екстремуму якщо в цій точці $\Delta = \Delta_1\Delta_2 - \Delta_3^2 > 0$, причому в цій точці досягається умовний локальний мінімуму, якщо $\Delta_1 > 0$, і умовний локальний максимум, якщо $\Delta_1 < 0$.

5. Висновки. Отримано явні формули для перевірки достатніх умов локального умовного екстремуму в точці для випадку функцій двох і трьох змінних при наявності однієї та двох умов зв'язку, використання яких дозволяє зменшити обсяг обчислень.

1. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа: В 2 ч. – М., 2000. – Ч.1.

Надійшла до редколегії 09.10.08

УДК 517.9

Т. Тищук, студ.

НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕРІВНОСТІ $f(xy) \le f(x)f(y)$

Вивчено неперервні розв'язки нерівності $f(xy) \le f(x)f(y)$ і описано вигляд її розв'язків.

Continual solutions of inequality $f(xy) \le f(x)f(y)$ are studied and form of its solutions is described.

1. Вступ. При дослідженні низки задач про стійкість розв'язків диференціального рівняння з імпульсною дією [1] розглядаються функції, які задовольняють нерівність вигляду [2]:

$$f(xy) \le f(x)f(y), \tag{1}$$

де функція $f(x)$ визначена для $x \in [0;+\infty)$ і задовольняє умову

$$f(0) = 0, \quad f(x) \ge 0. \tag{2}$$

В даній статті вивчається питання про неперервні розв'язки нерівності (1). Функція $f(x)$ називається розв'язком нерівності (1), якщо ця функція визначена для всіх $x \in [0;+\infty)$, є неперервною і для всіх значень $x, y \in [0;+\infty)$ виконується нерівність (1).

2. Основна частина. Очевидно, що нерівність (1) має тривіальний розв'язок $f(0) = 0$, де $x \in [0;+\infty)$. Тому надалі розглядається питання про існування нетривіальних розв'язків нерівності (1).

Дослідимо спочатку питання про вигляд розв'язків рівняння

$$f(xy) = f(x)f(y). \tag{3}$$

В [3] встановлено, що єдиною (нетривіальною) функцією, визначеною і неперервною на $[0;+\infty)$ і такою, що задовольняє рівність (3) є степенева функція.

Очевидно, що нерівність (1) має більш широкий клас розв'язків, ніж рівняння (3). Наприклад, функція вигляду $f(x) = cx^\alpha$, $\alpha > 0$, у випадку $c \ge 1$ задовольняє нерівність (1) з умовою (2).

Справедлива наступна лема.

Лема 1. Нехай $\alpha, \gamma > 0$. Функція вигляду

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & 0 \le x \le 1, \\ x^\gamma & x > 1, \end{cases} \tag{4}$$

є розв'язком нерівності (1) тоді і лише тоді, коли виконується нерівність $\alpha \le \gamma$.

Доведення необхідності. Визначимо, для яких α, γ функція вигляду (4) є розв'язком нерівності (1). Нехай $\xi \in (0;1)$ – деяке фіксоване число, $\varepsilon > 0$ – довільне і мале. Тоді, враховуючи, що функція $f(x)$ вигляду (4) є розв'язком нерівності (1), маємо:

$$\xi^\alpha = f(\xi) = (\xi/1+\varepsilon)^\alpha (1+\varepsilon)^\alpha = f\left(\xi/1+\varepsilon(1+\varepsilon)\right) \le f(\xi/1+\varepsilon) f(1+\varepsilon) = (\xi/1+\varepsilon)^\alpha (1+\varepsilon)^\gamma = \xi^\alpha (1+\varepsilon)^{\gamma-\alpha}.$$

Звідки випливає нерівність $(1+\varepsilon)^{\gamma-\alpha} \ge 1$, яка виконується для всіх $\varepsilon > 0$, якщо $\alpha \le \gamma$.

Доведення достатності. Безпосередньою перевіркою легко встановити, що у випадку виконання нерівності $\alpha \le \gamma$ функція вигляду (4) є розв'язком нерівності (1).

