Звідси, застосовуючи лему Гронуола, маємо оцінку

$$\| y(t) \|^2 \le \| y(0) \|^2 \ e^{-\varepsilon t} + \int_0^t (2M \,|\, \Omega \,| + \frac{1}{\varepsilon} \| h \|^2) e^{-\varepsilon(t-s)} ds \ , \tag{8}$$

з якої одержуємо умову 1) леми 2.

З оцінок (6),(8) аналогічно [1] виводимо, що для довільних $t_* > 0$, $r > 0$ множина $U_\Sigma(t_*, 0, B_r)$ – предкомпакт в H. Це означає, що сім'я МП $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ має в фазовому просторі H компактний глобальний атрактор.

Доведемо умову 3) леми 2. Нехай $p_n \in U_{\sigma_n}(t_n, 0, y_n^0)$, $\sigma_n \to \sigma$ в Σ, $y_n^0 \to y^0$, $t_n \to t_0$ і доведемо, що принаймні по підпослідовності $p_n \to p \in U_\sigma(t_0, 0, y^0)$. Зафіксуємо $T > t_0$. Маємо, що $y_n(\cdot)$ – розв'язок $(1)_{\sigma_n}$, $y_n(t_n) = p_n$, $l_{\sigma_n}(s,x) \in \sigma_n(s, y_n(s,x))$ м.с. Оскільки $\| l_{\sigma_n}(s) \| \le K(1 + \| y_n(s) \|)$ з деякою константою $K > 0$, що не залежить від n, то з (8) в силу [2] існують функції l_σ, $y = I(y^0) l_\sigma$ такі, що по підпослідовності $l_{\sigma_n} \to l_\sigma$ слабо в $L^1(0,T;H)$, $y_n \to y$ в $C([0,T];H)$. Звідси $y_n(t_n) = p_n \to y(t_0)$, $y_n(t,x) \to y(t,x)$ м. с. і для включення $y(t_0) \in U_\sigma(t_0, 0, y^0)$ залишилось показати, що $l_\sigma(s,x) \in \sigma(s, y(s,x))$ м.с. Зафіксуємо $(t,x) \in [0,T] \times \Omega$, для яких $y_n(t,x) \to y(t,x)$. Тоді $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, N = N(t,x,\varepsilon)$ $\forall\, n \ge N$

$$l_{\sigma_n}(t,x) \in B_\varepsilon(\sigma(t, y(t,x))) \, . \tag{9}$$

В силу теореми Мазура зі слабкої збіжності $l_{\sigma_n} \to l_\sigma$ в $L^1(0,T;H)$ маємо існування опуклих комбінацій, що збігаються сильно, тобто $\exists\, S_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(n)} l_{\sigma_{n_i}}$, $\lambda_i^{(n)} \ge 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(n)} = 1$, $S_n \to l_\sigma$ в $L^1(0,T;H)$. Отже, по деякій підпослідовності $S_n(t,x) \to l_\sigma(t,x)$ м.с. Тоді з (9) в силу довільності $\varepsilon > 0$ отримуємо

$$l_\sigma(t,x) \in \sigma(t, y(t,x)) \, , \tag{10}$$

і шукана властивість доведена. Теорема доведена.

Висновки

В роботі для параболічного включення, многозначна права частина якого є напівнеперервною зверху по фазовій змінній, лише за умов глобальної розв'язності і дисипативності доведено, що його сильні розв'язки породжують сім'ю многозначних процесів, для якої в фазовому просторі існує компактний, інваріантний, стійкий глобальний атрактор.

Робота виконана при підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень (грант Ф25.1/047).

1. *Капустян О.В., Касьянов П.О.* Глобальний атрактор неавтономного включення з розривною правою частиною // УМЖ. – 2003. – Т. 55, № 11. – С. 1467–1475. 2. *Толстоногов А.А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. – Н.:Наука, 1986. 3. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Evolution equations and their trajectory attractors // J.Math. Pures Appl. – 1997. – v.76, n.10. – P. 913–964. 4. *Kapustyan O.V., Valero J.* On the connectedness and asymptotic behavior of solutions of reaction-diffusion systems // J. Math. Anal. Appl. – 2006, vol.323, P. 614–633. 5. *Silvestrov D.* Limit theorems for randomly stopped stochastic processes. – Springer, 2003.

