$$\sum_{k=1}^{m}\left[-\frac{1}{\omega^2-\omega_{2k}^2}\left(-\frac{\omega_{2k}^2}{\omega^2}a_{2k}+f_{2k}(t_{2k})\right)\left(\cos\omega(T-t_{2k-1})+\cos\omega(T-t_{2k})\right)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{\omega\left(\omega^2-\omega_{2k}^2\right)}\dot{f}_{2k}(t_{2k})\left(\sin\omega(T-t_{2k-1})+\sin\omega(T-t_{2k})\right)\right]=$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\left[-\frac{1}{\omega^2-\omega_{2k}^2}\left(-\frac{\omega_{2k}^2}{\omega^2}a_{2k}+f_{2k}(t_{2k})\right)\left(\cos\omega(T-t_{2k-1})+\cos\omega(T-t_{2k})\right)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{\omega\left(\omega^2-\omega_{2k}^2\right)}\dot{f}_{2k}(t_{2k})\left(\sin\omega(T-t_{2k-1})+\sin\omega(T-t_{2k})\right)\right]=0.$$

В цьому випадку початкові дані x_0 та $\dot{x}_0$ для періодичного розв'язку можуть бути обрані довільним чином.

5. Висновок

В роботі розглянуто задачу про поведінку неперервно диференційованих розв'язків рівняння гармонійних коливань з переключенням, яка в певному сенсі є системою з імпульсною дією, коли враховується тривалість її дії.

Детально вивчено два різних випадки імпульсної дії: так звані П-подібні імпульси та більш загальний випадок – синусо-подібні імпульси. На основі аналізу формули для загального розв'язку отримано умови збільшення (зменшення) амплітуди коливань та умови існування періодичних розв'язків.

1. *Самойленко А.М., Самойленко В.Г., Собчук В.В.* Про періодичні розв'язки рівняння нелінійного осцилятора з імпульсною дією // Укр. мат. журн. – 1999. – 51, №6. –- С. 827–834. 2. *Самойленко В.Г., Елгондиев К.К.* Про періодичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Укр. мат. журн. – 1997. – 49, №1. – С. 141–148. 3. *Самойленко М.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К., 1987 4. *Terman D., Rubin J.E., Yew A.C., Wilson C.J.* Activity patterns in a model for the subthalamopallidal network of the basal ganglia // J. Neuroscience. – 2002. – V. 22, №7. – P. 2963–2976.

Надійшла до редколегії 28.09.09

УДК 517.9

Ю.Самойленко, канд. фіз.-мат. наук
yusam@univ.kiev.ua

УМОВИ ІСНУВАННЯ РОЗРИВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглядається питання про існування розривних розв'язків квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами. Використовуючи асимптотичний розв'язок для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами, для якого розглядуване рівняння є незбуреним, отримано умови (умови типу Гюгоніо) існування розривних розв'язків для згаданого вище квазілінійного рівняння.

Problem on existence discontinuous solutions to quasilinear partial differential equation with variable coefficients is studied. Using asymptotic solution for singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients being perturbed for the one, conditions of existence (so called Huhoniout type conditions) discontinuous solutions to quasilinear equation mentioned above are proposed.

1. Вступ

При розгляді сингулярно збурених рівнянь часто виникає задача побудови розривних розв'язків рівнянь, які є породжуючими для них. При цьому така задача виникає у зв'язку з тим, що розв'язок збуреного рівняння при прямуванні малого параметра до нуля, прямує до деякої розривної функції, яка і є розв'язком незбуреного рівняння. Прикладом подібної задачі може бути рівняння Бюргерса вигляду [4]

$$u_t+uu_x-\varepsilon u_{xx}=0,\quad x\in\mathbf{R},\quad t\in[0;T], \tag{1}$$

яке описує рух хвиль рідини для випадку малої дисперсії. Цілком природно виникає питання про поведінку розв'язків рівняння (1), коли параметр ε прямує до нуля. Частинним розв'язком цього рівняння є функція

$$u(x,t,\varepsilon)=2a\left(1-th\left(\frac{a(x-\varphi(t))}{\varepsilon}\right)\right), \tag{2}$$

де $\varphi(t)=2at$, $a>0$ – деяка стала.

При $\varepsilon\to 0$ функція $u(x,t,\varepsilon)$ поточково збігається до розривної функції $u(x,t)$:

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & x>\varphi(t),\\ 4a, & x<\varphi(t).\end{cases}$$

Тому, зважаючи на важливість умов існування розривних розв'язків породжуючих рівнянь, проблему побудови таких розв'язків можна розглядати як окрему задачу. Слід зауважити, що проблема побудови розривних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними активно досліджувалась багатьма математиками ХХ–ого століття. Як відомо, згідно класичної теореми Коші-Ковалевської для диференціальних рівнянь з частинними похідними в нормальному вигляді аналітичний розв'язок задачі Коші існує в деякому околі поверхні, на якій задано початкові умови. Тому при розгляді задачі Коші для нелінійних рівнянь з гладкими або розривними початковими умовами на деякому (часовому) інтервалі необхідна спеціальна постановка таких задач. Питання постановки таких узагальнених задач Коші для згаданих рівнянь були розглянуті І.Г.Петровським в [4] та згодом О.А.Олійник в [3].

