1. *Augustin, T.* Survival analysis under measurement error. – Habilitations-Schrift. Universität München, 2002. 2. *Fazekas, I., Kukush*, A. Asymptotic properties of an estimator in nonlinear functional errors-in-variables models with dependent error terms // Computers Math. Applic. – 1997 – Vol. 34, No. 10, pp. 23–39. 3. *Heyde, C.* Quasi-Likelihood and its application. – Springer series in statistics, 1997. – 172 p. 4. *Kukush,A., Schneeweiss, H.,* A comparison of asymptotic covariance matrices of adjusted least square and structural least squares in error ridden polynomial regression // Sonderforschungsbereich 386, Paper 218, 2000. 5. *Pfanzagl, G.* On the measurability and consistency of minimum contrast estimates // Metrika – 1969. – 14, pp. 249–273. 6. *Stute W.* The central limit theorem under random censorship // Ann. Stat. – 1995. – Vol. 23 , No. 2, – pp. 422–439.

Підтримано грантом SI-01424/2007 від Шведського Інституту.

Надійшла до редколегії 17.11.08

УДК № 517.977

А. Сукретна, канд. фіз.-мат. наук
sukretna@gmail.com

НАБЛИЖЕНИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ОБМЕЖЕНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ПРОЦЕСУ

Для задачі оптимального керування для параболічного рівняння зі швидко осцилюючими коефіцієнтами, у випадку керування, що сходить з обмеження, побудовано і обґрунтовано наближене усереднене керування у формі зворотного зв'язку.

For the problem of optimal control for a parabolic equation with rapidly oscillating coefficients in the case of control, which is going down from restriction, we construct and motivate approximate homogeneous control in the form of reverse connection.

1. Вступ

Задача побудови оптимального синтезу для нескінченновимірних динамічних систем є актуальною проблемою в теорії оптимального керування. Незважаючи на те, що керування практично всіма виробничими системами здійснюється за принципом зворотного зв'язку, проблема побудови обмежених оптимальних синтезованих керувань для нескінченновимірних динамічних систем ще далека від свого остаточного розв'язання. З практичної точки зору синтезоване керування має переваги над програмним, адже дозволяє здійснювати більш гнучке управління системою. Повний розв'язок задачі для випадку розподіленого керування без обмежень отримано в [2, 6]. Проте природна умова обмеженості керувань в таких системах значно ускладнює задачу. Крім того, нерегулярна залежність коефіцієнтів задачі від малого параметру (що пов'язана з неоднорідністю середовищ, в яких відбуваються досліджувані процеси) також додає певних складнощів, насамперед обчислювального характеру.

В даній роботі для параболічної крайової задачі зі швидко осцилюючими коефіцієнтами і спеціальним напіввизначеним критерієм якості побудовано усереднене наближене обмежене керування за принципом зворотного зв'язку у випадку, коли керування сходить з обмежень. Аналогічні питання, але без швидкоосцилюючих коефіцієнтів, розглянуті в [5], випадок виходу керування на обмеження розглянуто в [7].

Робота виконана за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень.

2. Постановка задачі

Нехай $\Omega \subset R^n$ – обмежена область з гладкою межею і для $\varepsilon \in (0,1)$ керований процес в циліндрі $\bar{Q}_T = [0,T]\times\bar{\Omega}$ описується крайовою задачею

$$\begin{cases} y_t^\varepsilon(x,t) = A^\varepsilon(y^\varepsilon(x,t)) + g^\varepsilon(x)v(t), & (t,x)\in Q_T, \\ y^\varepsilon(x,t) = 0, \quad x\in\partial\Omega,\ t\in[0,T], \\ y^\varepsilon(x,0) = y_0(x), & x\in\bar{\Omega}; \end{cases} \tag{11}$$

де $A^\varepsilon := div(a^\varepsilon\vec{\nabla})$, $a^\varepsilon(x) = ((a_{ij}^\varepsilon(x)))_{i,j=1}^n = a\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ вимірна симетрична матриця, яка задовольняє умови рівномірної еліптичності й обмеженості, $g^\varepsilon \in L_2(\Omega)$, $g^\varepsilon(x) = g\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, $a(x)$ та $g(x)$ – 1-періодичні матриця і функція відповідно, ε – малий параметр.

На керування накладено локальні обмеження

$$v(\cdot)\in U = \{v\in L_2([0,T]) : |v(t)|\le \xi \ \text{ м.с. на } [0;T]\}. \tag{12}$$

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб на розв'язках (1) при $v(\cdot)\in U$ мінімізувати напіввизначений критерій якості

$$J^\varepsilon(v) = \left(\int_\Omega q(x)y^\varepsilon(x,T)dx\right)^2 + \gamma\int_0^T v^2(t)dt, \tag{13}$$

де $q \in L_2(\Omega)$, $\gamma > 0$.