Надійшла до редколегії 04.12.08

УДК 517.9

І. Лакоза, асп., В. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

ВПЛИВ ЗОВНІШНЬОГО ЗБУРЕННЯ НА ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ГАРМОНІЙНИХ КОЛИВАНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Досліджено властивості розв'язків рівняння гармонійних коливань при наявності довготривалих (у часі) зовнішніх сил імпульсної природи в залежності від величин імпульсної дії. Отримано умови збільшення (зменшення)амплітуди коливань та умови існування періодичних розв'язків.

Properties of solution to harmonic equation with long lasting pulses are studied. Conditions of increase (decrease) of the oscillation amplitude and conditions for existence of periodic solutions are obtained.

1. Вступ

Останнім часом значний інтерес становить дослідження систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією [3]. Такі системи виникають в якості математичних моделей різноманітних задач практики, для яких притаманні процеси або зовнішні збурення, тривалістю яких можна знехтувати при складанні їх математичних моделей. Як показано в [1–3], на властивості розв'язків диференціальних рівнянь з імпульсною дією суттєвий вплив можуть виявляти величини та моменти імпульсної дії (умови імпульсної дії). Разом з тим, при вивченні деяких важливих задач практики, наприклад, поведінки клітин головного мозку людей, що страждають на хворобу Паркінсона, досліджується вплив електричних імпульсів на поведінку нейронів головного мозку, при цьому такі імпульси, на відміну від згаданих вище задач, тривають порівняно довго [4], тобто їх тривалістю не можна нехтувати.

В даній статті розглядається задача про поведінку неперервно диференційованих розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з переключенням [3], коли в різних областях розширеного фазового простору поведінка розглядуваної системи описується диференціальним рівнянням з різними правими частинами.

2. Постановка задачі

Розглянемо послідовність моментів часу $\{t_k\},\ k \in N$, для яких виконується умова $t_{k+1} - t_k \ge \delta$ для деякого $\delta > 0$, де $t_{2k-1},\ k \in N$, вважаються початком дії імпульсу, а $t_{2k},\ k \in N$, — кінцем дії імпульсу. При цьому припускаємо, що тривалість імпульсу $h_k = t_{2k+1} - t_{2k} > 0$. Нехай дана система описується лінійним диференціальним рівнянням ІІ-го порядку вигляду:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t), \tag{1}$$

де $f(t) = f_{2k}(t) = a_{2k} + b_{2k}\cos(\omega_{2k} t + \varphi_{2k})$ при $t \in I = \bigcup_{k \in N} [t_{2k-1}, t_{2k})$ та $f(t) = 0$ при відсутності дії імпульсу, тобто при $t \notin I$. Тут дійсні величини $a_{2k}, b_{2k}, \varphi_{2k}, \omega_{2k},\ k \in N$, вважаються заданими апріорі і задовольняють такі умови: $|a_{2k}| + |b_{2k}| > 0$, $\varphi_{2k} \in [0, 2\pi), \omega_{2k} > 0,\ \omega_{2k} \ne \omega,\ k \in N$.

Таким чином, поведінка розглядуваної системи описується диференціальними рівняннями

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_{2k}(t), \text{ якщо } t \in I, \tag{2}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \text{ якщо } t \notin I. \tag{3}$$

Рівняння (2), (3) описують поведінку гармонійного осцилятора, який зазнає імпульсної дії в певні (наперед визначені) моменти часу і при цьому враховується тривалість імпульсної дії. Згідно з [3] ця система має єдиний розв'язок.

3. Опис основного результату

З'ясуємо який вплив на властивості розв'язку задачі (2), (3) виявляють умови імпульсної дії, тобто величини $a_{2k}, b_{2k}, \varphi_{2k}, \omega_{2k},\ k \in N$. Для цього запишемо формулу для загального розв'язку рівняння (1). Якщо t – деякий довільний фіксований момент часу такий, що $t < t_1$, то значення розв'язку рівняння (1) в момент часу t визначається формулою $x_0(t) = x_0 \cos\omega(t - t_0) - \frac{1}{\omega}\dot{x}_0 \sin\omega(t - t_0)$, де $x_0(t_0) = x_0,\ \dot{x}_0(t_0) = \dot{x}_0$ – початкові значення розв'язку. При цьому вважається, що $t_0 < t_1$. Якщо ж t – такий момент часу, що $t \ge t_1$, то існує таке натуральне число n, що $t_n \le t$, але $t_{n+1} > t$. Згідно [1, 3] задача (2), (3) має єдиний розв'язок $x(t)$, який можна записати за допомогою такої формули:

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(-\frac{a_{2k}}{\omega^2} - \frac{b_{2k}}{\omega^2 - \omega_{2k}^2}\cos(\omega_{2k} t_{2k} + \varphi_{2k})\right)\cos\omega(t - t_{2k-1})\right] + \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\frac{\omega_{2k}}{\omega}\frac{b_{2k}}{\omega^2 - \omega_{2k}^2}\sin(\omega_{2k} t_{2k} + \varphi_{2k})\right)\sin\omega(t - t_{2k-1})\right] + \tag{4}$$

де $$\Phi(t) = \chi_n(t)\left[\left(-\frac{a_{2n}}{\omega^2} - \frac{b_{2n}}{\omega^2 - \omega_{2n}^2}\cos(\omega_{2n} t_{2n-1} + \varphi_{2n})\right)\cos\omega(t - t_{2n-1}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_{2n}}{\omega}\frac{b_{2n}}{\omega^2 - \omega_{2n}^2}\sin(\omega_{2n} t_{2n-1} + \varphi_{2n})\sin\omega(t - t_{2n-1}) + \frac{a_{2n}}{\omega^2} + \frac{b_{2n}}{\omega^2 - \omega_{2n}^2}\cos(\omega_{2n} t + \varphi_{2n})\right],$$

$\chi_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_{2n-1}; t_{2n}) \\ 0, & t \notin [t_{2n-1}; t_{2n}) \end{cases}$ – характеристична функція множини $[t_{2n-1}; t_{2n})$.

Формула (4) дає можливість проаналізувати властивості розв'язків задачі (2), (3) в залежності від параметрів – величин, моментів і характеристик імпульсної дії. Дослідимо, як змінюється частота та амплітуда коливань під час дії імпульсу та після його закінчення. Розглянемо спочатку випадок, коли $b_{2k} = 0$, тобто $f_{2k}(t) = a_{2k}$. У цьому випадку імпульси мають сталу величину і резонанси в системі відсутні. З формули (4) випливає, що частота коливань системи залишається сталою, як під час дії імпульсу, так і після його закінчення, і співпадає із власною частотою гармонійних коливань ω, а квадрат амплітуди коливань змінюватиметься за таким законом:

$$A^2 = \begin{cases} \left(x_o - \dfrac{a_2}{\omega^2}\cos\omega t_1\right)^2 + \left(\dot{x}_o - \dfrac{a_2}{\omega^2}\sin\omega t_1\right)^2, & t \in [t_1, t_2), \\ \left(x_o - \dfrac{a_2}{\omega^2}\cos\omega t_1 + \dfrac{a_2}{\omega^2}\cos\omega t_2\right)^2 + \left(\dot{x}_o - \dfrac{a_2}{\omega^2}\sin\omega t_1 + \dfrac{a_2}{\omega^2}\sin\omega t_2\right)^2, & t \in [t_2, t_3), \\ \cdots & \\ \left(x_o + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(-1)^k \dfrac{a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]}}{\omega^2}\cos\omega t_k\right)^2 + \left(\dot{x}_o + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(-1)^k \dfrac{a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]}}{\omega^2}\sin\omega t_k\right)^2, & t \in [t_{n-2}, t_{n-1}), \\ \cdots & \end{cases} \tag{5}$$

де $[z]$ – ціла частина числа z.

З (5) випливає, що коливання в розглядуваній системі відбуваються з однією і тією ж самою частотою ω. При цьому, на кожному з інтервалів, що не містить моментів імпульсної дії, амплітуда коливань є сталою. Нехай A_n – амплітуда коливань на інтервалі $[t_n, t_{n+1})$. Порівняємо амплітуди на перших трьох проміжках. Нехай A_1 – амплітуда коливань на проміжку $[t_0, t_1)$ (без дії імпульсу), A_2 – амплітуда коливань на проміжку $[t_1, t_2)$ (коли діє перший імпульс), A_3 – амплітуда коливань на проміжку $[t_2, t_3)$ (після закінчення дії першого імпульсу). Аналогічно позначимо A_n, A_{n+1}, A_{n+2} – миттєві амплітуди коливань на проміжках $[t_{n-1}, t_n)$, $[t_n, t_{n+1})$ та $[t_{n+1}, t_{n+2})$, відповідно. З'ясуємо умови, за яких амплітуда коливань системи з часом зростає, зменшується або ж залишається без змін. Для різниці квадратів амплітуд маємо

$$A_3^2 - A_2^2 = \left(\frac{a_2}{\omega^2}\right)^2 + 2x_0 \frac{a_2}{\omega^2}\cos\omega t_2 + 2\dot{x}_0 \frac{a_2}{\omega^2}\sin\omega t_2 - 2\left(\frac{a_2}{\omega^2}\right)^2 \cos\omega(t_2 - t_1)\,.$$

