2) $\left\|f_h^{(i)}\right\|_{C[-2,1]} \le \begin{cases} \dfrac{c}{h^{i-q+1}}, & i = q-1,...,r, \\ 1, & i = 0,...,q-2. \end{cases}$,

3) якщо $h \le \dfrac{c_2 l^{\frac{q-1}{2}}}{n}$, $l \in (0,1)$, $\theta \in \left(0, \dfrac{l}{3}\right)$, то $E_n^{(q)}(f_h(\cdot - \theta); [-l, l]) \ge \dfrac{c_1 l^{q-1}}{n^2}$, де $E_n^{(q)}(f_h(\cdot - \theta); [-l, l])$ – величина найкращого q - опуклого наближення функції $f_h(\cdot - \theta)$ многочленами степені $\le n$ на відрізку $[-l, l]$.

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 3. Розглянемо функцію $g(x) := \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k f_{h_k}(x - x_k)$,

де f_{h_k} – функція з леми 1, $h_k := \dfrac{1}{c_2 n_k n_{k-1}^{q-1}}$, $\beta_k := \dfrac{1}{n_{k+1}^m n_k^{m(q-1)+2}}$, $x_k := \dfrac{1}{n_k}$.

Не втрачаючи загальності будемо вважати $y_1 = -1$, $b = 1$. Покажемо, що шуканою функцією є

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [-1,1], \\ 0, & x \in [a,-1] \end{cases}.$$

Справді, за лемою 1, $f_{h_k}(\cdot - x_k) \in \Delta^q[-1,1] \cap C^{(r)}[-1,1]$ та $f_{h_k}(-1) = 0$, $j = \overline{0,r}$, тому також $g \in \Delta^q[-1,1] \cap C^{(r)}[-1,1]$ та $g^{(j)}(-1) = 0$, $j = \overline{0,r}$. Враховуючи, що $f(x) = 0$ при $x \in [a,-1]$, маємо $f \in \Delta^q(Y_s[a,b]) \cap C^{(r)}[a,b]$.

Нарешті маємо $\overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n E_n^{(q)}(f, Y_s[a,b]) n^{r-q+3} \ge \overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n E_n^{(q)}(g)_{[-1,1]} n^{r-q+3} = +\infty$, де остання рівність доведена в [1].

Отже (4) виконується.
Теорема 3 доведена.

ВИСНОВОК

В данній роботі ми розглянули питання про неможливість отримати класичну оцінку Джексона-Стєчкіна при q – опуклому наближенні многочленами з $q > 3$, $r > 2$, навіть із сталою, що залежить від функції. Точніше – встановлено, що замість очікуваної швидкості наближення n^{-r} можливою є не краще ніж n^{-r+q-3}.

1. *Бондаренко А.В., Примак А.В.* Отрицательные результаты в формосохраняющем приближении высших порядков // Матем. заметки. 2004. Т. 76. № 6. С. 812–823. 2. *Шведов А.С.* Порядки коприближений функций алгебраическими многочленами // Матем. заметки. 1981. Т. 29, № 1. С. 117–130. 3. *Beatson R.K.* The Degree of Monotone Approximation // Pacific I. Math.1978. V.74. № 1. P. 5–14. 4. *Bondarenko A.V.* Jackson type inequality in 3-convex approximation. // East I. Approx. 2002. V. 8. №3. P. 291–302. 5. *Konovalov V.N., Leviatan D.* Shape-preserving widths of Sobolev-type classes of s-monotone functions on a finite interval // Israel I. Math. 2003. V. 133. P. 239–268 6. *Leviatan D., Shevchuk I.A.* Coconvex polynomial approximation. // I. Approx. Theory 2003. V. 121. № 1. P. 100–118. 7. *Leviatan D., Shevchuk I.A.* Constants in comonotone polynomial approximation // New developments in approximation theory. Dortman. 1998. P. 145–158. 8. *Lorentz G.G., Zeller K.L.* Degree of Approximation by Monotone Polynomials // I. Approx. Theory. 1968. V. 1. № 4. P. 501–504.

Надійшла до редколегії 28.10.08

УДК 517.946

А. Громик, викл., І. Конет, канд. фіз.-мат. наук

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ПРОСТОРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Методом інтегральних перетворень побудовано точні аналітичні розв'язки нестаціонарних задач теплопровідності в обмежених кусково-однорідних просторових середовищах.

The method of integral transformations builds up the exact analytical solution of non-stationary problems of heat conductivity in the limited piece-homogeneous space areas.

1. Вступ

Нестаціонарні крайові задачі феноменологічної теорії теплопровідності для кусково-однорідних (багатошарових) середовищ у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат становлять значний теоретичний, практичний та економічний інтерес [6,8,15,16]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків двовимірних та тривимірних лінійних температурних задач в однорідних і кусково-однорідних середовищах присвячені монографії [9-11, 13]. Зокрема в [11] розглянуто випадок обмежених кусково-однорідних за декартовою координатою циліндрично-кругових середовищ (просторів, просторів з порожниною, суцільних тіл і тіл з порожниною). Необмежені двоскладові та тришарові середовища розглянуто у працях [3-5,12]. У цій статті ми пропонуємо інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків нестаціонарних задач теплопровідності для обмежених кусково-однорідних просторових середовищ у декартовій системі координат.