В роботі [4] при деяких додаткових обмеженнях на функції g^ε та q виписано явні формули для синтезованого оптимального керування задачі (1) – (3). Проте ці формули містять нескінченні ряди, побудовані за коефіцієнтами Фур'є вихідних функцій g^ε, y_0, q та власними значеннями оператора A^ε. Крім того, згадані формули залежать від малого параметру ε, входження якого, як правило, нерегулярне. Вказані вище обставини суттєво ускладнюють практичне застосування цих результатів.

Мета даної роботи – на базі точної формули для синтезованого оптимального керування $u^{\varepsilon}[t,y^{\varepsilon}]$ задачі (1) – (3) (тобто керування в формі оберненого зв'язку $u^{\varepsilon}[t,y^{\varepsilon}]$, яке б при підстановці в (1) – (3) замість $v(t)$ мінімізувало заданий критерій якості), у випадку сходження керування з обмежень, побудувати наближене і певним чином усереднене керування та довести близькість отриманого керування $v_n[t,z_n^{\varepsilon}]$ до точного $u^{\varepsilon}[t,y^{\varepsilon}]$, а також близькість значень $J^{\varepsilon}(v_n[t,z_n^{\varepsilon}])$ и $J^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}[t,y^{\varepsilon}])$.

3. Побудова наближеного усередненого синтезованого керування задачі (1) – (3)

Відомо, що при кожному фіксованому керуванні $v\in U$ задача (1) має єдиний розв'язок в класі $C([0,T];H_0^1)$ [1]. Крім того, задача оптимального керування (1) – (3) має єдиний розв'язок $v^{\varepsilon}(\cdot)\in U$ [6].

Неважко переконатися, що для розв'язків задачі (1) при довільному керуванні $v\in U$, для кожного значення параметру $\varepsilon\in(0;1)$ та для всіх $t\in[0;T]$ справедливі оцінки

$$\| y^{\varepsilon}(t)\|^2\le 2\left(\| y_0\|^2+\frac{1}{\left(\lambda_1^{\varepsilon}\right)^4}\| g^{\varepsilon}\|^2 \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0;T]}|v(t)|^2\right),\qquad \| y_t^{\varepsilon}(t)\|^2\le 3\left(\| y_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}+2\| g^{\varepsilon}\|^2 \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0;T]}|v(t)|^2\right),\tag{14}$$

де тут і надалі $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(\Omega)$.

Розглянемо спектральну задачу

$$\begin{cases} A^{\varepsilon}X+\mu X=0, & x\in\Omega,\\ X|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}\tag{15}$$

Тоді з урахуванням умови рівномірної еліптичності та [1] спектральна задача (5) при кожному $\varepsilon\in(0;1)$ має власні числа $0<(\lambda_1^{\varepsilon})^2\le(\lambda_2^{\varepsilon})^2\le\ldots$, $(\lambda_n^{\varepsilon})^2\to\infty$ при $n\to\infty$, і власні функції $\{X_i^{\varepsilon}(x)\}_{i=1}^{\infty}\subset H_0^1(\Omega)$, що утворюють ортонормований в $L_2(\Omega)$ та ортогональний в $H_0^1(\Omega)$ базис.

Поряд з оператором A^{ε} введемо усереднений оператор $A:=div(a^0\vec{\nabla})$, де a^0 – усереднена до $a^{\varepsilon}(x)$ матриця [3].

Нехай $\{(\lambda_i^0)^2\}_{i=1}^{\infty}$ та $\{X_i^0(x)\}_{i=1}^{\infty}\subset H_0^1(\Omega)$ відповідно власні значення і власні функції спектральної задачі (5) з оператором A^0, причому будемо вимагати, щоб відповідні власні значення були простими, g^0 – середнє значення функції $g(x)$. Тоді відомо [3], що мають місце оцінки

$$|(\lambda_k^{\varepsilon})^2-(\lambda_k^0)^2|\le c_k\varepsilon,\quad \| X_k^{\varepsilon}-X_k^0\|\le C_k\varepsilon,\quad k\ge 1,\tag{16}$$

та $g^{\varepsilon}\to g^0$, $\varepsilon\to 0$ слабко в $L_2(\Omega)$. Звідси легко отримуємо, що

$$g_i^{\varepsilon}=(g^{\varepsilon},X_i^{\varepsilon})\to(g^0,X_i^0)=g_i^0,\quad q_i^{\varepsilon}=(q,X_i^{\varepsilon})\to(q,X_i^0)=q_i^0\quad \textit{при}\quad \varepsilon\to 0,$$

де $(\cdot,\cdot)$ скалярний добуток в $L_2(\Omega)$.