Звідси випливає, що амплітуда коливань в результаті дії імпульсу (в залежності від його параметрів) може як збільшуватися, так і зменшуватися. Знайдемо умови на параметри імпульсу при виконанні яких амплітуда коливань буде збільшуватися (зменшуватися). Для цього запишемо вираз для квадрата амплітуди коливань, враховуючи, що $t \in [t_n; t_{n+1})$. Маємо

$$A_n^2 = x_0^2 + \dot{x}_0^2 + 2\frac{x_0}{\omega^2}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]}\cos\omega t_k + 2\frac{\dot{x}_0}{\omega^2}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]}\sin\omega t_k + \frac{1}{\omega^4}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]}\cos\omega t_k\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{\omega^4}\sum_{\substack{k,m=1,\\ k\neq m}}^{n-1}(-1)^{k+m} a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]}\cos\omega t_k \cos\omega t_m + \frac{1}{\omega^4}\sum_{\substack{k,m=1,\\ k\neq m}}^{n-1}(-1)^{k+m} a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]}\sin\omega t_k \sin\omega t_m +$$

$$+\frac{1}{\omega^4}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]}\sin\omega t_k\right)^2 = x_0^2 + \dot{x}_0^2 + \frac{1}{\omega^4}\sum_{k=1}^{n-1} a^2_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]} + \frac{1}{\omega^4}\sum_{\substack{k,m=1,\\ k\neq m}}^{n-1}(-1)^{k+m} a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]}\cos\omega(t_k - t_m) +$$

$$+2\frac{x_0}{\omega^2}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]}\cos\omega t_k + 2\frac{\dot{x}_0}{\omega^2}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k a_{2\left[\frac{k+1}{2}\right]}\sin\omega t_k.$$

Тоді

$$A_{n+1}^2 - A_n^2 = \frac{a_{2\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{\omega^2}\left(\frac{1}{\omega^2}a_{2\left[\frac{n+1}{2}\right]} + 2x_0(-1)^n\cos\omega t_n + 2\dot{x}_0(-1)^n\sin\omega t_n + \frac{1}{\omega^2}\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^{n+m}a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]}\cos\omega(t_n - t_m)\right), \quad (6)$$

звідки знаходимо умови, за яких амплітуда коливань буде змінюватися. Позначимо:

$$Q_n^2 = \left[\left(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n+m}a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]}\cos\omega(t_n - t_m)}{\omega^2}\right) + (-1)^n 2x_0\right]^2 + \left[\left(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n+m}a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]}\sin\omega(t_n - t_m)}{\omega^2}\right) + (-1)^n 2\dot{x}_0\right]^2, \quad (7)$$

$$P_{1n} = \left(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n+m}a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]}\cos\omega(t_n - t_m)}{\omega^2}\right) + (-1)^n 2x_0, P_{2n} = \left(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n+m}a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]}\sin\omega(t_n - t_m)}{\omega^2}\right) + (-1)^n 2\dot{x}_0.$$

Порівнявши квадрати амплітуд на проміжках $[t_{n-1}, t_n)$ та $[t_n, t_{n+1})$, знаходимо, що амплітуда коливань системи зростає (в результаті дії імпульсу) при виконанні умови

$$a_{2\left[\frac{n+1}{2}\right]} > \omega^4 Q_n \cos(\omega t_n + \psi_n + \pi)\,, \quad (8)$$

де $\psi_n \in [0; 2\pi)$ – миттєва фаза (значення фази коливань в момент часу t), яка визначається з умов

$$\cos\psi_n = \frac{P_{1n}}{Q_n}, \quad \sin\psi_n = \frac{P_{2n}}{Q_n}, \text{ де } Q_n > 0$$

Нагадаємо, що a_{2n} в (8) – один з параметрів імпульсної дії.

