T_i - E(T_i | W_i; \theta)\} = 0. \tag{4}$$

Одержане оціночне рівняння також незміщене. В [1] умовні моменти $E(T_i | W_i; \theta)$ та $Var(T_i | W_i; \theta)$ подані в наступному вигляді:

$$E(T_i | W_i; \theta) = E(E(T_i | X_i, \theta) | W_i); V(T_i | W_i; \theta) = V(E(T_i | X_i, \theta) | W_i) + E(V(T_i | X_i, \theta) | W_i) \tag{5}$$

3. Консистентність при відомому розподілі цензора

Оціночне рівняння Quasi-Likelihood (2) в загальній моделі AFTM переписується у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} \left(1; X^T{}_i\right)^T (T_i - \exp(\beta_0 + \beta_X^T X_i)) = 0 \tag{6}$$

Це оціночне рівняння також є незміщеним. Припускаючи нормальність випадкових векторів $U_i \sim N(0,\Sigma_{U_i})$, модифікуємо це оціночне рівняння, використовуючи адаптивне оціночне рівняння з леми 5.2.1 з [1]. Підрахуємо наступні моменти в цьому випадку: $M_{U_i}(-\beta_X) = E(\exp\{-\beta_X^T U_i\}) = \exp\{0,5\cdot\beta_X^T \Sigma_{U_i}\beta_X\}$;

$$M'_{U_i}(-\beta_X) = E(U_i\cdot\exp\{\beta_X^T U_i\}) = \frac{\partial}{\partial\beta_X} M_{U_i}(\beta_X) = -\Sigma_{U_i}\beta_X\cdot\exp\{0,5\cdot\beta_X^T\Sigma_{U_i}\beta_X\}.$$

З (6) одержимо систему рівнянь, яка задає оціночне рівняння у випадку присутності похибки вимірювання $W_i = X_i + U_i$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\left(T_i\cdot\dfrac{\exp\{-(\beta_0+\beta'_X W_i)\}}{(M_{U_i}(-\beta_X))}-1\right)=0\\ \sum_{i=1}^{n}\left(\left(W_i-\dfrac{M'_{U_i}(\beta_X)}{M_{U_i}(-\beta_X)}\right)\cdot T_i\cdot\dfrac{\exp\{-(\beta_0+\beta'_X W_i)\}}{(M_{U_i}(-\beta_X))}-W_i\right)=0\end{cases}.$$

Тепер будемо адаптувати оціночне рівняння (6) до цензурування. Розглянемо наступні об'єкти:

$$\{Q_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q(Z_i,t), t\in\Theta, n\ge 1\}, \tag{7}$$

де послідовність оціночних функцій $\{Q_n(t), n\ge 1\}$ базується на вибірці $\{Z_i\}$, $i=\overline{1,n}$. Тут і надалі у статті, якщо немає окремих зауважень, Θ є опуклою та компактною підмножиною R^{k+1}. Випадкові величини $\{Z_i\}$ незалежні однаково розподілені, $i=\overline{1,n}$. Функція розподілу Z_i залежить від вектора параметрів $\theta\in\Theta$. Вимагається, щоб функції $Q_n(t), n\ge 1$ були неперервними на Θ P_θ-м.н. при $n\ge 1$, де P_θ – деяка скінчена міра на борельових підмножинах Θ. Вимагається також, щоб оціночна функція $\sum_{i=1}^{n} q(z,t), t\in\Theta$ була вимірною відносно z, $\dim q = k+1$. Надалі буде розглядатися оцінка $\hat\theta = \hat\theta_n$, що є вимірним розв'язком рівняння $Q_n(t)=0$, $t\in\Theta$. Існування та вимірність такої оцінки буде гарантувати теорема 1. Виходячи з рівняння (6) одержимо наступне $t=\left(\beta_0;\beta^T{}_X\right)^T$, $z=\left(T;X^T\right)^T$, $\theta=\left(b_0;b^T{}_X\right)^T$, $Q_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}q(Z_i,t)=0$, де $q(z,t)=\left(1;X^T\right)^T(T-\exp(\beta_0+\beta_X^T X))$. Тепер використаємо теорему 6.2.2 з роботи [1]. Перепишемо оціночне рівняння (6) в наступній формі

$$\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}1\\X\end{pmatrix}\left(\frac{\Delta_i Y_i}{G(Y_i)}-\exp(\beta_0+\beta_X^T X_i)\right)=0, \tag{8}$$