При $\varepsilon\in[0;1)$ введемо наступні позначення

$$f^{\varepsilon}(t)=\sum_{i=1}^{\infty}e^{\left(\lambda_i^{\varepsilon}\right)^2(t-T)}q_i^{\varepsilon}g_i^{\varepsilon},\qquad \Re^{\varepsilon}(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}q_i^{\varepsilon}e^{\left(\lambda_i^{\varepsilon}\right)^2(t-T)}X_i^{\varepsilon}(x),\tag{17}$$

причому перший ряд збігається рівномірно по $t\in[0,T]$, а другий в просторі $C([0,T];L_2)$.

Неважко переконатися в справедливості наступної леми [7].

Лема. *При кожному* $t\in[0;T]$ *мають місце збіжності при* $\varepsilon\to 0$

$$f^{\varepsilon}(t)\to f^0(t),\quad \|\Re^{\varepsilon}(\cdot,t)-\Re^0(\cdot,t)\|\to 0.\tag{18}$$

Розглянемо допоміжну "усереднену" до (1) – (3) задачу оптимального керування

$$\begin{cases} y_t^0(x,t)=A^0(y^0(x,t))+g^0v(t), & (t,x)\in Q_T,\\ y^0(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t\in[0,T],\\ y^0(x,0)=y_0(x), & x\in\bar{\Omega};\end{cases}$$

$$v(\cdot)\in U=\{v\in L_2([0,T]):\ |v(t)|\le\xi\ \ \textit{м.с. на}\ [0;T]\},\tag{9}$$

$$J^0(v)=\left(\int_{\Omega}q(x)y^0(x,T)dx\right)^2+\gamma\int_0^T v^2(t)dt.$$

Відмітимо, що задача оптимального керування (9) має єдиний розв'язок $v^0\in U$, крім того, при довільному фіксованому керуванні $v\in U$ для розв'язку крайової задачі (9) справедливі оцінки типу (4).

Надалі будемо вважати дані (1) – (3) та (9) такими, що виконані наступні припущення.

Припущення 1: *При довільному значенні параметра* $\varepsilon \in [0;1)$ *функція* $f^{\varepsilon}(t)$ *додатна і строго монотонно спадає на* $[0;T]$.

Припущення 2: *При кожному* $\varepsilon \in [0;1)$ *виконуються нерівності*

$$\frac{\left(\Re^{\varepsilon}(\cdot,0), y_0\right) f^{\varepsilon}(0)}{\gamma + \int\limits_0^T \left(f^{\varepsilon}(s)\right)^2 ds} < -\xi, \qquad \frac{\left(\Re^{\varepsilon}(\cdot,0), y_0\right) f^{\varepsilon}(T)}{\gamma + \int\limits_0^T \left(f^{\varepsilon}(s)\right)^2 ds} > -\xi, \qquad \left(\Re^{\varepsilon}(\cdot,0), y_0\right) + \xi \int\limits_0^T f^{\varepsilon}(s) ds < 0.$$

При виконанні припущень 1,2 для довільного $\varepsilon \in [0;1)$ оптимальне керування задачі (9), у випадку $\varepsilon = 0$, та задачі (1) – (3), у випадку $\varepsilon > 0$, набуває вигляду

$$u^{\varepsilon}[t, y^{\varepsilon}] = \begin{cases} \xi, & t \in [0, \tau^{\varepsilon}], \\ -\dfrac{\left(\Re^{\varepsilon}(t), y^{\varepsilon}(t)\right) f^{\varepsilon}(t)}{\gamma + \int\limits_t^T (f^{\varepsilon}(s))^2 ds}, & t \in [\tau^{\varepsilon}, T], \end{cases} \tag{10}$$

де $y^{\varepsilon}(x,t)$ – розв'язок крайових задач (9) та (1) відповідно з керуванням (10), а точка переключення τ^{ε} – єдиний розв'язок рівняння

$$\frac{\left(\Re^{\varepsilon}(0), y_0\right) + \xi \int\limits_0^{\tau^{\varepsilon}} f^{\varepsilon}(s) ds}{\gamma + \int\limits_{\tau^{\varepsilon}}^T (f^{\varepsilon}(s))^2 ds} f(\tau^{\varepsilon}) = -\xi. \tag{11}$$

Перейдемо до розв'язання задачі наближеного синтезу.

Для довільного $\varepsilon \in [0;1)$ та $n \in N$ введемо позначення

$$f_n^{\varepsilon}(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\left(\lambda_i^{\varepsilon}\right)^2 (t-T)} q_i^{\varepsilon} g_i^{\varepsilon}, \qquad \Re_n^{\varepsilon}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} q_i^{\varepsilon} e^{\left(\lambda_i^{\varepsilon}\right)^2 (t-T)} X_i^{\varepsilon}(x).$$

Будемо вимагати виконання наступного припущення.