2. Постановка задачі

Задача про структуру нестаціонарного температурного поля в ортотропному обмеженому $(n+1)$-шаровому просторовому середовищі математично зводиться до побудови обмеженого на множині

$$D_3=\left\{(t,x,y,z)\middle| t>0;(x,y)\in\Omega_2=\langle a;b\rangle\times\langle c;d\rangle;z\in K_n^+=\bigcup_{j=1}^{n+1}I_j\equiv\bigcup_{j=1}^{n+1}(l_{j-1};l_j);l_0\ge 0;l_k<l_{k+1};l_{n+1}\equiv l<\infty\right\}$$

розв'язку диференціальних рівнянь теплопровідності [7, 18]

$$\frac{\partial T_j}{\partial t}-\left[a_{xj}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]T_j+\chi_j^2T_j=f_j(t,x,y,z);z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1},\tag{1}$$

з початковими умовами

$$T_j(t,x,y,z)\big|_{t=0}=g_j(x,y,z);z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1},\tag{2}$$

крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0)T_1\bigg|_{z=l_0}=g_0(t,x,y),(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1})T_{n+1}\bigg|_{z=l}=g_l(t,x,y)\ ,\tag{3}$$

умовами неідеального теплового контакту [1]

$$\begin{cases}[(R_k\dfrac{\partial}{\partial z}+1)T_k-T_{k+1}]\bigg|_{z=l_k}=0,\\ (\nu_k\dfrac{\partial T_k}{\partial z}-\nu_{k+1}\dfrac{\partial T_{k+1}}{\partial z})\bigg|_{z=l_k}=0,k=\overline{1,n},\end{cases}\tag{4}$$

та відповідними крайовими умовами на межі області Ω_2, де $a_{xj},a_{yj},a_{zj}\ge 0$ – коефіцієнти температуропровідності у напрямках координатних осей $x,y,z\left(j=\overline{1,n+1}\right)$; $\chi_j^2\ge 0$ – коефіцієнти дисипації теплової енергії; $f(t,x,y,z)=$ $=\left\{f_1(t,x,y,z),f_2(t,x,y,z),...,f_{n+1}(t,x,y,z)\right\}$ – інтенсивність теплових джерел; $g(x,y,z)=\{g_1(x,y,z),g_2(x,y,z),...,$ $g_{n+1}(x,y,z)\}$ – температура середовища в початковий момент часу; $\alpha_{11}^0,\beta_{11}^0;\alpha_{22}^{n+1},\beta_{22}^{n+1}$ – деякі дійсні сталі; $g_0(t,x,y)$, $g_l(t,x,y)$ – задані обмежені неперервні функції в області $(0;+\infty)\times\Omega_2$; $R_k\ge 0$ – коефіцієнти термоопору; $\nu_k,\nu_{k+1}\ge 0$ – коефіцієнти теплопровідності; $T(t,x,y,z)=\left\{T_1(t,x,y,z),T_2(t,x,y,z),...,T_{n+1}(t,x,y,z)\right\}$ – шукана температура.

3. Основна частина

3.1. Інтегральне зображення розв'язку задачі теплопровідності в кусково-однорідному середовищі $(-\infty;+\infty)\times(-\infty;+\infty)\times\left\{z\in K_n^+\right\}$

Розглянемо область $\Omega_2=(-\infty;+\infty)\times(-\infty;+\infty)$. У цьому випадку на межі області Ω_2 виконуються крайові умови

$$\frac{\partial^k T_j}{\partial x^k}\bigg|_{|x|=\infty}=0;k=0,1;\ j=\overline{1,n+1},\tag{5}$$

щодо змінної *x* та крайові умови

$$\frac{\partial^k T_j}{\partial y^k}\bigg|_{|y|=\infty}=0;k=0,1;\ j=\overline{1,n+1},\tag{6}$$

щодо змінної *y*.

Вважаємо, що для задачі (1)-(6) виконуються умови узгодженості [18]:

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)g_1\bigg|_{z=l_0}=g_0(0,x,y)\,;\ \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1}\right)g_{n+1}\bigg|_{z=l}=g_l(0,x,y);$$

$$\begin{cases}\left[\left(R_k\dfrac{\partial}{\partial z}+1\right)g_k-g_{k+1}\right]\bigg|_{z=l_k}=0,\\ \left(\nu_k\dfrac{\partial g_k}{\partial z}-\nu_{k+1}\dfrac{\partial g_{k+1}}{\partial z}\right)\bigg|_{z=l_k}=0;\ k=\overline{1,n},\end{cases}\quad \frac{\partial^k g_j}{\partial x^k}\bigg|_{|x|=\infty}=0;\ \ \frac{\partial^k g_j}{\partial y^k}\bigg|_{|y|=\infty}=0;\ k=0,1;\ \ j=\overline{1,n+1}\,.$$

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(6) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [17, 13].

До задачі (1)-(6) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної *x* [17]:

$$F_x\left[g(x)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{-i\sigma x}dx\equiv\tilde g(\sigma),i=\sqrt{-1}\ ,\tag{7}$$

$$F_x^{-1}\left[\tilde g(\sigma)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde g(\sigma)e^{i\sigma x}d\sigma\equiv g(x)\,,\tag{8}$$

$$F_x\left[\frac{d^2g}{dx^2}\right]=-\sigma^2F_x\left[g(x)\right]\equiv-\sigma^2\tilde g(\sigma)\,.\tag{9}$$

Інтегральний оператор F_x за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайовій задачі (1)-(6) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3' = \{(t, y, z) \mid t>0; y \in (-\infty; +\infty); z \in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{T}_j}{\partial t} - \left[a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \tilde{T}_j + \left(a_{xj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2 \right) \tilde{T}_j = \tilde{f}_j(t, \sigma, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \tag{10}$$