Порівняємо тепер квадрати амплітуди на проміжках $[t_n, t_{n+1})$ та $[t_{n+1}, t_{n+2})$. Маємо:

$$A_{n+2}^2 - A_{n+1}^2 = \frac{a_{2\left[\frac{n+2}{2}\right]}}{\omega^2}\left(\frac{1}{\omega^2} a_{2\left[\frac{n+2}{2}\right]} + 2x_0(-1)^{n+1}\cos\omega t_{n+1} + 2\dot{x}_0(-1)^{n+1}\sin\omega t_{n+1} + \frac{1}{\omega^2}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{n+m+1} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]}\cos\omega(t_{n+1}-t_m)\right),$$

звідки знаходимо умови, коли ця різниця більша нуля:

$$\frac{a_{2\left[\frac{n+2}{2}\right]}}{\omega^2}\left(\frac{1}{\omega^2} a_{2\left[\frac{n+2}{2}\right]} + 2x_0(-1)^{n+1}\cos\omega t_{n+1} + 2\dot{x}_0(-1)^{n+1}\sin\omega t_{n+1} + \frac{1}{\omega^2}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{n+m+1} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]}\cos\omega(t_{n+1}-t_m)\right) > 0, \quad (9)$$

тобто при виконанні нерівності (9) амплітуда зростає при переході t з $[t_n, t_{n+1})$ на $[t_{n+1}, t_{n+2})$. Звідси випливає, що не залежно від дії імпульсу, амплітуда може як збільшуватись (при виконанні нерівності (9)), так і зменшуватись (при невиконанні (9))

Умову (9) можна подати таким чином: $a_{2\left[\frac{n+2}{2}\right]} > \omega^4 Q_{n+1}\cos(\omega t_{n+1} + \psi_{n+1} + \pi)$,

де $\psi_{n+1} \in [0;2\pi)$ – миттєва фаза коливань на проміжку $[t_{n+1}, t_{n+2})$, яка визначається з рівнянь

$\cos\psi_{n+1} = \frac{P_{n+1}^{(1)}}{Q_{n+1}}$; $\sin\psi_{n+1} = \frac{P_{n+1}^{(2)}}{Q_{n+1}}$, де $Q_{n+1} > 0$, причому

$$Q_{n+1}^2 = \left[\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{n+m+1} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]}\cos\omega(t_{n+1}-t_m)}{\omega^2}\right) + (-1)^{n+1}2x_0\right]^2 + \left[\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{n+m+1} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]}\sin\omega(t_{n+1}-t_m)}{\omega^2}\right) + (-1)^{n+1}2\dot{x}_0\right]^2,$$

$$P_{1n+1} = \left(\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{n+m+1} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]}\cos\omega(t_{n+1}-t_m)}{\omega^2}\right) + (-1)^{n+1}2x_0,\ P_{2n+1} = \left(\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{n+m+1} a_{2\left[\frac{m+1}{2}\right]}\sin\omega(t_{n+1}-t_m)}{\omega^2}\right) + (-1)^{n+1}2\dot{x}_0.$$

У випадку, коли $f_{2n}(t) = a_{2n} + b_{2n}\cos(\omega_{2n}t + \varphi_{2n})$ розв'язок задачі (2), (3) на проміжку $[t_{2n-1}; t_{2n})$ залежить від частот ω та ω_{2n}, тобто від власної частоти системи і частоти імпульсної дії. При цьому не можна скористатися поняттям амплітуди коливань, а можна лише розглядати питання про максимальне та мінімальне значення розв'язку $x(t)$. На проміжку $[t_{2n}; t_{2n+1})$, коли імпульсна дія відсутня, коливання відбуваються лише з власною частотою ω системи (2), (3).