Припущення 3: *При довільному значенні параметра* $\varepsilon \in [0;1)$ *функція* $f_n^{\varepsilon}(t)$ *додатна і строго монотонно спадає на* $[0;T]$.

Нехай тепер $(10)_n$, $(11)_n$ – це формули (10), (11), в яких всі входження $f^{\varepsilon}(t)$ і $\Re^{\varepsilon}(x,t)$ замінені на $f_n^{\varepsilon}(t)$ і $\Re_n^{\varepsilon}(x,t)$ відповідно, τ_n^{ε} – відповідна точка переключення.

Тоді можна довести, що формально збудований закон $(10)_n$ – $(11)_n$ є законом оптимального керування для задач (9) при $\varepsilon = 0$ та (1) – (3) при $\varepsilon > 0$ з функціоналом J^{ε}, в якому функція $q(x)$ замінена на функцію $q_n(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i^{\varepsilon} X_i^{\varepsilon}(x)$, причому при кожному $n \in N$ точка τ_n^{ε} визначається єдиним чином і для довільного $\varepsilon \in [0;1)$ має місце збіжність $\tau_n^{\varepsilon} \to \tau^{\varepsilon}$, $n \to \infty$.

Тепер побудуємо і обґрунтуємо закон наближеного усередненого синтезу для задачі (1) – (3), причому основною метою є доведення близькості значень критерію якості (3) на точному і побудованому керуваннях.

Надалі основним об'єктом нашого дослідження буде наближене усереднене керування, що має вигляд

$$v_n[t, z_n^{\varepsilon}] = \begin{cases} \xi, & t \in [0, \tau_n^0], \\ -\dfrac{\left(\Re_n^0(t), z_n^{\varepsilon}(t)\right) f_n^0(t)}{\gamma + \int\limits_t^T (f_n^0(s))^2 ds}, & t \in [\tau_n^0, T], \end{cases} \tag{12}$$

де $z_n^{\varepsilon}(x,t)$ – розв'язок задачі (1) з керуванням (10), τ_n^0 – точка переключення, яка є розв'язком рівняння $(11)_n$ при $\varepsilon = 0$.

Зауваження. Керування (12) не є, взагалі кажучи, неперервним в точці $t = \tau_n^0$.

4. Коректність запропонованого керування

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема. *Нехай* g^{ε}, $q \in L_2(\Omega)$, $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ *та виконані припущення 1 – 3. Тоді для довільного малого* $\eta > 0$ *існують* $n_0 \in N$ *і* $\varepsilon_0 > 0$ *такі, що для будь-яких* $n \ge n_0$ *та* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *для керувань (10), (12) виконуються нерівності:*

$$\| v_n[\cdot, z_n^\varepsilon] - u^\varepsilon[\cdot, y^\varepsilon] \|_{L_2([0,T])} < \eta, \qquad | J^\varepsilon(v_n[t, z_n^\varepsilon]) - J^\varepsilon(u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]) | < \eta. \tag{13}$$

Доведення.

1. Доведемо, що $v_n[\,\cdot\,, z_n^\varepsilon] \to v^0[\,\cdot\,, z^\varepsilon]$, $n \to \infty$ в $L_2([0,T])$ рівномірно по $\varepsilon \in (0;1)$, де $v^0[t, \cdot\,]$ має форму (10) при $\varepsilon = 0$, а z^ε – розв'язок задачі (1) з керуванням $v^0[t, z^\varepsilon]$. Для цього оцінимо $D = \left\| v_n[\,\cdot\,, z_n^\varepsilon] - v^0[\,\cdot, z^\varepsilon] \right\|^2_{L_2([0,T])} = \int_0^T | v_n[t, z_n^\varepsilon] - v^0[t, z^\varepsilon] |^2 \, dt.$

Зафіксуємо довільне достатньо мале $\eta > 0$ і, беручи до уваги той факт, що має місце збіжність точок переключення відповідних керувань, виберемо $n_1 \in N$ таким чином, аби для всіх $n \ge n_1$ виконувалася нерівність $| \tau_n^0 - \tau^0 | < \dfrac{\eta^2}{144\xi^2}$. Далі розіб'ємо проміжок інтегрування в D на три проміжки: $\left[0; \tau - \dfrac{\eta}{144\xi}\right]$, $\left[\tau^0 - \dfrac{\eta^2}{144\xi^2}; \tau^0 + \dfrac{\eta^2}{144\xi^2}\right]$, $\left[\tau^0 + \dfrac{\eta^2}{144\xi^2}; T\right]$. Тоді $D = D_1 + D_2 + D_3$, де $D_1 = \int_0^{\tau^0 - \frac{\eta^2}{144\xi^2}} | u_n[t, z_n^\varepsilon] - u^0[t, z^\varepsilon] |^2 \, dt = 0,$