з початковими умовами

$$\tilde{T}_j(t, \sigma, y, z)\Big|_{t=0} = \tilde{g}_j(\sigma, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \tag{11}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{T}_1 \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_0(t, \sigma, y); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{T}_{n+1} \Big|_{z=l} = \tilde{g}_0(t, \sigma, y), \tag{12}$$

$$\frac{\partial^k \tilde{T}_j}{\partial y^k} \Bigg|_{|y|=\infty} = 0; \; k = 0{,}1; \; j = \overline{1, n+1}, \tag{13}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) \tilde{T}_k - \tilde{T}_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left(\nu_k \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial z} - \nu_{k+1} \frac{\partial \tilde{T}_{k+1}}{\partial z} \right) \Big|_{z=l_k} = 0; k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{14}$$

До задачі (10)-(14) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної *y* [17]:

$$F_y[g(y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-isy} dy \equiv \tilde{g}(s), \tag{15}$$

$$F_y^{-1}[\tilde{g}(s)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(s) e^{isy} ds \equiv g(y), \tag{16}$$

$$F_y\left[\frac{d^2 g}{dy^2} \right] = -s^2 F_y[g(y)] \equiv -s^2 \tilde{g}(s). \tag{17}$$

Інтегральний оператор F_y за правилом (15) внаслідок тотожності (17) початково-крайовій задачі (10)-(14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'' = \{(t, z) \mid t>0; z \in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{T}}_j}{\partial t} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{T}}_j}{\partial z^2} + \left(a_{xj}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 s^2 + \chi_j^2 \right) \tilde{\tilde{T}}_j = \tilde{\tilde{f}}_j(t, \sigma, s, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \tag{18}$$

з початковими умовами

$$\tilde{\tilde{T}}_j(t, \sigma, s, z)\Big|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_j(\sigma, s, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \tag{19}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{\tilde{T}}_1 \Big|_{z=l_0} = \tilde{\tilde{g}}_0(t, \sigma, s); \; \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{\tilde{T}}_{n+11} \Big|_{z=l_0} = \tilde{\tilde{g}}_l(t, \sigma, s) \tag{20}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) \tilde{\tilde{T}}_k - \tilde{\tilde{T}}_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left(\nu_k \frac{\partial \tilde{\tilde{T}}_k}{\partial z} - \nu_{k+1} \frac{\partial \tilde{\tilde{T}}_{k+1}}{\partial z} \right) \Big|_{z=l_k} = 0; k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{21}$$

До задачі (18)-(21) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0; l]$ з *n* точками спряження [13]:

$$F_{jn}[g(z)] = \int_{l_0}^{l} g(z) V(z, \lambda_j) \sigma(z) dz \equiv g_j, \tag{22}$$

$$F_{jn}^{-1}[g_j] = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \frac{V(z, \lambda_j)}{\| V(z, \lambda_j) \|^2} \equiv g(z), \tag{23}$$

$$F_{jn}\left[\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2\theta\left(z-l_{i-1}\right)\theta\left(l_i-z\right)\frac{d^2g}{dz^2}\right]\equiv\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2\int_{l_{i-1}}^{l_i}\frac{d^2g}{dz^2}V_i\left(z,\lambda_j\right)\sigma_i dz=-\lambda_j^2 g_j-\sum_{i=1}^{n+1}k_i^2\int_{l_{i-1}}^{l_i}g\left(z\right)V_i\left(z,\lambda_j\right)\sigma_i dz-$$
$$-\frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0}V_1\left(l_0,\lambda_j\right)\left(\alpha_{11}^0\frac{dg}{dz}+\beta_{11}^0 g\right)\Bigg|_{z=l_0}+\frac{\sigma_{n+1}a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}}V_{n+1}\left(l,\lambda_j\right)\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{dg}{dz}+\beta_{22}^{n+1}g\right)\Bigg|_{z=l}. \quad (24)$$

У рівностях (22)-(24) беруть участь величини і функції:

$$V\left(z,\lambda_j\right)=\sum_{i=1}^{n+1}V_j\left(z,\lambda_j\right)\theta\left(z-l_{i-1}\right)\theta\left(l_i-z\right);\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2=\int_{l_0}^{l}V^2\left(z,\lambda_j\right)\sigma\left(z\right)dz\equiv\sum_{i=1}^{n+1}\int_{l_{i-1}}^{l_i}V_i^2\left(z,\lambda_j\right)\sigma_i\left(z\right)dz;$$
$$\sigma\left(z\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\sigma_i\theta\left(z-l_{i-1}\right)\theta\left(l_i-z\right);V_m\left(z,\lambda_j\right)=\prod_{i=m}^{n}c_{2i}q_{n+1,j}\left[\omega_{m-1,2}\left(\lambda_j\right)\cos\left(q_{mj}z\right)-\omega_{m-1,1}\left(\lambda_j\right)\sin\left(q_{mj}z\right)\right];m=\overline{1,n}; \quad ;$$

$$V_{n+1}\left(z,\lambda_j\right)=\omega_{n2}\left(\lambda_j\right)\cos\left(q_{n+1,j}z\right)-\omega_{n1}\left(\lambda_j\right)\sin\left(q_{n+1,j}z\right);c_{1k}=1;\ c_{2k}=\frac{\nu_{k+1}}{\nu_k};\ q_{sj}=a_s^{-1}\left(\lambda_j^2+k_s^2\right)^{1/2}\equiv a_s^{-1}b_{sj};$$