де $G(t) := P(C_i \ge t \mid W_i) = P(C_i\ge t) > 0$. Одержане оціночне рівняння є незміщеним. Його можна записати у вигляді

$$Q_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q(Z_i,t) = 0, \tag{9}$$

де

$$q(z,t) = \begin{pmatrix}1\\X\end{pmatrix}\left(\frac{\Delta Y}{G(Y)}-\exp(\beta_0+\beta_X^T X)\right). \tag{10}$$

Наведемо теорему, доведення якої повторює алгоритм доведення леми 1 з [4].

Теорема 1. *Нехай виконуються наступні умови для оціночних функцій (7).*

1). $q(z,\cdot)\in C^1(\Theta)$ м. н.; при всіх t з Θ $E_\theta\|q(z,t)\|$ відносно міри P_θ обмежене.

2). Функція $Q_\infty(\theta,t) := E_\theta q(z,t)$ неперервна за θ на Θ.

3). $E_\theta \sup_{t\in\Theta}\left\|\frac{\partial q}{\partial t^T}(z,t)\right\| < \infty$.

4). $v := \frac{\partial Q_\infty}{\partial t^T}(\theta,\theta)$ – невироджена матриця.

5). $Q_\infty(\theta,t)=0$ тоді і лише тоді, коли $\theta = t$.

Тоді існує оцінка $\hat\theta_n$, що є функцією від спостережень. Ця оцінка є строго консистентною, тобто $P_\theta(\hat\theta_n\to\theta, n\to\infty)=1$.

Існування оцінки випливає з тереми 12.1 з [3]. Існування вимірного розв'язку забезпечує теорема зі статті [5]:

Якщо існує декілька розв'язків рівняння для визначення оцінки, можна вибрати такий, який буде вимірною функцією від спостережень.

Теорема 2. *Оцінка* $\hat{\theta}$*, що визначається як розв'язок оціночного рівняння (8), є строго консистентною.*

Доведення: Для доведення цієї теореми потрібно перевірити для функцій $q(z,t)$ з (10) виконання умов теореми 1. Позначимо істинне значення вектору параметрів β через *b*. Використовуючи лему 6.2.1 з роботи [1], одержимо

$$Q_\infty(\beta,t) := E_b q(z,t) = E_b \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} \left(\frac{\Delta Y}{G(Y)} - \exp\left(\beta_0 + \beta_X^T X\right) \right) = E\left(\begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} \left(\exp\{b_0 + b_X^T X\} - \exp\{\beta_0 + \beta_X^T X\} \right) \right).$$

Умови 1) – 3) теореми 1 випливають із умов регулярності, накладених на функції $Q_\infty(\beta,t)$, $q(z,t)$. Розглянемо умову 4) теореми 1. Невиродженість матриці $v := \frac{\partial Q_\infty}{\partial t^T}(\theta,\theta) = -E\left(\left(\exp\{b_0 + b_X^T X\} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} \left(1; X^T\right) \right)$ випливає з невиродженості кореляційної матриці S регресора. Для перевірки умови 5) достатньо показати, що з рівняння $Q_\infty(\theta,t) = 0$ випливає $t = \theta$. Покажемо це, використовуючи умову невиродженості матриці S. Маємо рівняння $E\left(\begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} \left(\exp\{b_0 + b_X^T X\} - \exp\{\beta_0 + \beta_X^T X\} \right) \right) = 0$, що розписується у систему

$$\begin{cases} Ee^{b_0 + b_X^T X} = Ee^{\beta_0 + \beta_X^T X} \\ Ex_i e^{b_0 + b_X^T X} = Ex_i e^{\beta_0 + \beta_X^T X} \end{cases}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{11}$$

Лема 1. *Нехай* S *– додатновизначена матриця. Тоді система рівнянь (11) має єдиний розв'язок* $\beta_i = b_i,\ i = \overline{0,k}.$

Доведення леми спирається на те, що матриця других похідних функції $\Phi(\beta) = Ee^{\beta_0 + \beta_X^T X}$ додатновизначена за умови невиродженості матриці S.