$$D_2 = \int_{\tau^0 - \frac{\eta^2}{144\xi^2}}^{\tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}} | u_n[t, z_n^\varepsilon] - u^0[t, z^\varepsilon] |^2 \, dt < 4\xi^2 \cdot 2 \cdot \frac{\eta^2}{144\xi^2} = \frac{\eta^2}{18}, \quad D_3 = \int_{\tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}}^{T} | u_n[t, z_n^\varepsilon] - u^0[t, z^\varepsilon] |^2 \, dt.$$

Тепер покажемо, що $v_n[t, z_n^\varepsilon] \to v^0[t, z^\varepsilon]$, $n \to \infty$ рівномірно по $\varepsilon \in (0;1)$ при кожному $t \in \left[\tau^0 + \dfrac{\eta^2}{144\xi^2}; T\right]$.

Для довільного $t \in \left[\tau^0 + \dfrac{\eta^2}{144\xi^2}; T\right]$ оцінимо

$$| v_n[t, z_n^\varepsilon] - v^0[t, z^\varepsilon] | = \left| \frac{\left(\Re^0(t), z^\varepsilon(t)\right) f^0(t)}{\gamma + \int_t^T \left(f^0(s)\right)^2 ds} - \frac{\left(\Re_n^0(t), z_n^\varepsilon(t)\right) f_n^0(t)}{\gamma + \int_t^T \left(f_n^0(s)\right)^2 ds} \right| \le$$

$$\le \left\| \frac{\Re^0(t) f^0(t)}{\gamma + \int_t^T \left(f^0(s)\right)^2 ds} \right\| \cdot \left\| z^\varepsilon(t) - z_n^\varepsilon(t) \right\| + \left\| \frac{\Re^0(t) f^0(t)}{\gamma + \int_t^T \left(f^0(s)\right)^2 ds} - \frac{\Re_n^0(t) f_n^0(t)}{\gamma + \int_t^T \left(f_n^0(s)\right)^2 ds} \right\| \cdot \left\| z_n^\varepsilon(t) \right\| \le \kappa \left\| z^\varepsilon(t) - z_n^\varepsilon(t) \right\| + \alpha_n. \tag{14}$$

де внаслідок леми та оцінок (4) $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$ при кожному $t \in \left[\tau^0 + \dfrac{\eta^2}{144\xi^2};\ T\right]$ і не залежить від ε, а κ – стала.

Для завершення доведення рівномірної по ε збіжності відповідних керувань покажемо, що $\| \omega_n^\varepsilon(t) \| = \| z^\varepsilon(t) - z_n^\varepsilon(t) \| \to 0$ при $n \to \infty$ при кожному $t \in \left[\tau^0 + \dfrac{\eta^2}{144\xi^2};\ T\right]$ рівномірно по ε.

Зауважимо, що $\omega_n^\varepsilon(x,t)$ при $t \in [0,T]$ є розв'язком наступної крайової задачі

$$\begin{cases} \omega_{nt}^\varepsilon(x,t) = A^\varepsilon(\omega_n^\varepsilon(x,t)) + g^\varepsilon(x)(v^0[t, z^\varepsilon] - v_n[t, z_n^\varepsilon]), & (t,x) \in Q_T, \\ \omega_n^\varepsilon(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \ t \in [0,T], \\ \omega_n^\varepsilon(x,t_0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \end{cases} \tag{15}$$

Розкладаючи функції задачі (15) в ряди Фур'є за системою $\{X_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$, для коефіцієнтів Фур'є $\omega_i(t)$ розв'язку крайової задачі $\omega_n^\varepsilon(x,t)$ отримуємо задачу Коші

$$\begin{cases} \dot{\omega}_i = -(\lambda_i^\varepsilon)^2 \omega_i + g_i^\varepsilon (v^0[t, z^\varepsilon] - v_n[t, z_n^\varepsilon]), \\ \omega_i(0) = 0. \end{cases}$$

Звідси $\omega_i^2(t) \le \dfrac{(g_i^\varepsilon)^2}{2(\lambda_i^\varepsilon)^2} \int_0^t (v^0[s, z^\varepsilon] - v_n[s, z_n^\varepsilon])^2 ds$, тому, $\| \omega_n^\varepsilon(t) \|^2 \le \dfrac{\| g^\varepsilon \|^2}{2(\lambda_1^\varepsilon)^2} \int_0^t (v^0[s, z^\varepsilon] - v_n[s, z_n^\varepsilon])^2 ds, \quad t \in [0,T].$