© Ю.Самойленко, 2009

В [6] Е. Хопф для побудови розривних розв'язків для рівнянь з частинними похідними запропонував метод "зникаючої в'язкості", коли розв'язок розглядуваного рівняння шукається як границя при $\varepsilon \to 0$ розв'язку $u(x,t,\varepsilon)$ деякого іншого сингулярно збуреного рівняння, яке при $\varepsilon = 0$ співпадає з досліджуваним рівнянням. Метод "зникаючої в'язкості" використано в [2] для вивчення рівняння вигляду

$$\rho_1 u_t + (\rho_2 + \rho_3 u)u_x + \rho_4 u = 0, \qquad (3)$$

де $\rho_j^0 \le \rho_j(x,t) \le \rho_j^1$; ρ_j^0, ρ_j^1, $j = \overline{1,4}$, – деякі такі сталі, що $\rho_1^0 > 0$, $\rho_3^0 > 0$; $\rho_{3x}(x,t) \le 0$, $(\rho_1\rho_3^{-3})_x(x,t) \ge 0$, та запропоновано алгоритм побудови так званого "нескінченно вузького" розв'язку вигляду

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{j=1}^{M} A_j(t)\eta(x - \varphi_j(t)),$$

де $u_0(x,t)$, $\varphi_j(t)$ – нескінченно диференційовні функції, а

$$\eta(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \ne 0, \\ 1 & \xi = 0, \end{cases}$$

$M \ge 1$ – деяке фіксоване натуральне число.

Розглядаючи збурене для (3) рівняння вигляду

$$\rho_1 u_t + (\rho_2 + \rho_3 u)u_x + \rho_4 u = -\varepsilon^2 u_{xxx}, \qquad (4)$$

зі спеціальною початковою умовою, автори в [2] знаходять слабку границю (при $\varepsilon \to 0$) розв'язку рівняння (3) і таким чином визначають певні співвідношення для функцій $A_j(t)$, $\varphi_j(t)$, $j = \overline{1,M}$. Отримані ними співвідношення для функцій $A_j(t)$, $\varphi_j(t)$, $j = \overline{1,M}$, називаються умовами типу Гюгоніо [2].

Умовою Гюгоніо для розривної скачкоподібної функції $u(x,t)$ називають співвідношення на лінії $x = \varphi(t)$ розриву функції $u(x,t)$, що пов'язує швидкість $\varphi'(t)$ поширення хвилі та ліві і праві граничні значення функції $u(x,t)$. Зокрема, для рівняння Бюргерса (1) умова Гюгоніо для розривного розв'язку породжуючого для (1) рівняння:

$$u_t + uu_x = 0$$

записується у вигляді:

$$[u]\varphi_t = \frac{1}{2}[u^2], \qquad (5)$$

де $[u] = u(\varphi(t)+0,t) - u(\varphi(t)-0,t)$.

Умова (5) отримана з формули (2) для точного розв'язку рівняння Бюргерса. Але у загальному випадку, коли розв'язок збуреного рівняння в аналітичному вигляді побудувати неможливо, цей підхід застосувати не можна. Проте у таких випадках, для знаходження розривних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними можна скористатися формулами для асимптотичних розв'язків рівнянь, які є сингулярно збуреними для рівнянь, що розглядаються і з яких розглядуване рівняння може бути отримано шляхом переходу до границі, коли малий параметр прямує до нуля.

В даній статті розглядається задача про існування розривного розв'язку рівняння вигляду

$$a_0(x)u_t + b_0(x)uu_x = 0, \qquad (6)$$

де $a_0(x)$, $b_0(x)$ – нескінченно диференційовні функції, $x \in \mathbf{R}^1$, $t \in [0;T]$, яке є породжуючим рівнянням для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду [5, 7]

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x,\varepsilon)u_t + b(x,\varepsilon)uu_x, \qquad (7)$$

де функції $a(x,\varepsilon)$, $b(x,\varepsilon)$ мають вигляд

$$a(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\varepsilon^k, \quad b(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)\varepsilon^k,$$

$$t \in [0;T], \ a_k(x), \ b_k(x) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^1), \ k \ge 0.$$

2. Основні означення та припущення

Означення. *Нехай асимптотичний розв'язок рівняння*

$$L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon) = 0,$$

де диференціальний оператор $L_\varepsilon : \mathbf{C}^\infty \to \mathbf{C}^\infty$, *має вигляд*

$$u(x,t,\varepsilon) = Y_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad N \ge 1.$$

Тут функція $S = S(x,t) \in C^\infty(\mathbf{R}\times[0;T])$, *причому* $S_x|_\Gamma \ne 0$, $\Gamma = \{(x,t) \in \mathbf{R}\times[0;T], S(x,t) = 0\}$. *Будемо говорити, що асимптотичний розв'язок* $u(x,t,\varepsilon)$ *породжує при* $\varepsilon \to 0$ *скачкоподібну функцію* $u(x,t)$, *яка є розв'язком незбуреного рівняння*

$$L_0 u(x,t) = 0,$$

де $L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = L_0 u(x,t)$, *якщо виконується співвідношення*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\langle \frac{1}{\varepsilon} L_\varepsilon Y_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right), f(x)\right\rangle = \left\langle L_0 u(x,t), f(x)\right\rangle, \quad f\in C_0^\infty, \tag{8}$$

де скалярний добуток $<\cdot,\cdot>$ *визначено формулою*

$$< g(x), f(x) >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx.$$

При цьому співвідношення (8) називається умовою типу Гюгоніо.