Максимум (мінімум) функції на проміжку $[t_{n-1}; t_n)$ буде досягатись або на кінцях цього проміжку, тобто в точках t_{n-1} або в t_n, або в деякій внутрішній точці t_* де

$$t^* = \frac{-\sqrt{p\omega - \varphi_{2n}\omega + \phi_n\omega_{2n} + \arccos\left(\frac{Z_n(t)\sin p}{\sqrt{L_n^2 + M_n^2}}\right)\omega_{2n}} + \varphi_{2n}}{\omega_{2n}}, \quad p \in Z, \quad Z_n(t) = \chi_n(t)\omega_{2n}\frac{b_{2n}}{\omega^2 - \omega_{2n}^2},$$

$$\cos\phi_n = \frac{M_n}{\sqrt{L_n^2 + M_n^2}}, \quad \sin\phi_n = \frac{L_n}{\sqrt{L_n^2 + M_n^2}}, \ \phi_n \in [0,2\pi),$$

$$L_n = \dot{x}_0 + \omega\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\frac{a_{2k}}{\omega^2} + \frac{b_{2k}}{\omega^2 - \omega_{2k}^2}\cos(\omega_{2k}t_{2k} + \varphi_{2k})\right)\left(\cos\omega t_{2k-1} + \cos\omega t_{2k}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\omega_{2k}}{\omega}\frac{b_{2k}}{\omega^2 - \omega_{2k}^2}\sin(\omega_{2k}t_{2k} + \varphi_{2k})\right)\left(\sin\omega t_{2k-1} + \sin\omega t_{2k}\right)\right] +$$

$$\left. + \chi_n(t)\left(\left(\frac{a_{2n}}{\omega^2} + \frac{b_{2n}}{\omega^2 - \omega_{2n}^2}\cos(\omega_{2n}t_{2n-1} + \varphi_{2n})\right)\cos\omega t_{2n-1} + \frac{\omega_{2n}}{\omega}\frac{b_{2n}}{\omega^2 - \omega_{2n}^2}\sin\omega t_{2n-1}\right)\right)$$

$$M_n = x_0 + \omega\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\frac{a_{2k}}{\omega^2} + \frac{b_{2k}}{\omega^2 - \omega_{2k}^2}\cos(\omega_{2k}t_{2k} + \varphi_{2k})\right)\left(\sin\omega t_{2k-1} + \sin\omega t_{2k}\right) -\right.\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\omega_{2k}}{\omega}\frac{b_{2k}}{\omega^2 - \omega_{2k}^2}\sin(\omega_{2k}t_{2k} + \varphi_{2k})\right)\left(\cos\omega t_{2k-1} + \cos\omega t_{2k}\right)\right] +$$

$$\left.-\chi_n(t)\left(\left(\frac{a_{2n}}{\omega^2} + \frac{b_{2n}}{\omega^2 - \omega_{2n}^2}\cos(\omega_{2n}t_{2n-1} + \varphi_{2n})\right)\sin\omega t_{2n-1} + \frac{\omega_{2n}}{\omega}\frac{b_{2n}}{\omega^2 - \omega_{2n}^2}\cos\omega t_{2n-1}\right)\right)$$

4. Періодичні розв'язки

Розглянемо питання про періодичні розв'язки задачі (2),(3). Справедлива така лема.

Лема. *Нехай задача (2), (3) має T – періодичний розв'язок $x^*(t) \in C^{(\infty)}(R)$. Тоді існує таке натуральне число m, що для всіх $p = 1, 2,..., -1, -2,...$ виконуються умови:*

$$f_{2p+2m} = f_{2p},\ t_{p+m} = t_p + T \tag{10}$$

Умови (10) є необхідними умовами існування періодичного розв'язку задачі (2), (3). Вважаємо, що ці умови виконуються і розглянемо питання про відшукання періодичного розв'язку задачі (2), (3). В силу довільності t з рівності $x(t+T) = x(t)$ і формули для загального розв'язку (4) знаходимо:

$$\begin{gathered}
x_0\left(\cos\omega(T - t_0) - \cos\omega t_0\right) + \dot{x}_0\left(\sin\omega(T - t_0) - \sin\omega t_0\right) = \\
= \sum_{k=1}^{m}\left[-\frac{1}{\omega^2 - \omega_{2k}^2}\left(-\frac{\omega_{2k}^2}{\omega^2}a_{2k} + f_{2k}(t_{2k})\right)\left(\cos\omega(T - t_{2k-1}) + \cos\omega(T - t_{2k})\right)\right] + \\
+ \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{\omega\left(\omega^2 - \omega_{2k}^2\right)}\dot{f}_{2k}(t_{2k})\left(\sin\omega(T - t_{2k-1}) + \sin\omega(T - t_{2k})\right)\right], \\
x_0\left(-\sin\omega(T - t_0) + \sin\omega t_0\right) + \dot{x}_0\left(\cos\omega(T - t_0) - \cos\omega t_0\right) = \\
= -\sum_{k=1}^{m}\left[-\frac{1}{\omega^2 - \omega_{2k}^2}\left(-\frac{\omega_{2k}^2}{\omega^2}a_{2k} + f_{2k}(t_{2k})\right)\left(\sin\omega(T - t_{2k-1}) + \sin\omega(T - t_{2k})\right)\right] + \\
+ \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{\omega\left(\omega^2 - \omega_{2k}^2\right)}\dot{f}_{2k}(t_{2k})\left(\cos\omega(T - t_{2k-1}) + \cos\omega(T - t_{2k})\right)\right].
\end{gathered} \tag{11}$$

