Теорема 3. *Якщо* $f : M^3 \to S^1$ *– функція Морса з чотирма критичними точками, то граф Ріба цієї функції буде ізоморфний графу, якому відповідає одна з виписаних схем.*

5. Висновки

В роботі розглянуті графи Ріба функцій Морса з тривимірного многовиду на коло з чотирма критичними точками. Доведені теореми класифікації таких функцій. Результати, наведені в роботі, можуть бути застосовані до дослідження різних задач фізики, математики, економіки та інших наук, де виникають функції від трьох змінних.

1. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновые системы. Геометрия, топология, классификация. Том. 1. – Ижевск: Изд. Дом "Удмурский университет", 1999. – 444 с. 2. *Борисенко О.А.* Диференціальна геометрія і топологія. Навч. посібник для студ. мех.-мат. фак. ун-тів, що вивч. дисципліну "Диференціальна геометрія і топологія". – Х.:Основа, 1995. – 304 с. 3. *Пришляк О.О.* Теорія Морса: Навч. посібник. – К.: Київський університет, 2002. – 65 с. 4. *Пришляк А.О.* Сопряженность функций Морса на 4-мерных многообразиях // Успехи мат. наук. – 2001. – Т.56, №1. – С. 173-174. 5. *Хирш М.* Дифференциальная топология. Пер. с англ. Д.Б.Фукса. – М.:Мир, 1979. – 280 с. 6. *Шарко В.В.* Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты). – К.: Наук. думка, 1980. – 196 с. 7. *G. Reeb.* Sur les points singuliers d'une forme de Pfa_ compl_ement int_egrable ou d'une fonction num_erique. Comptes Rendus de L'Acad_emie ses Seances, Paris 222 (1946), 847-849.

Надійшла до редколегії 16.11.09

УДК 517.91

А. Котляр, асп.

PPO-ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ФУНКЦІЙ НА БУКЕТІ З *n* КІЛ

Описується один із шляхів класифікації неперервних функцій із скінченою кількістю критичних точок, що задані на букеті з n кіл. Вона здійснюється за допомогою топологічного інваріанту для таких функцій, який був побудований у даній статті.

There describes one of the ways of classification of continuous functions with a finite number of local extremes that are given on the bunch of n circles. This classification of such functions is solvable with the aid of the topological invariant, that was built up in this paper.

1. Вступ

Останнім часом досить часто вивчаються функції на графах, зокрема, топологічні властивості функцій на колах. В даній роботі розглядаються неперервні функції, що задані на букеті з *n* кіл. Задача полягає в тому, щоб знайти умову еквівалентності двох таких функцій.

Букетом з n кіл називається топологічний простір, що складається із n кіл, які дотикаються лише в одній точці і більше спільних точок не мають. У даній статті, в якості прикладу, також наведено більш узагальнений випадок, а саме, коли з'являються сингулярні точки.

Аби функція *f* на даному топологічному просторі була гладкою, необхідно, щоб її звуження на кожне коло простору було гладким. На рис.1 приведено приклад букету з трьох кіл S_1, S_2 та S_3 із єдиною спільною точкою a_0.

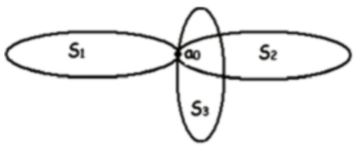

Рис. 1

Задано *n* кіл із відміченими точками (S^1,x_1), (S^1,x_2) ,…, (S^1,x_n), де $S^1=\{(x,y)\in \mathrm{R}^n : x^2+y^2=1\}$. Розглядається топологічний простір із відміченою точкою $S^1\vee S^1\vee ...\vee S^1=(S^1\cup S^1\cup ...\cup S^1)/\sim; x_1\sim x_2\sim ...\sim x_n$ (позначимо його через S, відмічену точку через a_0). Для даного простору розрізняються кола (S_1^1,a_0), (S_2^1,a_0),…, (S_n^1,a_0). Зафіксуємо на S деяку орієнтацію. Нехай $f:S\to \mathrm{R}$ деяка неперервна функція із скінченим числом локальних екстремумів. Зауважимо, що точка a_0 буде точкою локального екстремуму функції f на топологічному просторі S лише тоді, коли вона є локальним екстремумом для кожного звуження функції f на кола $S_r^1, r=\overline{1,n}$.