Далі, оскільки ми вже встановили близькість $v^0[t,z^\varepsilon]$ і $v_n[t,z_n^\varepsilon]$ в просторі $L_2\left(\left[0,\ \tau^0-\frac{\eta^2}{144\xi^2}\right]\right)$, то, використовуючи (14), для $t\in\left[\tau^0+\frac{\eta^2}{144\xi^2};\ T\right]$ маємо оцінку $\|\omega_n^\varepsilon(t)\|^2\le\beta_n+\mathrm{K}\int\limits_{\tau^0+\frac{\eta^2}{144\xi^2}}^{t}\|\omega_n^\varepsilon(t)\|^2\,ds$, де $\mathrm{K}=const$, а $\beta_n\to 0$ при $n\to\infty$ і ці стала та послідовність не залежать від ε.

Звідки за нерівністю Гронуолла – Беллмана знаходимо, що при кожному $t\in\left[\tau^0+\frac{\eta^2}{144\xi^2};\ T\right]$ $\|\omega_n^\varepsilon(t)\|^2\to 0,\quad n\to\infty$ рівномірно по ε.

Таким чином, $v_n[t,z_n^\varepsilon]\to v^0[t,z^\varepsilon],\quad n\to\infty$ рівномірно по $\varepsilon\in(0;1)$ при кожному $t\in\left[\tau^0+\frac{\eta^2}{144\xi^2};\ T\right]$, а отже

$$\forall\eta>0\quad\exists N_2\ge N_1\quad\forall n\ge N_2\quad\forall\varepsilon\in(0;1)\quad\|v_n[\,\cdot,z_n^\varepsilon]-v^0[\,\cdot,z^\varepsilon]\|_{L_2(0,T)}<\frac{\eta}{3}\tag{16}$$

2. Доведемо, що $v^0[t,z^\varepsilon]\to u^0[t,y^0],\ \varepsilon\to 0$ при кожному $t\in[0,T]$, де $u^0[t,y^0]$ задається формулою (10) при $\varepsilon=0$ і є оптимальним керуванням задачі (9) з точкою переключення τ^0.

Оскільки розглядувані керування мають спільну точку переключення τ^0, то досить довести вказану збіжність для довільного $t\in[\tau^0,T]$.

Враховуючи той факт, що $z^\varepsilon(x,t)$ розв'язок задачі (1) з відповідним керуванням, і що для розв'язків крайової задачі (1) мають місце оцінки (4), отримуємо, що $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in[0;\tau^0]}\left\{\|z^\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}+\|z_t^\varepsilon(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right\}\le K$, де $K>0$ деяка стала, що не залежить від ε.

Тоді з леми про компактність випливає існування такої функції $z^0=z^0(x,t)$, що для деякої підпослідовності для всіх $t\in[\tau^0;T]$ мають місце збіжності

$$\begin{gathered}z^\varepsilon(t)\to z^0(t),\ \varepsilon\to 0\ \textit{сильно в}\ L_2(\Omega),\qquad z^\varepsilon(t)\to z^0(t),\ \varepsilon\to 0\ \textit{слабко в}\ H_0^1(\Omega),\\ z_t^\varepsilon(t)\to z_t^0(t),\ \varepsilon\to 0\ \textit{слабко в}\ H^{-1}(\Omega).\end{gathered}\tag{17}$$

Оскільки внаслідок (17) $z^\varepsilon(t)\to z^0(t),\ \ \varepsilon\to 0$ слабко в $L_2(\Omega)$, то при кожному $t\in[\tau^0;T]$: $v_0[t,z^\varepsilon]\to v_0[t,z^0]$ при $\varepsilon\to 0$ по тій же підпослідовності. А тому $g^\varepsilon(x)v_0[t,z^\varepsilon]\to g^0v_0[t,z^0]$ при $\varepsilon\to 0$ слабко в $L_2(\Omega)$ для всіх $t\in[\tau^0;T]$:. Остання обставина дозволяє перейти до границі при $\varepsilon\to 0$ в задачі Коші для коефіцієнтів Фур'є розкладу функції $z^\varepsilon(x,t)$ за базисом $\{X_i^\varepsilon(x)\}_{i=1}^\infty$:

$$\begin{cases}\dot z_i^\varepsilon=-(\lambda_i^\varepsilon)^2z_i^\varepsilon+g_i^\varepsilon v^0[t,z^\varepsilon],\\ z_i^\varepsilon(0)=y_i^\varepsilon;\end{cases}\quad\to\quad\begin{cases}\dot z_i^0=-(\lambda_i^0)^2z_i^0+g_i^0v^0[t,z^0],\\ z_i^0(0)=y_i^0.\end{cases}$$