Отже, всі умови теореми 1 виконані. Теорема 2 доведена.

4. Оцінка Каплана-Меєра розподілу цензора

Ми довели консистентність оцінки у випадку відомого розподілу цензора. Часто на практиці цього розподілу ми не знаємо. Його можна оцінити за допомогою методу Каплана-Меєра. Використовуючи цей метод, необхідно поміняти місцями функції розподілу періоду життя та цензора. Наведемо лему з [2], яка буде використана далі.

Лема 2. *Нехай функції* $U_n(\cdot)$ *задано на компакті* $\Theta \subset R^{k+1}$ *такі, що* $\lim_{n\to\infty} U_n(\beta) = 0$ *за ймовірністю для кожного* β *з* Θ*. Припустимо, що для всіх додатних* ε *виконується* $\lim_{l\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\sup_{\|\beta_1 - \beta_2\| \le l} |U_n(\beta_1) - U_n(\beta_2)| > \varepsilon\} = 0.$ *Тоді за ймовірністю* $\lim_{n\to\infty} \sup_{\beta\in\Theta} |U_n(\beta)| = 0.$

Доведемо наступну лему.

Лема 3. *Розглядаються борельова сигма-алгебра* $\mathrm{B}(\Theta)$ *на* Θ*, імовірнісний простір* (Ω, F, P)*. Послідовність вимірних відносно сигма-алгебри* $\Im := \sigma a(\mathrm{B}(\Theta) \times F)$ *функцій* $S_n(\beta) = S_n(\beta,\omega)$*,* $n \ge 1$ *задовольняє наступні умови:*

1. Існує така невипадкова функція $S_\infty(\beta)$*,* $\beta \in \Theta$*, що для всіх* β *з* Θ*:* $S_n(\beta) \to S_\infty(\beta)$*,* $n \ge 1$ *м. н.*

2. Рівняння $S_\infty(\beta) = 0$ *має єдиний розв'язок* b *на* Θ*.*

3. Функція $S_\infty(\cdot)$ *неперервна за* β *на* Θ*.*

4. $S_n(\beta) \in C^1(\Theta)$*,* $P\{S_n(\cdot)$*,* $n \ge 1$ *одностайно неперервні за* $\beta \in \Theta$ $\} = 1$*.*

5. $E_b \sup_{\beta\in\Theta} \left\| \frac{\partial S_n}{\partial \beta^T}(\beta) \right\| < \infty$

6 . $v := \frac{\partial S_\infty}{\partial \beta^T}(b)$ *– невироджена матриця*

Нехай випадкові величини Φ_n*,* $n \ge 1$ *задовольняють умові*

7. при $n \to \infty$ *за ймовірністю.*

Тоді оціночне рівняння $S_n(\beta) + \Phi_n = 0$ *має вимірний розв'язок* β'_n *з імовірністю* p_n*, що прямує до 1 при* $n \to \infty$*, такий, що оцінка* β'_n *консистентна.*

Доведення: Умови існування та вимірності розв'язку гарантує теорема 1.

Використаємо лему 2 з [2], поклавши $U_n(\beta) = S_n(\beta) + \Phi_n - S_\infty(\beta)$. При кожному $\beta \in \Theta$ виконується рівність $\lim_{n\to\infty} U_n(\beta) = \lim_{n\to\infty}(S_n(\beta) - S_\infty(\beta)) + \lim_{n\to\infty} \Phi_n = 0$ за ймовірністю. Залишилося перевірити виконання другої умови леми 2 для функції $U_n(\beta)$ для всіх додатних ε.