Означення 1. Неперервні відображення $f,g:S\to \mathrm{R}$ називаються *PPO-еквівалентними*, якщо існують гомеоморфізми $h_1:S\to S$ та $h_2:\mathrm{R}\to \mathrm{R}$, які зберігають орієнтацію і для яких $f=h_2^{-1}\circ g\circ h_1$ та $S_r^1=h_1^{-1}[g^{-1}(h_2(f(S_r^1)))], r=\overline{1,n}$.

Виникає необхідність ввести поняття *порядку обходу* кіл, оскільки букети із різними обходами кіл не є еквівалентними, а отже, виникає некоректність при порівнюванні функцій на еквівалентність на різних топологічних просторах. Тільки якщо порядок обходу кіл у букеті співпадає, задача про еквівалентність функцій є коректною і можна будувати інваріанти для заданих на букеті функцій. Цим інваріантом для функції *f*, заданої на букеті з n кіл буде узагальнена змія $G(n_1,m_1)$, який позначається $Sp^n(f)$. Змія $G(n_1,m_1)$ відповідає значенню *f* у локальних екстремумах на колах S_r^1, де $r=\overline{1,n}$. Оперуючи таким поняттям як порядок обходу, можемо описати яким чином нумеруємо кола. Через S_1^1 позначимо коло, з якого починає рухатись *f*. Через S_i^1, наступне коло, на якому приймає значення *f* після S_{i-1}^1, $i=\overline{1,n-1}$ і т.д. Отже, колом S_n^1 буде коло, на якому функція *f* закінчує рух. Побудуємо інваріант $Sp^n(f)$.

2. Комбінаторні відомості

Для побудови інваріанту, що має відповідати неперервній функцій f, заданій на букеті з n кіл ($s=3,4$), необхідно навести означення деяких комбінаторних об'єктів.

Означення 2. *Змією типу* β називається послідовність додатних цілих чисел x_i, що задовольняють нерівностям $x_0 < x_1 > x_2 < ...x_n, 0 \le x_i \le m; \quad n,m \in N$

Наприклад, послідовність чисел {2, 4, 1, 3, 2, 5} задовольняє умову означення2 і тому є змією типу β.

Означення 3. *Монотонним відрізком* в послідовності $\Delta = (i_1,...,i_n)$ називається максимальний відрізок, на якому послідовність спадає (або зростає) $(i_{a-1} <)i_a > i_{a+1} > ... > i_b (< i_{b+1})$ або $(i_{a-1} >)i_a < i_{a+1} < ... < i_b (> i_{b+1})$. (випадки $a=1$ і $b=n$ не виключаються), де $i_j \in \{0,1,...,m\}$; $n,m \in N$. Надалі монотонний відрізок будемо позначати $\Delta(a,b)$.

Означення 4. *Узагальненою змією* $G(n,m)$ називається послідовність додатних чисел x_i, що задовольняють умови $x_0 \ne x_1 \ne ... \ne x_n, 0 \le x_i \le m$; $n,m \in N$. Виходячи із описаних вище означень, очевидно, що $G(n,m)$ має два типи складових, а саме: β-змії та $\Delta(a,b)$ відрізки.