Аналогічно до [1] позначимо за допомогою $G = G(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ – лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau)\in\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}$, для яких рівномірно за змінними (x,t) на кожному компакті $K\subset\mathbf{R}\times(0;T)$ для довільних невід'ємних цілих чисел n, m, q, α, виконуються такі дві умови:

1) має місце співвідношення

$$\lim_{\tau\to\infty}\tau^n \frac{\partial^{n+m+q+\alpha}}{\partial x^m \partial t^q \partial\tau^\alpha} f(x,t,\tau) = 0; \tag{9}$$

2) існує нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$ така, що

$$\lim_{\tau\to-\infty}\tau^n \frac{\partial^{n+m+q+\alpha}}{\partial x^m \partial t^q \partial\tau^\alpha} f(x,t,\tau) - f^-(x,t)) = 0, \quad (x,t)\in K. \tag{10}$$

Позначимо за допомогою $G_0 = G_0(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ лінійний підпростір в G функцій $f(x,t,\tau)$ таких, що додатково до умов (9), (10) рівномірно щодо (x,t) на кожному компакті $K\subset\mathbf{R}\times(0;T)$ справджується рівність

$$\lim_{\tau\to-\infty} f(x,t,\tau) = 0, \quad (x,t)\in K.$$

В [5] побудовано асимптотичний розв'язок рівняння (7) у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = Y_N(x,t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \tag{11}$$

де $Y_N(x,t,\tau,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau)\right)$, $\quad \tau = \dfrac{x-\varphi(t)}{\varepsilon}$.

Для регулярної частини асимптотики отримано систему диференціальних рівнянь вигляду

$$a_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial t} + b_0(x)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \tag{12}$$

$$a_0(x)\frac{\partial u_j}{\partial t} + b_0(x)u_0\frac{\partial u_j}{\partial x} + b_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial x}u_j = f_j(x,t,u_0,u_1,...,u_{j-1}), \quad j=\overline{1,N},$$

де функції $f_j(x,t,u_0,u_1,...,u_{j-1})$, $j=\overline{1,N}$, визначаються рекурентним чином.

Припускається, що рівняння (12) мають нескінченно диференційовний розв'язок.

Враховуючи співвідношення (12), можна знайти систему диференціальних рівнянь для визначення функцій сингулярної частини асимптотики $V_j(x,t,\tau)$, $j=\overline{0,N}$, яка спочатку використовується для визначення функцій $V_j(x,t,\tau)$, $j=\overline{0,N}$, на кривій розриву $x=\varphi(t)$, а потім ця система використовуються для продовження функцій $V_j(x,t,\tau)$, $j=\overline{0,N}$, в область $\Omega_\mu(\Gamma) = \{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T] : |x-\varphi(t)| < 2\mu\}$,
де μ – деяка стала. Крива розриву визначається як розв'язок певного звичайного диференціального рівняння, яке отримується з так званих умов ортогональності [5], що забезпечують розв'язність системи рівнянь для функцій $V_j(x,t,\tau)$, $j=\overline{0,N}$, в просторі $G = G(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$.

Функції $v_j = v_j(t,\tau) = V_j(x,t,\tau)|_{x=\varphi(t)}$, $j=\overline{0,N}$, є розв'язками системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3 v_0}{\partial\tau^3} + a_0(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{\partial v_0}{\partial\tau} - b_0(\varphi(t))\left[u_0(\varphi(t),t)\frac{\partial v_0}{\partial\tau} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\right] = 0,\\ \frac{\partial^3 v_j}{\partial\tau^3} + a_0(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{\partial v_j}{\partial\tau} - b_0(\varphi(t))\left[u_0(\varphi(t),t)\frac{\partial v_j}{\partial\tau} + \frac{\partial v_0}{\partial\tau}v_j + v_0\frac{\partial v_j}{\partial\tau}\right] = F_j(t,\tau),\end{gathered} \tag{13}$$

де $F_j(t,\tau) = F_j(t, V_0(x,t,\tau),...,V_{j-1}(x,t,\tau), u_0(x,t),...,u_j(x,t))|_{x=\varphi(t)}, j=\overline{1,N}$, визначаються рекурентним чином.