Лему 1 доведено.

Лема 2. Нехай $\alpha, \gamma, b > 0$. Функція вигляду

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & 0 \le x \le b, \\ x^\gamma & x > b, \end{cases} \tag{5}$$

є розв'язком нерівності (1) тоді і лише тоді, коли виконується одна з умов:

1) $\alpha = \gamma$;

2) $\alpha < \gamma, \ b = 1$.

Доведення необхідності. Умова $b = 1$ випливає з неперервності функції $f(x)$ в точці $x = b$, а нерівність $\alpha \le \gamma$ – з леми 1.

Достатність умов леми 2 слідує з леми 1.

Лему 2 доведено.

Лема 3. Нехай $\alpha, \gamma > 0$, $b \in (0;1)$. Якщо функція вигляду

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} & 0 \le x \le b, \\ b^{\alpha-\gamma} x^{\gamma} & x > b, \end{cases} \tag{6}$$

є розв'язком нерівності (1), то $\alpha \le \gamma$.

Доведення Розглянемо можливі випадки розміщення точок x та y ($x \ne y$) стосовно точки b і покажемо, що якщо $b \in (0;1)$ і функція $f(x)$ – розв'язок нерівності (1), то виконується умова $\alpha \le \gamma$.

Нехай $x, y \in (0;b)$. Оскільки $b < 1$, то $xy \in (0;b)$. Підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо $(xy)^{\alpha} = f(xy) \le f(x) f(y) = x^{\alpha} y^{\alpha}$. Останнє співвідношення має місце для всіх α.

Нехай $x \in (0;b)$, $y \in (b;+\infty)$. Припустимо, що $xy \in (0;b)$. Тоді, підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо $(xy)^{\alpha} = f(xy) \le f(x) f(y) = x^{\alpha} b^{\alpha-\gamma} y^{\gamma}$. Звідси маємо, що $(y/b)^{\alpha-\gamma} \le 1$. Враховуючи, що $y/b < 1$, з попередньої нерівності одержимо, що $\alpha \le \gamma$. Припустимо, що $xy \in (b;+\infty)$. Тоді, підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо $b^{\alpha-\gamma}(xy)^{\gamma} = f(xy) \le f(x) f(y) = x^{\alpha} b^{\alpha-\gamma} y^{\gamma}$. Звідси маємо, що $x^{\alpha-\gamma} \ge 1$. Оскільки $b < 1$, то $\alpha \le \gamma$.

Нехай тепер $x, y \in (b;+\infty)$. Припустимо, що $xy \in (b;+\infty)$, тоді, підставивши x та y у нерівність, отримаємо $b^{\alpha-\gamma}(xy)^{\gamma} = f(xy) \le f(x) f(y) = b^{\alpha-\gamma} x^{\alpha} b^{\alpha-\gamma} y^{\gamma}$. Звідси маємо, що $b^{\alpha-\gamma} \ge 1$. Оскільки $b < 1$, то $\alpha \le \gamma$. Припустимо, що $xy \in (0;b)$. Підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо $(xy)^{\alpha} = f(xy) \le f(x) f(y) = b^{\alpha-\gamma} x^{\alpha} b^{\alpha-\gamma} y^{\gamma}$. Звідси маємо, що $(x/b)^{\alpha-\gamma}(y/b)^{\alpha-\gamma} \le 1$, звідки $\alpha \le \gamma$.

Випадок $x \in (b;+\infty)$, $y \in (0;b)$ є аналогічним випадку, коли $x \in (0;b)$, $y \in (b;+\infty)$. Лемму 3 доведено.

Лема 4. Нехай $\alpha, \gamma > 0$, $\alpha \ne \gamma$, $b \in (1;+\infty)$. Функція вигляду

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} & 0 \le x \le b, \\ b^{\alpha-\gamma} x^{\gamma} & x > b, \end{cases} \tag{7}$$

не є розв'язком нерівності (1).