$$\sigma_k=\prod_{j=k}^{n}\frac{\nu_j a_{n+1}}{\nu_{j+1}a_k^2};\ \sigma_n=\frac{\nu_n a_{n+1}}{\nu_{n+1}a_n^2};\ \sigma_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}};\nu_{11}^{k1}\left(q_{sj}l_k\right)=-R_k q_{sj}\sin\left(q_{sj}l_k\right)+\cos\left(q_{sj}l_k\right);\ \nu_{21}^{k1}\left(q_{sj}l_k\right)=-q_{sj}\sin\left(q_{sj}l_k\right);$$

$$\nu_{12}^{k1}\left(q_{sj}l_k\right)=-\nu_k^* q_{sj}\sin\left(q_{sj}l_k\right);\nu_{22}^{k1}\left(q_{sj}l_k\right)=\nu_k^* q_{sj}\cos\left(q_{sj}l_k\right);\nu_{11}^{k2}\left(q_{sj}l_k\right)=R_k q_{sj}\cos\left(q_{sj}l_k\right)+\sin\left(q_{sj}l_k\right);\nu_{21}^{k2}\left(q_{sj}l_k\right)=q_{sj}\cos\left(q_{sj}l_k\right);$$

$$\nu_{12}^{k2}\left(q_{sj}l_k\right)=\cos\left(q_{sj}l_k\right);\nu_{22}^{k2}\left(q_{sj}l_k\right)=\sin\left(q_{sj}l_k\right);\nu_k^*=\frac{\nu_{k+1}}{\nu_k};\delta_{sm}^k\left(q_{kj}l_k;q_{k+1,j}l_k\right)=\nu_{11}^{ks}\left(q_{kj}l_k\right)\nu_{22}^{km}\left(q_{k+1,j}l_k\right)-\nu_{21}^{ks}\left(q_{kj}l_k\right)\nu_{12}^{km}\left(q_{k+1,j}l_k\right);$$

$$\omega_{01}\left(\lambda_j\right)=-\nu_{11}^{01}\left(q_{1j}l_0\right);\ \omega_{02}\left(\lambda_j\right)=-\nu_{11}^{02}\left(q_{1j},l_0\right);\omega_{sm}\left(\lambda_j\right)=\omega_{s-1,2}\left(\lambda_j\right)\delta_{sm}^k\left(q_{sj}l_s;q_{s+1,j}l_s\right)-\omega_{s-1,1}\left(\lambda_j\right)\delta_{2m}^k\left(q_{sj}l_s;q_{s+1,j}l_s\right);$$

λ_j − корені трансцендентного рівняння $\Delta_n\left(\lambda\right)\equiv\nu_{22}^{n+1,2}\left(q_{n+1}l\right)\omega_{n1}\left(\lambda\right)-\nu_{22}^{n+1,1}q_{n+1}\left(\lambda\right)l\omega_{n2}\left(\lambda\right)=0$, що утворюють дискретний спектр, $\theta\left(x\right)$ – одинична функція Гевісайда [19].

Запишемо систему диференціальних рівнянь (18) та початкові умови (19) у матричній формі

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial t}-a_1^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+q_1^2\left(\sigma,s\right)\right)\tilde{\tilde{T}}_1\left(t,\sigma,s,z\right)\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}-a_2^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+q_2^2\left(\sigma,s\right)\right)\tilde{\tilde{T}}_2\left(t,\sigma,s,z\right)\\ \dots\dots\dots\dots\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}-a_{n+1}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+q_{n+1}^2\left(\sigma,s\right)\right)\tilde{\tilde{T}}_{n+1}\left(t,\sigma,s,z\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{f}}_1\left(t,\sigma,s,z\right)\\ \tilde{\tilde{f}}_2\left(t,\sigma,s,z\right)\\ \dots\dots\\ \tilde{\tilde{f}}_{n+1}\left(t,\sigma,s,z\right)\end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\left.\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{T}}_1\left(t,\sigma,s,z\right)\\ \tilde{\tilde{T}}_2\left(t,\sigma,s,z\right)\\ \dots\dots\\ \tilde{\tilde{T}}_{n+1}\left(t,\sigma,s,z\right)\end{bmatrix}\right|_{t=0}=\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{g}}_1\left(\sigma,s,z\right)\\ \tilde{\tilde{g}}_2\left(\sigma,s,z\right)\\ \dots\dots\\ \tilde{\tilde{g}}_{n+1}\left(\sigma,s,z\right)\end{bmatrix}, \quad (26)$$

де $q_j^2\left(\sigma,s\right)=a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2s^2+\chi_j^2;\ a_j^2\equiv a_{zj}^2;\ j=\overline{1,n+1}$.

Інтегральний оператор F_{jn} , який діє за правилом (22), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{jn}\left[\dots\right]=\left[\int_{l_0}^{l_1}\dots V_1\left(z,\lambda_j\right)\sigma_1 dz\int_{l_1}^{l_2}\dots V_2\left(z,\lambda_j\right)\sigma_2 dz\dots\int_{l_n}^{+\infty}\dots V_{n+1}\left(z,\lambda_j\right)\sigma_{n+1}dz\right] \quad (27)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (25), (26). Внаслідок тотожності (24) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{d}{dt}+\lambda_j^2+q_i^2(\sigma,s)+k_i^2\right)\tilde{\tilde{T}}_{ij}=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{f}}_{ij}-\sigma_1 a_1^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_0(t,\sigma,s)+\sigma_{n+1}a_{n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}(l,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_l(t,\sigma,s), \quad (28)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{T}}_{ij}\Big|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{ij}, \quad (29)$$