Розв'язок першого рівняння системи (13) в просторі G_0 записується у вигляді

$$v_0(t,\tau) = -3\frac{A(\varphi(t),t)}{b_0(\varphi(t))}ch^{-2}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{2}(\tau+C)\right),$$

при умові, що

$$A(\varphi(t),t) = -a_0(\varphi(t))\varphi'(t) + b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t),t) > 0. \tag{14}$$

Якщо $F_j(t,\tau)\in G_0$, $j\ge 1,$ то необхідною і достатньою умовою існування розв'язку системи рівнянь (13) в просторі $G=G(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ при $j\ge 1$ є умови ортогональності вигляду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_j(t,\tau)v_0(t,\tau)d\tau=0,\quad j\ge 1. \tag{15}$$

З (15) при $j=1$ можна отримати рівняння

$$\begin{aligned}&15a_0(\varphi(t))b_0(\varphi(t))\frac{d}{dt}A(\varphi(t),t)-20a_0(\varphi(t))b_0(\varphi(t))\varphi'(t)A(\varphi(t),t)+\\&+10b_0^2(\varphi(t))u'_{0x}(\varphi(t),t)A(\varphi(t),(t))+10A(\varphi(t),t)b_0(\varphi(t))a_0(\varphi(t))\varphi'(t)-\\&-10A(\varphi(t),t)b_0(\varphi(t))b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t),t)+16b_0(\varphi(t))A^2(\varphi(t),t)=0,\end{aligned} \tag{16}$$

з якого визначається крива розриву $x=\varphi(t)$.

Продовжимо функції сингулярної частини асимптотики $V_j(x,t,\tau),\ \ j\ge 0$, з кривої Γ в область $\Omega_\mu(\Gamma)$. При цьому покладемо: $V_0(x,t,\tau)=v_0(t,\tau)$.

Для продовження функцій $V_j(x,t,\tau),\ \ j\ge 1$, в область $\Omega_\mu(\Gamma)$ запишемо функції $v_j(t,\tau)$, $j\ge 1$, у вигляді:

$$v_j(t,\tau)=\nu_j(t)\eta_j(t,\tau)+\psi_j(t,\tau),\quad j=1,2,...,N, \tag{17}$$

де

$$\nu_j(t)=(a_0(\varphi(t))\varphi'(t)-b_0(\varphi(t))u_0(\varphi,t))^{-1}\lim_{\tau\to-\infty}\Phi_j(t,\tau),$$

$$\Phi_j(t,\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}F_j(t,\tau)d\tau+E_j(t),\ \lim_{\tau\to+\infty}\Phi_j(t,\tau)=0.$$

Тут $\eta_j(t,\tau)$ – деяка функція з простору $G=G(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ така, що $\lim\limits_{\tau\to-\infty}\eta_j(t,\tau)=1$; $E_j(t)$ – деяка нескінченно диференційовна функція;

$$\psi_j(t,\tau)=\psi_{j,1}(t,\tau)+c_j(t)v_{0\tau}(t,\tau),$$

$\psi_{j,1}$ – деяка функція з простору G_0, $c_j(t)$ – стала інтегрування.

Формула (17) для $v_j(t,\tau)$, $j\ge 1,$ дозволяє продовжити функції $v_j(t,\tau)$, $j\ge 1,$ з кривої Γ в область $\Omega_\mu(\Gamma)$ наступним чином:

$$V_j(x,t,\tau)=u_j^-(x,t)\eta_j(t,\tau)+\psi_j(t,\tau),\quad j\ge 1, \tag{18}$$

де $u_j^-(x,t)$, $j\ge 1,$ визначаються як розв'язки задач Коші вигляду

$$\Lambda u_j^-(x,t)=f_j^-(x,t), \tag{19}$$

$$u_j^-(x,t)|_\Gamma=\nu_j(t),\quad j\ge 1, \tag{20}$$

а диференціальний оператор Λ записується у вигляді

$$\Lambda=a_0(x)\frac{\partial}{\partial t}+b_0(x)u_0(x,t)\frac{\partial}{\partial x}+b_0(x)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}.$$

Диференціальні рівняння (19) для визначення функцій $u_j^-(x,t)$, $j\ge 1,$ отримано з рівняння (7) за допомогою граничного переходу при $\tau\to-\infty$ після підстановки в нього співвідношень (12) та (18). Зокрема, $f_1^-(x,t)=0$.

Оскільки крива Γ трансверсальна характеристикам оператора Λ при всіх $t\in[0;T]$, то задача Коші (19), (20) коректно поставлена і відповідно до теореми Коші-Ковалевської при досить малих μ в області $\Omega_\mu(\Gamma)$ має розв'язок $u_j^-(x,t)\in C^{(\infty)}(\Omega_\mu(\Gamma))$. Надалі припускаємо, шо задача Коші (19), (20) має нескінченно диференційовний розв'язок в області $\{(x,t):x-\varphi(t)\le-\mu,\ t\in[0,T]\}$.

Отже, N-те наближення $Y_N(x,t,\varepsilon),\ (x,t)\in\mathbf{R}^1\times[0;T],$ розв'язку рівняння (7) можна записати у вигляді

$$Y_N(x,t,\varepsilon)=\begin{cases}u_0(x,t)+\sum\limits_{j=1}^{N}\varepsilon^j\left[u_j(x,t)+u_j^-(x,t)\right], & (x,t)\in D^-\setminus\Omega_\mu(\Gamma),\\ \sum\limits_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left[u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau)\right], & (x,t)\in\Omega_\mu(\Gamma),\\ \sum\limits_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j(x,t), & (x,t)\in D^+\setminus\Omega_\mu(\Gamma),\end{cases}$$

де $D^- = \{(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T] : \varphi(t) - x \geq \mu\}, \qquad D^+ = \{(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T] : x - \varphi(t) \leq \mu\},$

а функції $u_j^-(x,t), \ j \geq 1,$ визначені як розв'язки задач Коші (19), (20) як в області $\Omega_\mu(\Gamma)$, так і в області $\{(x,t) : x - \varphi(t) \leq -\mu, \, t \in [0,T]\}$. Таке наближення розв'язку рівняння (7) при $\tau \to -\infty$ задовольняє рівняння (7) з точністю $O(\varepsilon^{N+2})$.