Доведення. Доведемо від супротивного. Припустимо, що (7) є розв'язком нерівності (1). Розглянемо можливі випадки розміщення двох точок x та y ($x \ne y$) відносно точки b.

Нехай $x, y \in (0;b)$. Припустимо, що $xy \in (0;b)$, тоді, підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо $(xy)^{\alpha} = f(xy) \le f(x) f(y) = x^{\alpha} y^{\alpha}$. Останнє співвідношення має місце для всіх α. Припустимо, що $xy \in (b;+\infty)$. Після підстановки x та y у нерівність (1), отримаємо $b^{\alpha-\gamma}(xy)^{\gamma} = f(xy) \le f(x) f(y) = x^{\alpha} y^{\alpha}$. Звідси маємо, що $(xy/b)^{\alpha-\gamma} \ge 1$. Враховуючи, що $xy/b > 1$, з попередньої нерівності одержимо, що $\alpha \ge \gamma$.

Нехай $x \in (0;b)$, $y \in (b;+\infty)$. Припустимо, що $xy \in (0;b)$. Тоді, підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо $(xy)^{\alpha} = f(xy) \le f(x) f(y) = x^{\alpha} b^{\alpha-\gamma} y^{\gamma}$. Звідси маємо, що $(y/b)^{\alpha-\gamma} \le 1$. Враховуючи, що $y/b > 1$, з попередньої нерівності одержимо, що $\alpha \le \gamma$. Маємо протиріччя.

З лем 3, 4 випливає таке твердження.

Лема 5. Нехай $\alpha, \gamma > 0$. Якщо функція вигляду $f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} & 0 \le x \le b, \\ b^{\alpha-\gamma} x^{\gamma} & x > b, \end{cases}$ є розв'язком нерівності (1), то $b \in (0;1)$ та $\alpha \le \gamma$.

Лему 5 можна сформулювати ще таким чином.

Лема $5'$. Нехай $\alpha, \gamma > 0$. Якщо функція вигляду $f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} & 0 \le x \le b, \\ b^{\alpha-\gamma} x^{\gamma} & x > b, \end{cases}$ є розв'язком нерівності (1), то виконується одна з таких умов:

1) $\alpha = \gamma$ та $b \in (0;+\infty)$;

2) $\alpha < \gamma$ та $b \in (0;1)$.

Доведення леми $5'$ випливає з лем 3 та 4.

Лема 6. Нехай α, γ, $\alpha \ne \gamma$, $a > b > 1$. Функція вигляду

$$f(x)=\begin{cases} ax^{\alpha} & 0\le x\le c^{*}, \\ bx^{\gamma} & x>c^{*}, \end{cases} \tag{8}$$

де $c^{*}=(a/b)^{1/\gamma-\alpha}$, не є розв'язком нерівності (1).

Доведення. Доведемо від супротивного. Припустимо, що функція вигляду (8) є розв'язком нерівності (1). Розглянемо можливі випадки розміщення двох точок x та y ($x\ne y$) відносно точки c^{*}.

Нехай $x\in(0;c^{*})$, $y\in(c^{*};+\infty)$. Припустимо, що $xy\in(0;c^{*})$. Тоді, підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо $a(xy)^{\alpha}=f(xy)\le f(x)f(y)=ax^{\alpha}by^{\gamma}$. Звідси отримаємо, що $(y/c^{*})^{\gamma-\alpha}a\ge 1$. Останнє співвідношення виконується, якщо $\alpha\le\gamma$. Припустимо, що $xy\in(c^{*};+\infty)$. Підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо $b(xy)^{\gamma}=f(xy)\le f(x)f(y)=ax^{\alpha}by^{\gamma}$. Звідси маємо, що $(x/c^{*})^{\gamma-\alpha}\,1/b\le 1$. Якщо останнє співвідношення виконується, то $\alpha\le\gamma$.

Нехай $x,y\in(c^{*};+\infty)$. Припустимо, що $xy\in(0;c^{*})$. Легко зрозуміти, що у цьому випадку $c^{*}\le 1$. Звідси, оскільки $a>b$, одержуємо нерівність $\alpha\ge\gamma$. Маємо протиріччя.