де $\tilde{\tilde{T}}_{ij}\equiv\tilde{\tilde{T}}_{ij}(t,\sigma,s)=\int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{\tilde{T}}_i(t,\sigma,s,z)\,\mathrm{V}_i\left(z,\lambda_j\right)\sigma_i dz;\ i=\overline{1,n+1},\ \tilde{\tilde{f}}_{ij}\equiv\tilde{\tilde{f}}_{ij}(t,\sigma,s)=\int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{\tilde{f}}_i(t,\sigma,s,z)\,\mathrm{V}_i\left(z,\lambda_j\right)\sigma_i dz;\ i=\overline{1,n+1},$

$$\tilde{\tilde{g}}_{ij}\equiv\tilde{\tilde{g}}_{ij}(\sigma,s)=\int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{\tilde{g}}_i(\sigma,s,z)\,\mathrm{V}_i\left(z\right)\sigma_i dz;\ i=\overline{1,n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\left\{q_1^2,q_2^2,\dots,q_{n+1}^2\right\}=q_1^2$ і покладемо всюди $k_i^2=q_1^2-q_i^2\ \left(i=\overline{1,n+1}\right)$. Задача Коші (28), (29) набуває вигляду

$$\frac{d\tilde{\tilde{T}}_j}{dt}+\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)\tilde{\tilde{T}}_j=\tilde{\tilde{f}}_j(t,\sigma,s)-\frac{\sigma_1a_1^2}{\alpha_{11}^0}V_1\left(l_0,\lambda_j\right)\tilde{\tilde{g}}_0\left(t,\sigma,s\right)+\frac{\sigma_{n+1}a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}}V_{n+1}\left(l,\lambda_j\right)\tilde{\tilde{g}}_l\left(t,\sigma,s\right), \quad (30)$$

$$\tilde{\tilde{T}}_j(t,\sigma,s)\Big|_{t=0}=\tilde{\tilde{g}}_j(\sigma,s), \quad (31)$$

де $\tilde{\tilde{T}}_j\left(t,\sigma,s\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{T}}_{ij}\left(t,\sigma,s\right)$, $\tilde{\tilde{f}}_j\left(t,\sigma,s\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{f}}_{ij}\left(t,\sigma,s\right)$, $\tilde{\tilde{g}}_j\left(\sigma,s\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{ij}\left(\sigma,s\right)$.

Безпосередньо перевіряється, що єдиним обмеженим розв'язком задачі (30), (31) є функція

$$\tilde{\tilde{T}}_j(t,\sigma,s)=\int_0^t\exp\left[-\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)(t-\tau)\right]\times\left[\tilde{\tilde{f}}_j(\tau,\sigma,s)-\frac{\sigma_1a_1^2}{\alpha_{11}^0}V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_0(\tau,\sigma,s)+\right.$$
$$\left.+\frac{\sigma_{n+1}a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}}V_{n+1}(l,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_l(\tau,\sigma,s)+\delta_+(\tau)\tilde{\tilde{g}}_j(\sigma,s)\right]d\tau, \quad (32)$$

де $\delta_+(\tau)$ – міра Дірака, зосереджена в точці $\tau=+0$ [19].

Оскільки суперпозиція операторів F_{jn} та F_{jn}^{-1} є одиничним оператором, то оператор F_{jn}^{-1} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{jn}^{-1}[...]=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{\infty}...\frac{V_1\left(z,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2}\\ \sum_{j=1}^{\infty}...\frac{V_2\left(z,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2}\\ \dots\dots\dots\dots\\ \sum_{j=1}^{\infty}...\frac{V_{n+1}\left(z,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2}\end{bmatrix}. \quad (33)$$

За правилом множення матриць застосуємо операторну матрицю-стовпець (33) до матриці-елемента $\left[\tilde{\tilde{T}}_j(t,\sigma,s)\right]$, де функція $\tilde{\tilde{T}}_j(t,\sigma,s)$ визначена формулою (32). Одержуємо єдиний обмежений розв'язок задачі (18)-(21):

$$\tilde{\tilde{T}}_i(t,\sigma,s,z)=\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\int_0^t\exp\left[-\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)(t-\tau)\right]\times\left[\tilde{\tilde{f}}_j(\tau,\sigma,s)-\frac{\sigma_1a_1^2}{\alpha_{11}^0}V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_0(\tau,\sigma,s)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\sigma_{n+1}a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}}V_{n+1}(l,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_l(\tau,\sigma,s)+\delta_+(\tau)\tilde{\tilde{g}}_j(\sigma,s)\right]d\tau\right\}\frac{V_i(z,\lambda_j)}{\left\|V_i(z,\lambda_j)\right\|^2};\overline{i=1,n+1}. \quad (34)$$

До функцій $\tilde{\tilde{T}}_i(t,\sigma,s,z)$ послідовно застосуємо обернені оператори F_y^{-1} за правилом (16) та F_x^{-1} за правилом (8). Виконавши елементарні перетворення, одержуємо функції

$$T_i(t,x,y,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{ik}(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)\times\left[f_k(\tau,\xi,\eta,\zeta)+\delta_+(\tau)g_k(\xi,\eta,\zeta)\right]\sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_i^1(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z)g_0(\tau,\xi,\eta)d\xi d\eta d\tau+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_i^2(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z)g_l(\tau,\xi,\eta)d\xi d\eta d\tau;\overline{i=1,n+1}, \quad (35)$$

які описують структуру нестаціонарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (35) застосовано компоненти:
фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{ik}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)=\frac{2}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\exp\left[-\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)t\right]\frac{V_i(z,\lambda_j)V_k(\zeta,\lambda_j)}{\left\|V_i(z,\lambda_j)\right\|^2}\times$$
$$\times\cos(|x-\xi|\sigma)\cos(|y-\eta|s)d\sigma ds;\overline{i,k=1,n+1}, \quad (36)$$

нижньої аплікатної матриці Гріна $W_i^1(t,x,\xi,y,\eta,z)=-\frac{\sigma_1a_1^2}{\alpha_{11}^0}E_{i1}(t,x,\xi,y,\eta,z,l_0)$, верхньої аплікатної матриці Гріна $W_i^2(t,x,\xi,y,\eta,z)=-\frac{\sigma_{n+1}a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}}E_{i,n+1}(t,x,\xi,y,\eta,z,l)$ параболічної початково-крайової задачі (1)-(6).