$$\lim_{l\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\sup_{\|\beta_1 - \beta_2\| \le l} |U_n(\beta_1) - U_n(\beta_2)| > \varepsilon\} \le$$

$$\le \lim_{l\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\sup_{\|\beta_1 - \beta_2\| \le l} |S_n(\beta_1) - S_\infty(\beta_1)| > \frac{\varepsilon}{2}\} + \lim_{l\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\sup_{\|\beta_1 - \beta_2\| \le l} |S_n(\beta_2) - S_\infty(\beta_2)| > \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Ці доданки рівні 0, бо з імовірністю 1 $S_n(\beta)$ рівномірно по β збігаються до $S_\infty(\beta)$. За лемою 2 маємо, що $\lim_{n\to\infty}\sup_{\beta\in\Theta}|U_n(\beta)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{\beta\in\Theta}|S_n(\beta)+\Phi_n(\beta)-S_\infty(\beta)|=0$ за ймовірністю. Тобто оціночна функція $S'_n(\beta)=S_n(\beta)+\Phi_n$ задовольняє наступну умову за ймовірністю $\lim_{n\to\infty}\sup_{\beta\in\Theta}\|S'_n(\beta)-S'_\infty(\beta)\|=0$, причому $S'_\infty(\beta)=S_\infty(\beta)$. З цього випливає, що $\|S'_n(\beta)-S_\infty(\beta)\|\xrightarrow{P}0$. Тому $\beta'_n\xrightarrow{P}b$, де b – істинне значення параметра, що оцінюється. Дійсно, $S_\infty(\cdot)$ – неперервна функція, тому якщо $\|\beta'_n-b\|>\varepsilon$, то для деякого додатного $\delta(\varepsilon)$ виконується наступна нерівність $\|S_\infty(\beta'_n)-S_\infty(b)\|>\delta(\varepsilon)$. Розглянемо ймовірність $P\{\|\beta'_n-b\|>\varepsilon\}\le P\{\|S_\infty(\beta'_n)-S_\infty(b)\|>\delta(\varepsilon)\}\le$

$$\le P\{\|S_\infty(\beta'_n)-S'_n(\beta'_n)\|>\frac{\delta(\varepsilon)}{4}\}+P\{\|S'_n(b)-S_\infty(b)\|>\frac{\delta(\varepsilon)}{4})\}+P\{\|S_\infty(b)\|>\frac{\delta(\varepsilon)}{4})\}+P\{\|S'_n(b)-S_\infty(b)\|>\frac{\delta(\varepsilon)}{4})\}.$$

Перший та останній доданки прямують до нуля при $n\to\infty$ з одержаної збіжності $\|S'_n(\beta)-S_\infty(\beta)\|\xrightarrow{P}0$. Другий прямує до нуля з імовірністю $p_n\to 1$, $n\to\infty$ тому що з імовірністю 1 $S_n(\beta)$ рівномірно по β збігаються до $S_\infty(\beta)$. Третій доданок прямує до нуля за неперервністю функції $S_\infty(\cdot)$ на Θ.

Лема доведена.

Теорема 3. *Оцінка $\hat\theta$, що визначається як корінь оціночного рівняння*

$$\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}1\\X\end{pmatrix}\left(\frac{\Delta_i\hat{Y}_i}{G(\hat{Y}_i)}-\exp(\beta_0+\beta_X^T X_i)\right)=0, \tag{8'}$$

де $\hat{Y}_i:=Y_i\cdot I\{Y<C-\delta_n\}$, послідовність додатних чисел $\{\delta_n,n\ge1\}$ прямує до 0, буде консистентною за ймовірністю після оцінювання невідомої функції розподілу цензора за допомогою методу Каплана-Мейєра.

Доведення: Рівняння (8') перепишемо наступним чином:

$$0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}1\\X_i\end{pmatrix}\left(\frac{\Delta_i\hat{Y}_i}{G(\hat{Y}_i)}-\exp\{\beta_0+\beta_X^T X_i\}\right)=:S_n(\beta,F^C),$$

де F^C – функція розподілу цензора. Розв'язуючи оціночне рівняння $S(\beta,F^C)=0$, ми одержимо консистентну оцінку $\hat\beta$ аналогічно теоремі 1 при відомому розподілі цензора F_C. Нехай за допомогою методу Каплана-Мейєра була одержана оцінка функції розподілу цензора $\hat{F}_n^C$. Тоді маємо оціночне рівняння $\hat{S}_n(\beta,\hat{F}^C)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}1\\X_i\end{pmatrix}\left(\frac{\Delta_i\hat{Y}_i}{\hat{G}(\hat{Y}_i)}-\exp\{b_0+b_X^T X_i\}\right)=0,$