А це означає, що $p(x,t)=\sum\limits_{i=1}^\infty z_i^0(t)X_i^0(x)$ єдиний розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases}p_t=A^0(p)+g^0v^0[t,z^0],\\ p|_{\partial\Omega}=0,\quad p|_{t=0}=y_0.\end{cases}\tag{18}$$

Покажемо тепер, що $p\equiv z^0$. Для цього оцінимо при кожному $t\in[\tau^0;T]$:

$$\|z^\varepsilon(t)-p(t)\|=\left\|\sum_{i=1}^\infty(z_i^\varepsilon(t)X_i^\varepsilon(\cdot)-z_i^0(t)X_i^0(\cdot))\right\|\le\left\|\sum_{i=1}^{n_3-1}(z_i^\varepsilon(t)X_i^\varepsilon(\cdot)-z_i^0(t)X_i^0(\cdot))\right\|+\left\|\sum_{i=n_3}^{\infty}(z_i^\varepsilon(t)X_i^\varepsilon(\cdot)-z_i^0(t)X_i^0(\cdot))\right\|=I_1+I_2$$

при кожному фіксованому $n_3\ge 2$.

Оскільки для довільного $t\in[\tau^0;T]$: $z^\varepsilon(t)\to z^0(t),\ \varepsilon\to 0$ в $L_2(\Omega)$ по підпослідовності та $X_i^\varepsilon\to X_i^0,\ \ \varepsilon\to 0$ в $L_2(\Omega)$ для всіх $i\in N$, то $I_1\to 0,\ \varepsilon\to 0$ по цій підпослідовності.

Оцінимо I_2. Для кожного фіксованого $n_3\ge 2$ виберемо з урахуванням (6) таке $\varepsilon_1>0$, щоб для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$ виконувалися нерівності $0<(\lambda_{n_3}^0)^2-1<(\lambda_{n_3}^0)^2-c_{n_3}\varepsilon<(\lambda_{n_3}^\varepsilon)^2\quad\textit{та}\quad\|g^\varepsilon\|\le 2\|g^0\|$.

Крім того, неважко помітити, що для $z_i^\varepsilon(t)$ і $z_i^0(t)$, як для розв'язків вищезгаданих задач Коші, справедливі оцінки $(z_i^\varepsilon(t))^2 \le 2(y_i^{0\varepsilon})^2 e^{-(\lambda_i^\varepsilon)^2 t} + 2\frac{(g_i^\varepsilon)^2}{(\lambda_i^\varepsilon)^2}\left(1-e^{-(\lambda_i^\varepsilon)^2 t}\right)$, $(z_i^0(t))^2 \le 2(y_i^{00})^2 e^{-(\lambda_i^0)^2 t} + 2\frac{(g_i^0)^2}{(\lambda_i^0)^2}\left(1-e^{-(\lambda_i^0)^2 t}\right)$, де $y_i^{0\varepsilon}$ та y_i^{00} коефіцієнти Фур'є при розкладі функції $y_0(x)$ за ортонормованими базисами $\{X_i^\varepsilon(x)\}_{i=1}^\infty$ та $\{X_i^0(x)\}_{i=1}^\infty$ відповідно. Тоді $I_2^2 \le \sum_{i=n_3}^{\infty}\left((z_i^\varepsilon(t))^2 + (z_i^0(t))^2\right) \le 4\,\|\, y_0 \,\|^2\, e^{-((\lambda_{n_3}^0)^2-1)t} + \frac{6\,\|\, g^0 \,\|^2}{(\lambda_{n_3}^0)^2-1} \to 0, \quad n_3 \to \infty.$

Тоді отримуємо, що

$$\forall \zeta > 0 \;\; \exists n_3 \ge n_2 \;\; \exists \tilde\varepsilon > 0 \;\; \forall \varepsilon \in (0,\tilde\varepsilon) \;\; \forall t \in [\tau_0; T]$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_3-1} (z_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x) - z_i^0(t) X_i^0(x)) \right\| < \frac{\zeta}{2}, \quad \left\| \sum_{i=n_3}^{\infty} (z_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x) - z_i^0(t) X_i^0(x)) \right\| < \frac{\zeta}{2},$$

звідси $z^\varepsilon(t) \to p(t)$ при $t \in [\tau^0; T]$ в $L_2(\Omega)$, а отже, $p \equiv z^0$ в силу єдиності границі. Таким чином, z^0 розв'язок задачі (18) з керуванням $v^0[t, z^0]$, а тому з єдиності розв'язку крайової задачі маємо, що $z^0 \equiv y^0$ і при кожному $t \in [\tau^0; T]$ збіжність $z^\varepsilon \to y^0$ іде по всій послідовності $\varepsilon \to 0$.