Відомо [2], що $\int_0^{+\infty}\exp\left(-\alpha^2x^2\right)\cos\left(\beta x\right)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)$.

Отже, формула (36) набуває вигляду

$$E_{ik}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)=\frac{\exp(-\chi_1^2 t)}{2\pi^2 a_{x1}a_{y1}t}\exp\left[-\frac{a_{y1}^2(x-\xi)^2+a_{x1}^2(y-\eta)^2}{4a_{x1}^2a_{y1}^2t}\right]\sum_{j=1}^{\infty}\exp(-\lambda_j^2 t)\frac{V_i(z,\lambda_j)V_k(\zeta,\lambda_j)}{\left\|V_i(z,\lambda_j)\right\|^2};\ j,k=\overline{1,n+1}.$$

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)$ і функцій Гріна $W_j^1(t,x,\xi,y,\eta,z)$, $W_j^2(t,x,\xi,y,\eta,z)$ безпосередньо перевіряється, що функції $T_j(t,x,y,z)$, визначені формулами (35), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умові (3), (5), (6) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [19].

Зауваження 1. У випадку $a_{xj}^2=a_{yi}^2=a_{zj}^2\equiv a_j^2\geq 0$ формули (35) визначають структуру нестаціонарного температурного поля в ізотропному обмеженому ($n+1$)-шаровому просторовому середовищі.

Зауваження 2. Якщо деякі з коефіцієнтів термоопору R_k дорівнюють нулю, то безпосередньо з формул (35) одержуємо структуру нестаціонарного температурного поля у випадку здійснення на відповідних площинах $z=l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 3. При $R_k=0\left(k=\overline{1,n}\right)$ безпосередньо з формул (35) одержуємо структуру нестаціонарного температурного поля у випадку здійснення на всіх площинах $z=l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 4. Параметри $\alpha_{11}^0,\beta_{11}^0,\alpha_{22}^{n+1},\beta_{22}^{n+1}$ дають можливість виділяти із формул (35) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхнях $z=l_0, z=l$ крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій.

Зауваження 5. Аналіз розв'язку (35) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j\left(t,x,y,z\right), g_j\left(x,y,z\right)$ $\left(j=\overline{1,n+1}\right), g_0\left(t,x,y\right)$ та $g_l\left(t,x,y\right)$ проводиться безпосередньо.

3.2 Інтегральне зображення розв'язку задачі теплопровідності в кусково-однорідному середовищі $\left(-\infty;+\infty\right)\times\left(0;+\infty\right)\times\left\{z\in K_n^+\right\}$

Розглянемо область $\Omega_2=\left(-\infty;+\infty\right)\times\left(0;+\infty\right)$. У цьому випадку на межі області виконуються крайові умови (5) щодо змінної *x* та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)T_j\Bigg|_{y=0}=P_j(t,x,z);\ \frac{\partial^k T_j}{\partial y^k}\Bigg|_{y=+\infty}=0;k=0,1;\ j=\overline{1,n+1},\tag{37}$$

щодо змінної *y*, де $h\geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $y=0$; $P_j\left(t,x,z\right)=hT_j^c\left(t,x,z\right)$, $T_j^c\left(t,x,z\right)$ – температура середовища на поверхні $y=0$.

Вважаємо, що для задачі (1)-(5), (37) виконуються умови узгодженості:

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)g_1\Bigg|_{z=l_0}=g_0\left(0,x,y\right);\ \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1}\right)g_{n+1}\Bigg|_{z=l}=g_l\left(0,x,y\right);$$

$$\begin{cases}\left[\left[\left(R_k\dfrac{\partial}{\partial z}+1\right)g_k-g_{k+1}\right]\right]\Bigg|_{z=l_k}=0,\\ \left[\left(\nu_k\dfrac{\partial g_k}{\partial z}-\nu_{k+1}\dfrac{\partial g_{k+1}}{\partial z}\right)\right]\Bigg|_{z=l_k}=0;k=\overline{1,n};\end{cases}\quad \frac{\partial^k g_j}{\partial x^k}\Bigg|_{|x|=\infty}=0;\ \left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)g_j\Bigg|_{y=0}=P_j\left(0,x,z\right);\ \frac{\partial^k g_j}{\partial y^k}\Bigg|_{y=+\infty}=0;\ k=0,1;\ j=\overline{1,n+1}.$$

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(5), (37) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [18, 19, 5].

До задачі (1)-(5), (37) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної x. Інтегральний оператор F_x за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайовій задачі (1)-(5), (37) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'=\left\{\left(t,y,z\right)\middle|t>0;y\in\left(0;+\infty\right);z\in K_n^+\right\}$ розв'язку диференціальних рівнянь (10) з початковими умовами (11), крайовими умовами (12), крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)\tilde{T}_j\Bigg|_{y=0}=\tilde{P}_j\left(t,\sigma,z\right);\ \frac{\partial^k\tilde{T}_j}{\partial y^k}\Bigg|_{y=+\infty}=0;\ k=0,1;\ j=\overline{1,n+1},\tag{38}$$

та умовами спряження (14).