де функція $\hat{G}(\cdot)$ визначається після оцінювання функції розподілу цензора. Перепишемо цю оціночну функцію у вигляді $\hat{S}_n(\beta,\hat{F}^C)=S_n(\beta,\hat{F}^C)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}1\\X_i\end{pmatrix}\left(\frac{\Delta_i\hat{Y}_i}{\hat{G}(\hat{Y}_i)}-\frac{\Delta_i\hat{Y}_i}{G(\hat{Y}_i)}\right)$. Залишається використати лему 3 для доведення теореми 3, забезпечивши наступне співвідношення $\Phi_n(F^C)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}1\\X_i\end{pmatrix}\left(\frac{\Delta_i\hat{Y}_i}{\hat{G}(\hat{Y}_i)}-\frac{\Delta_i\hat{Y}_i}{G(\hat{Y}_i)}\right)\to 0,n\to\infty$ за ймовірністю. Це виконується завдяки припущенню щодо обмеженості цензорів. Враховуючи також, що $E\left\|\left(1;X^T_i\right)^T\right\|<\infty$, одержимо

$$|\Phi_n|=\sup_{i=\overline{1,n}}\left|E\begin{pmatrix}1\\X_i\end{pmatrix}\left(\frac{\Delta_i\hat{Y}_i}{\hat{G}(\hat{Y}_i)}-\frac{\Delta_i\hat{Y}_i}{G(\hat{Y}_i)}\right)\right|\le E\left\|\begin{pmatrix}1\\X_i\end{pmatrix}\right\|\cdot\sup_{i=\overline{1,n}}\left\{|\Delta_i T_i|\cdot\left|\frac{G(\hat{Y}_i)-\hat{G}(\hat{Y}_i)}{\hat{G}(\hat{Y}_i)G(\hat{Y}_i)}\right|\right\}\le$$

$$\le E\left\|\begin{pmatrix}1\\X_i\end{pmatrix}\right\|\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\sup_{i=\overline{1,n}}\left\{|\Delta_i T_i|\cdot\left|G(\hat{Y}_i)-\hat{G}(\hat{Y}_i)\right|\right\}\le\frac{C}{\varepsilon^2}E\left\|\begin{pmatrix}1\\X_i\end{pmatrix}\right\|\sup_{i=\overline{1,n}}\left\{\left|G(\hat{Y}_i)-\hat{G}(\hat{Y}_i)\right|\right\}\to 0,n\to\infty,$$

де $\varepsilon:=\varepsilon(\delta_n)=\inf_{t\le C-\delta_n}G(t)$. Останній множник прямує до нуля тому що з наслідку 1.2. у статті [6] випливає збіжність $\sup_{i=\overline{1,n}}\left\{\left|G(\hat{Y}_i)-\hat{G}(\hat{Y}_i)\right|\right\}\to 0,n\to\infty$. Послідовність додатних чисел $\{\delta_n,n\ge1\}$ прямує до нуля таким чином, щоб $\varepsilon^{-2}(\delta_n)\cdot\sup_{i=\overline{1,n}}\left\{\left|G(\hat{Y}_i)-\hat{G}(\hat{Y}_i)\right|\right\}\to 0$, $n\to\infty$ за ймовірністю. Що і доводить теорему 3.

1. *Augustin, T.* Survival analysis under measurement error. – Habilitations-Schrift. Universität München, 2002. 2. *Fazekas, I., Kukush*, A. Asymptotic properties of an estimator in nonlinear functional errors-in-variables models with dependent error terms // Computers Math. Applic. – 1997 – Vol. 34, No. 10, pp. 23–39. 3. *Heyde, C.* Quasi-Likelihood and its application. – Springer series in statistics, 1997. – 172 p. 4. *Kukush,A., Schneeweiss, H.,* A comparison of asymptotic covariance matrices of adjusted least square and structural least squares in error ridden polynomial regression // Sonderforschungsbereich 386, Paper 218, 2000. 5. *Pfanzagl, G.* On the measurability and consistency of minimum contrast estimates // Metrika – 1969. – 14, pp. 249–273. 6. *Stute W.* The central limit theorem under random censorship // Ann. Stat. – 1995. – Vol. 23 , No. 2, – pp. 422–439.

Підтримано грантом SI-01424/2007 від Шведського Інституту.