Якщо розв'язки задачі Коші (19), (20) визначені лише в області $\Omega_\mu(\Gamma)$, то N-те наближення $Y_N(x,t,\varepsilon),$ $(x,t) \in \mathbf{R}^1 \times [0;T],$ розв'язку рівняння (7) можна записати у вигляді

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau) \right], & (x,t) \in \Omega_\mu(\Gamma), \\ \sum\limits_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x,t), & (x,t) \in (D^+ \cup D^-) \setminus \Omega_\mu(\Gamma), \end{cases}$$

і таке наближення розв'язку рівняння (7) при $\tau \to -\infty$ задовольняє рівняння (7) з точністю $O(\varepsilon^{N+1})$.

3. Побудова розривних розв'язків для рівняння, породжуючого для рівняння Кортевега- де Фріза зі змінними коефіцієнтами

Розглянемо отриманий для рівняння (7) асимптотичний розв'язок, який зобразимо формулою [2]:

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = U_N(x,t,\varepsilon) + \varepsilon F_N(x,t,S,\varepsilon) + \varepsilon G(x,t,S,\varepsilon), \tag{21}$$

де $S = x - \varphi(t),$ а функції $F_N(x,t,S,\varepsilon)$, $G(x,t,S,\varepsilon)$, $U_N(x,t,\varepsilon)$ можуть бути записані у вигляді:

$$F_N(x,t,S,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^{j-1} V_j\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon}\right);$$

$$G(x,t,S,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} V_0\left(t,\frac{S}{\varepsilon}\right) = -\frac{3}{\varepsilon}\frac{A(\varphi(t),t)}{b_0(\varphi(t))} ch^{-2}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{2}\left(\frac{S}{\varepsilon} + C\right)\right);$$

$$U_N(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} u_0(x,t) + \sum\limits_{j=1}^{N} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + u_j^-(x,t) \right], & (x,t) \in D^- \setminus \Omega_\mu(\Gamma), \\ \sum\limits_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x,t), & (x,t) \in D^+ \cup \Omega_\mu(\Gamma), \end{cases}$$

якщо розв'язок задачі Коші (19), (20) визначено в області $\{(x,t) \in \mathbf{R} : x - \varphi(t) \leq -\mu, t \in [0;T]\}$ та

$$U_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x,t), \quad (x,t) \in D^+ \cup D^-,$$

якщо розв'язок задачі Коші (19), (20) визначено лише в області $\Omega_\mu(\Gamma)$.

Для функцій $U_N(x,t,\varepsilon)$, $F_N(x,t,S,\varepsilon)$, $G(x,t,S,\varepsilon)$ мають місце такі властивості:

Лема 1. *Нехай існує нескінченно диференційовний розв'язок системи (12), $A(\varphi(t),t) > 0$, рівняння (16) має розв'язок для $t \in [0;T]$. Тоді для функції $G(x,t,S,\varepsilon)$ виконуються співвідношення:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} < G(x,t,S,\varepsilon), f(S) >= -\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))} < \delta(S), f(S) >;$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} < \varepsilon G^2(x,t,S,\varepsilon), f(S) >= \frac{24 A(\varphi(t),t)\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0^2(\varphi(t))} < \delta(S), f(S) >;$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} < \varepsilon G(x,t,S,\varepsilon), f(S) >= 0;$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} < \frac{\partial G(x,t,S,\varepsilon)}{\partial t}, f(S) >= -\frac{d}{dt}\left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))}\right) < \delta(S), f(S) >;$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} < \frac{\partial G(x,t,S,\varepsilon)}{\partial x}, f(S) >= 0;$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} < \varepsilon G(x,t,S,\varepsilon)\frac{\partial G(x,t,S,\varepsilon)}{\partial x}, f(S) >= 0;$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} < \varepsilon \frac{\partial^3 G(x,t,S,\varepsilon)}{\partial x^j \partial S^{3-j}}, f(S) >= 0, \quad j = \overline{0,3};$$

де функція $f \in C_0^\infty$, $\delta(S)$ – функція Дірака.