До задачі (10)-(12), (38), (14) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі щодо змінної *y* [19]:

$$F_{+y}\left[g\left(y\right)\right]=\int_0^{+\infty}g\left(y\right)K_y\left(y,s\right)dy\equiv\tilde{g}\left(s\right),\tag{39}$$

$$F_{+y}^{-1}\left[\tilde{g}\left(s\right)\right]=\int_0^{+\infty}\tilde{g}\left(s\right)K_y\left(y,s\right)ds\equiv g\left(y\right),\tag{40}$$

$$F_{+y}\left[\frac{d^2 g}{dy^2}\right] = -s^2\tilde{g}(s) + K_y(0,s)\left(-\frac{dg}{dy}+hg\right)\Bigg|_{y=0}, \tag{41}$$

де ядро перетворення $K_y(y,s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{s\cos(sy)+h\sin(sy)}{\sqrt{s^2+h^2}}$.

Інтегральний оператор F_{+y} за правилом (39) внаслідок тотожності (41) початково-крайовій задачі (10)-(12), (38), (14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'' = \{(t,z)\,|\,t>0; z\in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{T}}_j}{\partial t} - a_{zj}^2\frac{\partial^2 \tilde{\tilde{T}}_j}{\partial z^2} + \left(a_{xj}^2\sigma^2 + a_{yj}^2 s^2 + \chi_j^2\right)\tilde{\tilde{T}}_j = \tilde{\tilde{F}}_j(t,\sigma,s,z); z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}, \tag{42}$$

з початковими умовами (19), крайовими умовами (20) та умовами спряження (21), де

$$\tilde{\tilde{F}}_j(t,\sigma,s,z) = \tilde{\tilde{f}}_j(t,\sigma,s,z) + a_{yj}^2 K_y(0,s)\tilde{P}_j(t,\sigma,z);\ j=\overline{1,n+1}.$$

З точністю до позначень початково-крайова задача на спряження (42), (19)-(21) збігається із задачею (18)-(21). Побудований методом інтегрального перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0; l]$ з *n* точками спряження єдиний обмежений розв'язок задачі (42), (19)-(21) відповідно до формул (34) визначають функції

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{T}}_i(t,\sigma,s,z) = \sum_{j=1}^{\infty}\Bigg\{\int_0^t \exp\left[-\left(\lambda_j^2 + a_{x1}^2\sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2\right)(t-\tau)\right]\times\Bigg[\tilde{\tilde{F}}_j(t,\sigma,s) - \frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0}V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_0(\tau,\sigma,s) + \\ + \frac{\sigma_{n+1}a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}}V_{n+1}(l,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_l(\tau,\sigma,s) + \delta_+(\tau)\tilde{\tilde{g}}_j(\sigma,s)\Bigg]d\tau\Bigg\}\frac{V_i(z,\lambda_1)}{\|V_i(z,\lambda_1)\|^2};\ i=\overline{1,n+1}.\end{aligned} \tag{43}$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{\tilde{T}}_i(t,\sigma,s,z)$, визначених формулами (43), обернені оператори F_{+y}^{-1} та F_x^{-1}, одержуємо функції

$$\begin{aligned}T_i(t,x,y,z) = \sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)\left[f_k(\tau,\xi,\eta,\zeta) + \delta_+(\tau)g_k(\xi,\eta,\zeta)\right]\sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau + \\ + \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} W_i^1(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z)g_0(\tau,\xi,\eta)d\xi d\eta d\tau + \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} W_i^2(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z)g_l(\tau,\xi,\eta)d\xi d\eta d\tau + \\ + a_{yi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{yik}(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta)P_k(\tau,\xi,\zeta)\sigma_k d\xi d\zeta d\tau;\ i=\overline{1,n+1},\end{aligned} \tag{44}$$

які описують структуру нестаціонарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (44) застосовано компоненти:
фундаментальної матриці розв'язків

$$\begin{aligned}E_{ik}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\exp\left[-\left(\lambda_j^2 + a_{x1}^2\sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2\right)t\right]\times \\ \times\frac{V_i(z,\lambda_j)V_k(\zeta,\lambda_j)}{\|V(z,\lambda_j)\|^2}\cos(|x-\xi|\sigma)K_y(y,s)K_y(\eta,s)d\sigma ds;\ i,k=\overline{1,n+1},\end{aligned}$$

нижньої аплікатної матриці Гріна $W_i^1(t,x,\xi,y,\eta,z) = -\frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0}E_{i1}(t,x,\xi,y,\eta,z,l_0)$, верхньої аплікатної матриці Гріна $W_i^2(t,x,\xi,y,\eta,z) = \frac{\sigma_1 a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}}E_i(t,x,\xi,y,\eta,z,l)$, ординатної матриці Гріна $W_{yik}(t,x,\xi,y,z,\zeta) = E_{ik}(t,x,\xi,y,0,z,\zeta)$ параболічної початково-крайової задачі (1)-(5), (37).

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)$ і функцій Гріна $W_j^1(t,x,\xi,y,\eta,z)$, $W_j^2(t,x,\xi,y,\eta,z)$, $W_{yjk}(t,x,\xi,y,z,\zeta)$ безпосередньо перевіряється, що функції $T_j(t,x,y,z)$, визначені формулами (44), задовольняють рівняння (1),початкові умови (2), крайові умови (3), (5), (37) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [19].