Висновки. Досліджено клас неперервних розв'язків нерівності $f(xy)\le f(x)f(y)$, отримано опис загального вигляду функцій, визначених для всіх $x\in[0;+\infty)$, неперервних і таких, що для всіх значень $x,y\in[0;+\infty)$ справедлива нерівність $f(xy)\le f(x)f(y)$.

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с імпульсним воздействием. К.: Вища школа, 1987. – 288с. 2. *Борисенко С.Д., Самойленко А.М., Матараццо Дж., Тоскано Р., Ясінський В.В.* Диференціальні моделі. Стійкість. К.:Вища школа, 2000. – 329с. 3. *Фіхтенгольц Г.М.* Курс диференціального і інтегрального числення: В 3-х т. – М.: Наука, 1969. – Т.2.

Надійшла до редколегії 28.09.09

УДК 517.51

Л. Ющенко, асп.

НЕГАТИВНІ РЕЗУЛЬТАТИ У КУСКОВО-ОПУКЛОМУ НАБЛИЖЕННІ ВИЩІХ ПОРЯДКІВ

Доведено, що для кусково-q-опуклого, $q>3$, наближення алгебраїчними многочленами, нерівності типу Джексона-Стєчкіна є невірними навіть з константою, яка залежить від функції, що наближують, якщо гладкість функції вище двох.

We prove that for the q-coconvex, $q>3$, approximation by the algebraic polynomials, the Jackson-Stechkin estimates are invalid even with a constant which depends on the function, if the smoothness of a function is over the two.

1. Вступ. Основні означення та формулювання

Нехай $C[a,b]$ – простір неперервних на відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$ функцій f, з рівномірною нормою

$$\|f\|_{[a,b]}:=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|,$$

$C^{(r)}$ визначає простір r разів неперервно-диференційовних на відрізку $[a,b]$ функцій.

Для кожної функції $f\in C[a,b]$ і кожного $q\in\mathbb{N}$, позначимо через $\Delta_h^q(f,x):=\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}\binom{q}{j}f(x+jh)$, q-ту різницю у точці x з кроком h.

Нехай Y_s, $s\in\mathbb{N}$ – фікований набір з $s+1$-єї точки $y_i\in[a,b]$, $a=y_s<...<y_1<y_0=b$; $\Delta(Y_s[a,b])$ – множина функцій $f\in C[a,b]$, неспадних на $[y_{i+1},y_i]$ для i - парних та незростаючих на $[y_{i+1},y_i]$ для непарних i. Функції з $\Delta(Y_s[a,b])$ називаються кусково-монотонними.

Нехай $\Delta^2(Y_s[a,b])$ множина функцій $f\in C[a,b]$, таких що $\Delta_h^2(f,x)\ge 0$ на $[y_{i+1},y_i]$ для i - парних та $\Delta_h^2(f,x)\le 0$ на $[y_{i+1},y_i]$ для непарних i. Функції з $\Delta^2(Y_s[a,b])$ називаються кусково-опуклими.

Більш загально, якщо $q\ge 2$, тоді множина $\Delta^q(Y_s[a,b])$ є множиною функцій $f\in C[a,b]$, таких що $\Delta_h^q(f,x)\ge 0$ на $[y_{i+1},y_i]$ для i - парних та $\Delta_h^q(f,x)\le 0$ на $[y_{i+1},y_i]$ для непарних i. Функції $f\in\Delta^q(Y_s[a,b])$ називаються кусково - q - опуклими.

Нехай P_n – простір алгебраїчних многочленів степені $\le n$.

Для функції $f\in\Delta(Y_s[a,b])$ позначимо

$$E_n(f,Y_s[a,b]):=\inf_{P_n\in\mathrm{P}_n\cap\Delta(Y_s[a,b])}\|f-P_n\|_{C[a,b]}$$

величину найкращого кусково-монотонного наближення многочленами.