3. Побудова інваріанту

Маємо топологічний простір S із відміченою точкою a_0, який складається із n занумерованих кіл $S_r^1, r=\overline{1,n}$ із заданою на них орієнтацію. Припустимо, що на колі S_1^1 функція має k_1 локальних екстремумів, на колі S_2^1 має k_2 локальних екстремумів, і т.д, на S_n^1 – k_n. Отже, на даному топологічному просторі функція всього має $\sum_{i=1}^{k} k_i =: m$ локальних екстремумів. Нехай також f приймає k різних значень на даних колах. Починаючи з точки a_0, позначимо на колі S_1^1 локальні екстремуми через $x_1^{(1)}, x_2^{(1)},...,x_{k_1}^{(1)}$. Локальним екстремумам на колі S_2^1 відповідає послідовність $x_1^{(2)}, x_2^{(2)},...,x_{k_2}^{(2)}$, і т.д., а на колі S_n^1 буде відповідати послідовність $x_1^{(n)}, x_2^{(n)},...,x_{k_n}^{(n)}$. Із цих n послідовностей утворимо одну, вставивши між ними точку a_0. Отримаємо

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)},...,x_{k_1}^{(1)}, a_0, x_1^{(2)}, x_2^{(2)},...,x_{k_2}^{(2)},...,a_0, x_1^{(n)}, x_2^{(n)},...,x_{k_n}^{(n)}. \qquad (1)$$

Розглянемо тепер значення функції у точках (1). Позначимо $y_0 = f(x_1^{(1)}), y_1 = f(x_2^{(1)}),..., y_{k_1} = f(x_{k_1}^{(1)}), y_{k_1+1} = f(a_0), y_{k_1+2} = f(x_1^{(2)}), y_{k_1+3} = f(x_2^{(2)}),.., y_{k_1+k_2+1} = f(x_{k_2}^{(2)}),..., y_{m-k_n} = f(a_0)$, $y_{m-k_n+1} = f(x_1^{(n)}), y_{m-k_n+2} = f(x_2^{(n)}),..., y_m = f(x_{k_n}^{(n)})$. Зауважимо, що такого, щоб $y_i = y_{i+1}, i=\overline{0,m-1}$, не може бути, оскільки за умовою f неперервна функція, а за теоремою Ролля між точками $f^{-1}(y_i)$ та $f^{-1}(y_{i+1})$ має лежати локальний екстремум, а це неможливо. Тому числа $y_i, i=\overline{0,m}$, задовольняють умову $y_0 \ne y_1 \ne ... \ne y_m$. Задамо відображення $y_i \to z_i$, де $z_i \in \{0,1,...,k-1\}$ і z_i дорівнює числу значень y_l таких, що $y_l < y_i$. Числа z_i утворюють узагальнену змію $G(m+n-1,k-1)$. Відмітимо на ній значення $z_{k_1+1}, z_{k_1+k_2+2},..., z_{m-k_n}$.

Теорема (критерій *PPO*-еквівалентності функцій на букеті з n кіл).

Дві неперервні функції $f,g: S \to \mathrm{R}$, що задані на букеті *S* з *n* кіл і які мають однакову (скінчену) кількість екстремумів на кожному з кіл букету, є *PPO*-еквівалентними тоді, і лише тоді, коли їм відповідає один і той самий інваріант Sp^n, тобто узагальнена змія $G(m+n-1,k-1)$.

Доведення.

Необхідність. Ця частина доведення випливає із побудови інваріанту для функцій f,g.