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметр h дає можливість виділяти із формул (44) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхні $y=0$ крайових умов 1-го роду $(h\to\infty)$ та 2-го роду $(h\to 0)$; 3) аналіз розв'язку (44) в залежності від аналітичного вигляду функцій $f_j(t,x,y,z)$, $g_j(x,y,z)$, $P_j(t,x,z)$ $(j=\overline{1,n+1})$, $g_0(t,x,y)$ та $g_l(t,x,y)$ проводиться безпосередньо.

4. Висновки

За загальних припущень у межах феноменологічної теорії теплопровідності побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків нестаціонарних задач в обмежених кусково-однорідних просторових середовищах. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задач й можуть бути використані як у теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – М., 1964. 2. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М., 1971. 3. *Громик А.П., Конет І.М.* Нестаціонарні задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2007. – Вип.15. – С. 67–82. 4. *Громик А.П., Конет І.М.* Початково-крайові задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.16. – С.100-118. 5. *Громик А.П., Конет І.М.* Початково-крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.17. – С. 102-120. 6. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. К., 1998. 7. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – М., 1964. 8. *Коляно Ю.М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К., 1992. 9. *Конет І.М.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К., 1998. 10. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці, 2001. 11. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці, 2004. 12. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Нестаціонарні задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.16. – С. 118–134. 13. *Ленюк М.П.* Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К., 1997. 14. *Ленюк М.П.* Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К., 1983. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.4). 15. *Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – М., 1984. – 368 с. 16. *Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К., 1991. 17. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. – М., 1955. 18. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М., 1972. 19. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. – М., 1965.

Надійшла до редколегії 23.09.08

УДК 517.9

О. Капустян, докт. фіз.-мат. наук, Т. Шкляр, асп.

ЯКІСНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ НЕАВТОНОМНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО ВКЛЮЧЕННЯ З ТРАНСЛЯЦІЙНО-КОМПАКТНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

В роботі для неавтономного параболічного включення з напівнеперервною зверху многозначною правою частиною за умов глобальної розв'язності і дисипативності доведено існування в фазовому просторі глобального атрактору.

In the paper for nonautonomous parabolic inclusion with upper semicontinuous multi-valued right-hand part only under conditions of global resolvability and dissipation we prove an existence of global attractor in the phase space.

Вступ

В роботі для параболічного включення, многозначна права частина якого явно залежить від часової змінної, досліджується проблема побудови на його сильних розв'язках сім'ї многозначних процесів, існування у цієї сім'ї глобального атрактору і з'ясування його властивостей. В роботі [1] проблема існування глобального атрактору була розв'язана для правої частини спеціального виду $f(t,u)=[0,\theta(t,u)]$, де $\forall\, t\in R$ функція $\theta(t,\cdot)$ належала класу функцій без розривів 2-го роду і задовольняла умову $\sup\limits_{t\in R}\Delta_c(\theta(t))\to 0$, $c\to 0$, де Δ_c – модуль компактності Скорохода [5]. Проте глобальна розв'язність вихідної задачі гарантується без вказаних умов на $f(t,u)$. Виходячи з результатів роботи [4] для нелінійного параболічного рівняння, де існування глобального атрактору доведено лише за умов глобальної розв'язності, метою даної роботи є одержати відповідний результат для дисипативного параболічного включення загального вигляду. Цього вдається досягти, довівши трансляційну компактність [3] відображення $f(t,u)$ в просторі напівнеперервних зверху многозначних відображень, метрика в якому – це відстань Хаусдорфа між відповідними графіками.

Постановка задачі

Розглядається задача дослідження при $t\to\infty$ розв'язків параболічного включення

$$\begin{cases}\dfrac{\partial y(t,x)}{\partial t}\in \Delta y(t,x)+f(t,y(t,x))+h(x),\ \ (t,x)\in(\tau,T)\times\Omega,\\ y(t,x)\,|_{x\in\partial\Omega}=0,\end{cases} \tag{1}$$

де $\Omega\subset R^n$ – обмежена область, $\tau\in R$ – початковий момент часу, $h\in L^2(\Omega)$, $f: R\times R\mapsto 2^R$ – задане многозначне відображення, що задовольняє умовам:

1) $f: R\times R\mapsto C_v(R)$, тобто $\forall\,(t,u)\in R\times R\ \ f(t,u)\neq\varnothing$, опукла, замкнена, обмежена в R;

2) $\forall\, t\in R$ відображення $f(t,\cdot): R\mapsto C_v(R)$ є напівнеперервним зверху (н.н.зв.);

3) $\forall\, t,s\in R\ \ \forall\, r>0\ \ \ dist_h(graph|_r\ f(t), graph|_r\ f(s))\le\gamma(|t-s|,r)$, де $\gamma(\cdot,r)$ – неперервна функція така, що $\gamma(p,r)\to 0$, $p\to 0+$, $dist_h$ – відстань Хаусдорфа, $graph|_r\ f=\bigcup\limits_{|u|\le r}\{(u,w)\mid w\in f(u)\}$;

4) $\exists\, C_1,C_2\ge 0\ \ \forall\, t,u\in R\ \ |f(t,u)|\le C_1+C_2\,|u|$.

Зауважимо, що умова 3) виконується, якщо $\forall\, r>0\ \ \forall\,|u|\le r\ \ dist_h(f(t,u),f(s,u))\le\gamma(|t-s|,r)$.

Розв'язність задачі (1) гарантує наступна