Доведення леми 1 безпосередньо випливає з обчислення відповідних границь. Так, зокрема, для довільної функції $f \in C_0^\infty$ маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0} < G(x,t,S,\varepsilon), f(S) >=$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{3}{\varepsilon}\right)\frac{A(\varphi(t),t)}{b_0(\varphi(t))}\int_{-\infty}^{\infty} ch^{-2}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{2}\left(\frac{S}{\varepsilon}\right)+C\right)f(S)dS =$$
$$= -\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))}f(0) = -\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))} < \delta(S), f(S) >;$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} < \varepsilon G^2(x,t,S,\varepsilon), f(S) >=$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\frac{9}{\varepsilon^2}\frac{A^2(\varphi(t),t)}{b_0^2(\varphi(t))}\int_{-\infty}^{\infty} ch^{-4}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{2}\left(\frac{S}{\varepsilon}\right)+C\right)f(S)dS =$$
$$= \frac{24A(\varphi(t),t)\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0^2(\varphi(t))}f(0) = \frac{24A(\varphi(t),t)\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0^2(\varphi(t))} < \delta(S), f(S) > .$$

Лема 2. *Нехай існує нескінченно диференційовний розв'язок системи (12),* $A(\varphi(t),t) > 0$*, рівняння (16) має розв'язок для* $t \in [0;T]$ *та мають місце умови ортогональності (15) при* $j \geq 2$*. Тоді для функції* $F_N(x,t,S,\varepsilon)$ *виконуються співвідношення:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} < F_N(x,t,S,\varepsilon), f(S) >= u_1^-(x,t) < \theta(S), f(S) >;$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} < \frac{\partial F_N(x,t,S,\varepsilon)}{\partial t}, f(S) >= \frac{\partial}{\partial t}\left(u_1^-(x,t)\right) < \theta(S), f(S) >;$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} < \frac{\partial F_N(x,t,S,\varepsilon)}{\partial x}, f(S) >= \frac{\partial}{\partial x}\left(u_1^-(x,t)\right) < \theta(S), f(S) >;$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} < \varepsilon F_N(x,t,S,\varepsilon)\frac{\partial F_N(x,t,S,\varepsilon)}{\partial x}, f(S) >= 0;$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} < \varepsilon F_N(x,t,S,\varepsilon)\frac{\partial F_N(x,t,S,\varepsilon)}{\partial S}, f(S) >= 0;$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} < \frac{\partial F_N(x,t,S,\varepsilon)}{\partial S}, f(S) >= u_1^-(x,t) < \delta(S), f(S) >;$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} < \varepsilon\frac{\partial^3 F_N(x,t,S,\varepsilon)}{\partial x^j \partial S^{3-j}}, f(S) >= 0, \quad j = \overline{0,3},$$

де функція $f \in C_0^\infty$*,* $\theta(S)$ *– функція Хевісайда.*

Лема 3. *Нехай існує нескінченно диференційовний розв'язок системи (12),* $A(\varphi(t),t) > 0$*, рівняння (16) має розв'язок для* $t \in [0;T]$ *та мають місце умови ортогональності (15) при* $j \geq 2$*. Тоді для функцій* $F_N(x,t,S,\varepsilon)$ *та* $G(x,t,S,\varepsilon)$ *виконуються співвідношення:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} < \varepsilon F_N(x,t,S,\varepsilon)\frac{\partial G(x,t,S,\varepsilon)}{\partial x}, f(S) >= 0;$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} < \varepsilon G(x,t,S,\varepsilon)\frac{\partial F_N(x,t,S,\varepsilon)}{\partial x}, f(S) >= 0;$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} < \varepsilon F_N(x,t,S,\varepsilon)G(x,t,S,\varepsilon), f(S) >= 0;$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} < \varepsilon G(x,t,S,\varepsilon)\frac{\partial F_N(x,t,S,\varepsilon)}{\partial S}, f(S) >= 0;$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} < \varepsilon F_N(x,t,S,\varepsilon)\frac{\partial G(x,t,S,\varepsilon)}{\partial S}, f(S) >= 0,$$

де функція $f \in C_0^\infty$.

Доведення лем 2 та 3 безпосередньо випливає з обчислення відповідних границь.

Отже, підставляючи асимптотичний розв'язок (21) в рівняння (7), поділивши обидві частини рівності на ε, спрямувавши ε до нуля та скориставшись лемами 1–3, отримаємо співвідношення

$$\left(-\varphi'(t)a_0(x)g(t)+b_0(x)U_N(x,t,0)g(t)+\frac{1}{2}b_0(x)r(t)\right)\delta'(S)+$$
$$+\left(a_0(x)g'(t)-\varphi'(t)a_0(x)f(x,t)+b_0(x)\frac{\partial U_N(x,t,0)}{\partial x}g(t)+b_0(x)U_N(x,t,0)f(x,t)\right)\delta(S)+$$
$$+\left(a_0(x)f'_t(x,t)+b_0(x)\frac{\partial U_N(x,t,0)}{\partial x}f(x,t)+b_0(x)U_N(x,t,0)f'_x(x,t)\right)\theta(S)=0,$$

де
$$g(t)=-\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))},$$
$$r(t)=\frac{24A(\varphi(t),t)\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0^2(\varphi(t))},$$
$$f(x,t)=u_1^-(x,t),$$
звідки, прирівнявши коефіцієнти при $\delta'(S)$, $\delta(S)$ та $\theta(S)$ до нуля, отримаємо

$$\begin{cases}-\varphi'(t)a_0(\varphi(t))g(t)+b_0(\varphi)U_N(\varphi(t),t,0)g(t)+\frac{1}{2}b_0(\varphi(t))r(t)=0,\\ a_0(\varphi(t))g'(t)-\varphi'(t)a_0(\varphi(t))f(\varphi(t),t)+b_0(\varphi(t))\frac{\partial U_N(\varphi(t),t,0)}{\partial x}g(t)+b_0(\varphi(t))U_N(\varphi(t),t,0)f(\varphi(t),t)=0,\\ a_0(x)f'_t(x,t)+b_0(x)\frac{\partial U_N(x,t,0)}{\partial x}f(x,t)+b_0(x)U_N(x,t,0)f'_x(x,t)=0,\ \ x<\varphi(t).\end{cases}$$