Надійшла до редколегії 17.11.08

УДК № 517.977

А. Сукретна, канд. фіз.-мат. наук
sukretna@gmail.com

НАБЛИЖЕНИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ОБМЕЖЕНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ПРОЦЕСУ

Для задачі оптимального керування для параболічного рівняння зі швидко осцилюючими коефіцієнтами, у випадку керування, що сходить з обмеження, побудовано і обґрунтовано наближене усереднене керування у формі зворотного зв'язку.

For the problem of optimal control for a parabolic equation with rapidly oscillating coefficients in the case of control, which is going down from restriction, we construct and motivate approximate homogeneous control in the form of reverse connection.

1. Вступ

Задача побудови оптимального синтезу для нескінченновимірних динамічних систем є актуальною проблемою в теорії оптимального керування. Незважаючи на те, що керування практично всіма виробничими системами здійснюється за принципом зворотного зв'язку, проблема побудови обмежених оптимальних синтезованих керувань для нескінченновимірних динамічних систем ще далека від свого остаточного розв'язання. З практичної точки зору синтезоване керування має переваги над програмним, адже дозволяє здійснювати більш гнучке управління системою. Повний розв'язок задачі для випадку розподіленого керування без обмежень отримано в [2, 6]. Проте природна умова обмеженості керувань в таких системах значно ускладнює задачу. Крім того, нерегулярна залежність коефіцієнтів задачі від малого параметру (що пов'язана з неоднорідністю середовищ, в яких відбуваються досліджувані процеси) також додає певних складнощів, насамперед обчислювального характеру.

В даній роботі для параболічної крайової задачі зі швидко осцилюючими коефіцієнтами і спеціальним напіввизначеним критерієм якості побудовано усереднене наближене обмежене керування за принципом зворотного зв'язку у випадку, коли керування сходить з обмежень. Аналогічні питання, але без швидкоосцилюючих коефіцієнтів, розглянуті в [5], випадок виходу керування на обмеження розглянуто в [7].

Робота виконана за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень.

2. Постановка задачі

Нехай $\Omega \subset R^n$ – обмежена область з гладкою межею і для $\varepsilon \in (0,1)$ керований процес в циліндрі $\bar{Q}_T = [0,T]\times\bar{\Omega}$ описується крайовою задачею

$$\begin{cases} y_t^\varepsilon(x,t) = A^\varepsilon(y^\varepsilon(x,t)) + g^\varepsilon(x)v(t), \quad (t,x)\in Q_T, \\ y^\varepsilon(x,t) = 0, \quad x\in\partial\Omega,\ t\in[0,T], \\ y^\varepsilon(x,0) = y_0(x), \quad x\in\bar{\Omega}; \end{cases} \tag{11}$$

де $A^\varepsilon := div(a^\varepsilon\vec{\nabla})$, $a^\varepsilon(x) = ((a_{ij}^\varepsilon(x)))_{i,j=1}^n = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ вимірна симетрична матриця, яка задовольняє умови рівномірної еліптичності й обмеженості, $g^\varepsilon \in L_2(\Omega)$, $g^\varepsilon(x) = g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, $a(x)$ та $g(x)$ – 1-періодичні матриця і функція відповідно, ε – малий параметр.

На керування накладено локальні обмеження

$$v(\cdot)\in U = \{v\in L_2([0,T]) : |v(t)|\le \xi \ \ м.с. \ \ на \ \ [0;T]\}. \tag{12}$$

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб на розв'язках (1) при $v(\cdot)\in U$ мінімізувати напіввизначений критерій якості

$$J^\varepsilon(v) = \left(\int_\Omega q(x)y^\varepsilon(x,T)dx\right)^2 + \gamma\int_0^T v^2(t)dt, \tag{13}$$

де $q\in L_2(\Omega)$, $\gamma > 0$.

В роботі [4] при деяких додаткових обмеженнях на функції g^ε та q виписано явні формули для синтезованого оптимального керування задачі (1) – (3). Проте ці формули містять нескінченні ряди, побудовані за коефіцієнтами Фур'є вихідних функцій g^ε, y_0, q та власними значеннями оператора A^ε. Крім того, згадані формули залежать від малого параметру ε, входження якого, як правило, нерегулярне. Вказані вище обставини суттєво ускладнюють практичне застосування цих результатів.