Розглянемо визначник системи (11). Маємо:

$$\Delta = \frac{1}{\omega}\begin{Vmatrix}\cos\omega(T - t_0) - \cos\omega t_0 & \sin\omega(T - t_0) + \sin\omega t_0 \\ \left(\sin\omega(T - t_0) + \sin\omega t_0\right) & -\left(\cos\omega(T - t_0) - \cos\omega t_0\right)\end{Vmatrix} = -\frac{4}{\omega}\sin^2\frac{\omega T}{2}. \tag{12}$$

Якщо $\omega T \neq 2\pi q$ для всіх натуральних q, то з системи лінійних алгебраїчних рівнянь (11) можна однозначно найти початкові значення x_0 та $\dot{x}_0$, при яких задача (2), (3) має єдиний періодичний розв'язок.

$$x_0 = \frac{1}{-2\sin\frac{\omega T}{2}}\left[\sum_{k=1}^{m} - \frac{1}{\omega^2 - \omega_{2k}^2}\left(-\frac{\omega_{2k}^2}{\omega^2}a_{2k} + f_{2k}(t_{2k})\right)\left(\sin\omega\left(\frac{3T}{2} - t_{2k-1} - t_0\right) + \sin\omega\left(\frac{3T}{2} - t_{2k} - t_0\right)\right) -\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\omega\left(\omega^2 - \omega_{2k}^2\right)}\dot{f}_{2k}(t_{2k})\left(\cos\omega\left(\frac{3T}{2} - t_{2k-1} - t_0\right) + \cos\omega\left(\frac{3T}{2} - t_{2k} - t_0\right)\right)\right],$$

$$\dot{x}_0 = \frac{1}{-\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega T}{2}}\left[\sum_{k=1}^{m} - \frac{1}{\omega^2 - \omega_{2k}^2}\left(-\frac{\omega_{2k}^2}{\omega^2}a_{2k} + f_{2k}(t_{2k})\right)\left(\cos\omega\left(\frac{3T}{2} - t_{2k-1} - t_0\right) + \cos\omega\left(\frac{3T}{2} - t_{2k} - t_0\right)\right) -\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\omega\left(\omega^2 - \omega_{2k}^2\right)}\dot{f}_{2k}(t_{2k})\left(\sin\omega\left(\frac{3T}{2} - t_{2k-1} - t_0\right) + \sin\omega\left(\frac{3T}{2} - t_{2k} - t_0\right)\right)\right].$$

Якщо ж $\omega\left(T - 2t_0\right) \neq 2\pi q$ для деякого натурального q, то з системи лінійних алгебраїчних рівнянь (11) не можна однозначно знайти початкові значення x_0 та $\dot{x}_0$. Відповідно задача (2), (3) має двопараметричне сімейство періодичних розв'язків. При цьому характеристики (величини) імпульсної дії повинні задовольняти такі додаткові умови:

$$\sum_{k=1}^{m}\left[-\frac{1}{\omega^2-\omega_{2k}^2}\left(-\frac{\omega_{2k}^2}{\omega^2}a_{2k}+f_{2k}(t_{2k})\right)\left(\cos\omega(T-t_{2k-1})+\cos\omega(T-t_{2k})\right)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{\omega\left(\omega^2-\omega_{2k}^2\right)}\dot{f}_{2k}(t_{2k})\left(\sin\omega(T-t_{2k-1})+\sin\omega(T-t_{2k})\right)\right]=$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\left[-\frac{1}{\omega^2-\omega_{2k}^2}\left(-\frac{\omega_{2k}^2}{\omega^2}a_{2k}+f_{2k}(t_{2k})\right)\left(\cos\omega(T-t_{2k-1})+\cos\omega(T-t_{2k})\right)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{\omega\left(\omega^2-\omega_{2k}^2\right)}\dot{f}_{2k}(t_{2k})\left(\sin\omega(T-t_{2k-1})+\sin\omega(T-t_{2k})\right)\right]=0.$$

В цьому випадку початкові дані x_0 та $\dot{x}_0$ для періодичного розв'язку можуть бути обрані довільним чином.