Враховуючи вигляд функцій $g(t)$, $r(t)$, $f(x,t)$, знаходимо

$$-\varphi'(t)a_0(\varphi(t))+b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t),t)-A(\varphi(t),t)=0; \tag{22}$$
$$a_0(\varphi(t))\frac{d}{dt}\left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))}\right)+\varphi'(t)a_0(\varphi(t))u_1^-(\varphi(t),t)+$$
$$+b_0(\varphi(t))u_{0x}(\varphi(t),t)\left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))}\right)-b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t),t)u_1^-(\varphi(t),t)=0;$$
$$a_0(x)\frac{\partial u_1^-(x,t)}{\partial t}+b_0(x)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}u_1^-(x,t)+b_0(x)u_0(x,t)\frac{\partial u_1^-(x,t)}{\partial x}=0.$$

Таким чином, умова (8) для рівняння (7) справджується, якщо виконуються співвідношення (22).

Проаналізуємо систему (22). Перша рівність виконується згідно визначення функції $A(\varphi(t),t)$. Третя рівність системи теж виконується з огляду на процедуру продовження з кривої Γ сингулярної частини асимптотики. Розглянемо друге рівняння системи (22), яке еквівалентне такому звичайному диференціальному рівнянню

$$a_0(\varphi(t))\frac{d}{dt}\left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))}\right)+b_0(\varphi(t))u_{0x}(\varphi(t),t)\left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))}\right)+E_1(t)=0, \tag{23}$$

де $u_0(x,t)$ – нульовий член регулярної частини асимптотики (11).

Враховуючи умови щодо функцій $a_0(x)$, $b_0(x)$, $u_0(x,t)$, $A(\varphi(t),t)$ маємо, що розв'язок рівняння (23) існує.

Таким чином, справедлива теорема.

Теорема. *Нехай виконуються умови лем 1–3. Тоді асимптотичний розв'язок* $u(x,t,\varepsilon)=Y_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)+O(\varepsilon^{N+1})$, $N\ge 1$, *породжує при* $\varepsilon\to 0$ *скачкоподібну функцію* $u(x,t)$, *яка є розв'язком незбуреного рівняння (6), а умова (23) є умовою типу Гюгоніо для скачкоподібного розв'язку* $u(x,t)$ *рівняння (6).*

4. Висновки

В даній статті розв'язано задачу про існування розривних розв'язків квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами. Розглядаючи це рівняння як породжуюче рівняння для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та використовуючи формулу для асимптотичного розв'язку сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза, отримано умови (так звані умови типу Гюгоніо) існування розривних розв'язків для квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами.

1. *Маслов В.П., Омельянов Г.А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи мат. наук. – 1981. – Вып. 36 (219), № 2. – С. 63 – 124. 2. *Маслов В.П., Омельянов Г.А.* Об условиях типа Гюгонио для бесконечно узких решений уравнения простых волн // Сиб. мат. журн. – 1983. – Т. 24, № 5. – С. 172–182. 3. *Олейник О.А.* О построении обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка путем введения "исчезающей вязкости" // Успехи мат. наук. – 1959. – Т. 14, № 2(86). – С. 160–164. 4. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М., 1953. 5. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних

розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 58, № 1. – С.111 – 124. 6. *Hopf E.* On the right weak solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation of first order // Journ. Math. Mech. – 1969. – Vol. 19, № 6. – P. 483–487. 7. *Samoylenko Yuliya.* Asymptotical expansions for one-phase soliton-type solution to perturbed Korteweg-de Vries equation // Proceedings of the Fifth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". – K.: Institute of Mathematics. – 2004. – Т. 3. – P. 1435 – 1441.

Надійшла до редколегії 25.08.09

УДК 517.9

Ю.Сидоренко, канд. фіз.-мат. наук, О.Чвартацький, студ.
E-mail: *y_sydorenko@franko.lviv.ua*

БІНАРНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОСТОРОВО-ДВОВИМІРНИХ ІНТЕГРОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ І РІВНЯНЬ ЛАКСА

Запропоновано метод побудови точних розв'язків просторово-двовимірного узагальнення ієрархії рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями за допомогою бінарних перетворень типу Дарбу.

A method for constructing exact solutions of the spatially two-dimensional generalization of hierarchy of the Kadomtsev-Petviashvili equations under nonlocal constraints using binary Darboux-type transformations is proposed.

1. Вступ

Далі ми наводимо необхідний мінімум позначень, які використовуються при формулюванні та доведенні основної теореми цієї роботи – теореми про бінарні перетворення типу Дарбу [1,4-7] для інтегродиференціальних зображень Лакса.