Остаточно отримуємо, що для всіх $t \in [\tau^0; T]$ (а значить і для всіх $t \in [0; T]$) $v^0[t, z^\varepsilon] \to u^0[t, y^0]$ при $\varepsilon \to 0$, а тому

$$\forall \eta > 0 \quad \exists n_3 \ge n_2 \quad \exists \varepsilon_1 > 0 \quad \forall n \ge n_3 \quad \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_1) \quad \|\, v^0[\,\cdot\,, z^\varepsilon] - u^0[\,\cdot\,, y^0]\,\|_{L_2(0,T)} < \frac{\eta}{3}. \tag{19}$$

3. Доведемо, що $\|\, u^\varepsilon[\,\cdot, y^\varepsilon] - u^0[\,\cdot\,, y^0]\,\|_{L_2([0,T])} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$

Використовуючи міркування пункту 1 даного доведення і збіжність $\tau^\varepsilon \to \tau^0,\ \varepsilon \to \infty$, достатньо переконатися, що $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon] \to u^0[t, y^0]$ при $\varepsilon \to 0$ для кожного $t \in \left[\tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}; T\right]$.

Для доведення цього факту застосуємо метод, ужитий при доведенні пункту 2. Всі викладки, проведені тут, можуть бути повторені і у випадку керування $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]$, якщо переконатися у можливості граничного переходу у рівнянні $y_i^\varepsilon(t) = y_i^{0\varepsilon} + \int_0^t \left(-(\lambda_i^\varepsilon)^2 y_i^\varepsilon(s) + g_i^\varepsilon u^\varepsilon[s, y^\varepsilon]\right) ds,\ t \in \left[\tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}; T\right].$

Останнє легко випливає з твердження леми.

Таким чином

$$\forall \eta > 0 \;\; \exists n_3 \ge n_2 \;\; \exists \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \;\; \forall n \ge n_3 \;\; \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_2) \quad \|\, u^\varepsilon[\cdot\,, y^\varepsilon] - u^0[\,\cdot, y^0]\,\|_{L_2([0,T])} < \frac{\eta}{3}. \tag{20}$$

Зі співвідношень (16), (19), (20) легко отримуємо, що

$$\forall \eta > 0 \;\; \exists n_3 \in N \;\; \exists \varepsilon_2 \in (0,1) \;\; \forall n \ge n_3 \;\; \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_2) \quad \|\, u_n[\,\cdot\,, z_N^\varepsilon] - u^\varepsilon[\,\cdot, y^\varepsilon]\,\|_{L_2([0,T])} < \eta. \tag{21}$$

Звідси аналогічно доведенню пункту 1 отримуємо при кожному $t \in [0; T]$ близькість в $L_2(\Omega)$ розв'язків крайової задачі (1) з відповідними керуваннями, а отже, і близькість значень критеріїв якості на відповідних керуваннях, тобто

$$\forall \eta > 0 \;\; \exists n_4 \in N \;\; \exists \varepsilon_3 \in (0,1) \;\; \forall n \ge n_4 \;\; \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_3) \quad |\, J^\varepsilon(u_n[\,\cdot\,, z_n^\varepsilon]) - J^\varepsilon(u^\varepsilon[\,\cdot, y^\varepsilon])\,| < \eta. \tag{22}$$

З оцінок (21) – (22) очевидним чином маємо (13), покладаючи $n_0 = max\{n_3, n_4\}, \quad \varepsilon_0 = min\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.

Таким чином, теорема доведена.

Висновки: В роботі побудоване й обґрунтоване наближене усереднене синтезоване керування для параболічної крайової задачі зі швидко осцилюючими коефіцієнтами, у випадку, коли керування сходить з обмежень. Доведена збіжність побудованого наближеного керування до точного та близькість значень критеріїв якості на відповідних керуваннях.

1. *Temam R.* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. – New York, 1997. 2 *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М., 1978.. 3. *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.* Усреднение дифференциальных операторов. – М, 1993. 4. *Капустян Е.А., Наконечний А.Г.* Синтез оптимального ограниченного управления для параболической краевой задачи с быстро осциллирующими коэффициентами // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 6. – С. 44–57. 5. *Капустян О.А.* Наближений синтез оптимального обмеженого керування для параболічної крайової задачі // Укр. мат. журн. – 2004. – т. 56, № 10. – С. 1384–1394. 6. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М., 1972. 7. *Сукретна А.В., Капустян О.А.* Наближений усереднений синтез задачі оптимального керування для параболічного рівняння // Укр. мат. журн. – 2002. – т. 54, № 12. – С. 1704–1709.

Надійшла до редколегії 25.09.08