5. Висновок

В роботі розглянуто задачу про поведінку неперервно диференційованих розв'язків рівняння гармонійних коливань з переключенням, яка в певному сенсі є системою з імпульсною дією, коли враховується тривалість її дії.

Детально вивчено два різних випадки імпульсної дії: так звані П-подібні імпульси та більш загальний випадок – синусо-подібні імпульси. На основі аналізу формули для загального розв'язку отримано умови збільшення (зменшення) амплітуди коливань та умови існування періодичних розв'язків.

1. *Самойленко А.М., Самойленко В.Г., Собчук В.В.* Про періодичні розв'язки рівняння нелінійного осцилятора з імпульсною дією // Укр. мат. журн. – 1999. – 51, №6. –- С. 827–834. 2. *Самойленко В.Г., Елгондиев К.К.* Про періодичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Укр. мат. журн. – 1997. – 49, №1. – С. 141–148. 3. *Самойленко М.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К., 1987 4. *Terman D., Rubin J.E., Yew A.C., Wilson C.J.* Activity patterns in a model for the subthalamopallidal network of the basal ganglia // J. Neuroscience. – 2002. – V. 22, №7. – P. 2963–2976.

Надійшла до редколегії 28.09.09

УДК 517.9

Ю.Самойленко, канд. фіз.-мат. наук
yusam@univ.kiev.ua

УМОВИ ІСНУВАННЯ РОЗРИВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглядається питання про існування розривних розв'язків квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами. Використовуючи асимптотичний розв'язок для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами, для якого розглядуване рівняння є незбуреним, отримано умови (умови типу Гюгоніо) існування розривних розв'язків для згаданого вище квазілінійного рівняння.

Problem on existence discontinuous solutions to quasilinear partial differential equation with variable coefficients is studied. Using asymptotic solution for singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients being perturbed for the one, conditions of existence (so called Huhoniout type conditions) discontinuous solutions to quasilinear equation mentioned above are proposed.

1. Вступ

При розгляді сингулярно збурених рівнянь часто виникає задача побудови розривних розв'язків рівнянь, які є породжуючими для них. При цьому така задача виникає у зв'язку з тим, що розв'язок збуреного рівняння при прямуванні малого параметра до нуля, прямує до деякої розривної функції, яка і є розв'язком незбуреного рівняння. Прикладом подібної задачі може бути рівняння Бюргерса вигляду [4]

$$u_t+uu_x-\varepsilon u_{xx}=0,\quad x\in\mathbf{R},\quad t\in[0;T], \tag{1}$$

яке описує рух хвиль рідини для випадку малої дисперсії. Цілком природно виникає питання про поведінку розв'язків рівняння (1), коли параметр ε прямує до нуля. Частинним розв'язком цього рівняння є функція

$$u(x,t,\varepsilon)=2a\left(1-th\left(\frac{a(x-\varphi(t))}{\varepsilon}\right)\right), \tag{2}$$

де $\varphi(t)=2at$, $a>0$ – деяка стала.

При $\varepsilon\to 0$ функція $u(x,t,\varepsilon)$ поточково збігається до розривної функції $u(x,t)$:

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & x>\varphi(t),\\ 4a, & x<\varphi(t).\end{cases}$$

Тому, зважаючи на важливість умов існування розривних розв'язків породжуючих рівнянь, проблему побудови таких розв'язків можна розглядати як окрему задачу. Слід зауважити, що проблема побудови розривних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними активно досліджувалась багатьма математиками XX–ого століття. Як відомо, згідно класичної теореми Коші-Ковалевської для диференціальних рівнянь з частинними похідними в нормальному вигляді аналітичний розв'язок задачі Коші існує в деякому околі поверхні, на якій задано початкові умови. Тому при розгляді задачі Коші для нелінійних рівнянь з гладкими або розривними початковими умовами на деякому (часовому) інтервалі необхідна спеціальна постановка таких задач. Питання постановки таких узагальнених задач Коші для згаданих рівнянь були розглянуті І.Г.Петровським в [4] та згодом О.А.Олійник в [3].