Нехай функції φ та ψ є фіксованими $(N\times K)$ - матричними розв'язками лінійної інтегродиференціальної задачі

$$L\{\varphi\}:=\alpha\varphi_y-\sum_{i=0}^{n}u_i\varphi^{(i)}+\mathbf{q}M_0\Omega[\mathbf{r},\varphi]=\varphi\Lambda, \tag{1}$$

та транспонованої задачі

$$L^{\tau}\{\psi\}:=-\alpha\psi_y-\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(u_i^{\top}\psi)^{(i)}-\mathbf{r}M_0^{\top}\Omega[\mathbf{q},\psi]=\psi\tilde{\Lambda}, \tag{2}$$

з матричними $(N\times N)$ коефіцієнтами $u_i=u_i(x,y),\ i=\overline{0,n}$ та $\alpha\in\mathbf{R}\bigcup i\mathbf{R}$. Λ, $\tilde{\Lambda}$ та M_0 – сталі матриці розмірності $(K\times K)$ та $(l\times l)$ відповідно; $q=q(x,y)$ та $r=r(x,y)$ – матричні функції розмірності $(N\times l)$; $\Omega[\mathbf{r},\varphi]$, $\Omega[\mathbf{q},\psi]$ – функції, що задовольняють умови: $\Omega_x[\mathbf{r},\varphi]=\mathbf{r}^{\top}\varphi$, $\Omega_x[\mathbf{q},\psi]=\mathbf{q}^{\top}\psi$.

Оператор Лакса L (1) вперше розглядався в роботах [2], [3] при побудові просторово-двовимірних узагальнень нелінійних систем математичної фізики, які виникають при нелокальних редукціях в матричній ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі.

2. Основна теорема

Теорема.

1. Нехай функції f та g розмірності $(N\times 1)$ є розв'язками спектральних задач

$$L\{f\}:=\alpha f_y-\sum_{i=0}^{n}u_i f^{(i)}+\mathbf{q}M_0\Omega[\mathbf{r},f]=f\lambda, \tag{3}$$

$$L^{\tau}\{g\}:=-\alpha g_y-\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(u_i^{\top}g)^{(i)}-\mathbf{r}M_0^{\top}\Omega[\mathbf{q},g]=g\tilde{\lambda}, \tag{4}$$

з власними значеннями λ, $\tilde{\lambda}\in\mathbf{C}$ відповідно, і функціями $\Omega[\mathbf{r},f]$ та $\Omega[\mathbf{q},g]$, де $\Omega_x[\mathbf{r},f]=\mathbf{r}^{\top}f$, $\Omega_x[\mathbf{q},g]=\mathbf{q}^{\top}g$.

Тоді функції $F:=W\{f\}=f-\Phi\Omega[\psi,f]$ та $G:=W^{-1,\tau}\{g\}=(W^{\tau})^{-1}\{g\}=g-\Psi\Omega[\varphi,g]$ з оператором $W=I-\Phi\Omega[\psi,\cdot]$, де $\Phi=\varphi(C+\Omega[\psi,\varphi])^{-1},\ \Psi^{\top}=(C+\Omega[\psi,\varphi])^{-1}\psi^{\top}$, задовольняють спектральні задачі

$$\hat{L}\{F\}=F\lambda, \tag{5}$$

$$\hat{L}^{\tau}\{G\}=G\tilde{\lambda}, \tag{6}$$

з інтегродиференціальними операторами $\hat{L}$, $\hat{L}^{\tau}$ такого вигляду

$$\hat{L}:=WLW^{-1}=\alpha\partial_y-\sum_{i=0}^{n}\hat{u}_iD^i+\Phi M\Omega[\Psi,\cdot]+\hat{\mathbf{q}}M_0\Omega[\hat{\mathbf{r}},\cdot], \tag{7}$$

$$\hat{L}^{\tau}=W^{-1,\tau}L^{\tau}W^{\tau}=-\alpha\partial_y-\sum_{i=0}^{n}(-1)^iD^i\hat{u}_i-\Psi M^{\top}\Omega[\Phi,\cdot]-\hat{\mathbf{r}}M_0^{\top}\Omega[\hat{\mathbf{q}},\cdot], \tag{8}$$

де

$$M=C\Lambda-\tilde{\Lambda}^{\top}C, \tag{9}$$

$$\hat{\mathbf{q}}=\mathbf{q}-\Phi\Omega[\psi,\mathbf{q}],\ \hat{\mathbf{r}}=\mathbf{r}-\Psi\Omega[\varphi,\mathbf{r}], \tag{10}$$

$\Omega[\Psi,F]$ і $\Omega[\hat{\mathbf{r}},F]$, $\Omega[\Phi,G]$ і $\Omega[\hat{\mathbf{q}},G]$ – функції, для яких виконуються умови: $\Omega_x[\Psi,F]=\Psi^{\top}F$, $\Omega_x[\hat{\mathbf{r}},F]=\hat{\mathbf{r}}^{\top}F$, $\Omega_x[\Phi,G]=\Phi^{\top}G$, $\Omega_x[\hat{\mathbf{q}},G]=\hat{\mathbf{q}}^{\top}G$.

© Ю.Сидоренко, О.Чвартацький, 2009