Достатність. Нехай функціям $f,g: S \to \mathrm{R}$ відповідає один інваріант Sp, тобто узагальнена змія $G(m_1,k-1)$ із відміченими точками $z_1, z_2,..., z_{n-1}$. Доведемо, що тоді функції f і *g* є *PPO*-еквівалентними. З умови теореми випливає, що кількість локальних екстремумів на колах $S_r^1, r=\overline{1,n}$, для кожної з функцій f і *g* співпадає, позначимо їх за k_r відповідно. Нехай функції f, починаючи із відміченої a_0, при русі за орієнтацією по колах S_r^1 відповідає послідовність локальних екстремумів $x_1^r,...,x_{k_r}^r$, серед яких включено точку a_0. (Аналогічно, функції *g* відповідає послідовність $y_1^r,...,y_{n_r}^r$). Відповідно до побудови змії, існують відображення $\varphi_1: f(x_j^r) \to z_l$ та $\varphi_2: g(y_j^r) \to z_l$, де z_l – ціле додатне число і є елементом змії $G(m_1,k-1)$. Позначимо через α_j^r дугу кола S_r^1 між локальними екстремумами x_j^r та x_{j+1}^r. Аналогічно для точок y_j^r, y_{j+1}^r дугу позначимо β_j^r. Ці відображення неважко продовжити до гомеоморфізмів: $\tilde{\varphi}_1: \alpha_j^r \to z_l z_{l+1}$ та $\tilde{\varphi}_2: \beta_j^r \to z_l z_{l+1}$, де $z_l z_{l+1}$ – відрізок змії $G(m_1,k-1)$ між точками z_l та z_{l+1}. Очевидно, що отримані гомеоморфізми зберігають орієнтацію, яка задана на кожному з кіл букету. Нехай відрізок $[a,b] \subset \mathrm{R}$ – множина значень функції f, а $[c,d] \subset \mathrm{R}$ – множина значень функції *g*. Побудуємо гомеоморфізм

$h_2:[a,b]\to[c,d]$ такий, що $h_2(t)=c+\frac{t-a}{b-a}(d-c)$ і який зберігає орієнтацію. Із описаного вище випливає, що $f=h_2^{-1}\circ g\circ\tilde{\varphi}_2^{-1}\circ\tilde{\varphi}_1$ та $S_r^1=\tilde{\varphi}_1^{-1}[\tilde{\varphi}_2(g^{-1}(h_2(f(S_r^1))))], r=\overline{1,n}$, згідно до побудови інваріанту. Теорему доведено.

Нагадаємо, що для коректності задачі необхідне співпадання порядків обходу на букетах.

Узагальнюючи букет із декількох кіл до випадку, коли з'являються сингулярні точки (точки перетину кіл), для прикладу розглянемо такі топологічні простори, як на рис. 2

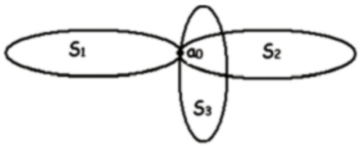

Рис. 2

Неважко переконатись, що побудований вище інваріант також підходить для класифікації функцій, заданих на таких топологічних просторах, потрібно лише додати декілька умов, а саме: 1) кількість критичних точок функцій на таких колах між відповідними сингулярними точками має співпадати, а також, 2) звуження функцій у сингулярних точках мають співпадати (аби функції були неперервними).

4. Висновок

Для букета із *n* кіл, побудовано комбінаторний інваріант $Sp^n(f)$ для неперервної функції f, заданої на цьому букеті, яка має скінчену кількість точок локального екстремуму. За допомогою цього інваріанту виведено критерій *PPO*-еквівалентності неперервних функцій із скінченим числом локальних екстремумів, що задані на букеті з n кіл. Він зводиться до перевірки порядку обходу кіл у заданих топологічних просторах і перевірки на збіжність комбінаторних інваріантів $Sp^n(f)$ та $Sp^n(g)$ функцій $f:S\to\mathrm{R}$ та $g:S\to\mathrm{R}$, ($S=\bigcup_{r=1}^{s}S_r^1$), тобто перевірки на збіжність узагальнених змій, що відповідають цим функціям, а саме $G^f(2m-1,k-1)$ із $G^g(2m-1,k-1)$. Випадок букету кіл узагальнено до випадку, коли з'являються сингулярні точки і доведено, що даний інваріант можна використовувати і для класифікації функцій, заданих на таких узагальнених топологічних просторах.

1 *Андрійок О.П.* Функції на одновимірних многовидах: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: спец.01.01.01 "Математичний аналіз" / О.П. Андрійок. – Київ,2006. – 19с. 2 *Арнольд В.И.* Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера / В.И. Арнольд // Успехи мат.наук. – 1992. – Т.47, №1(283). – С.3-45 3 *Шарко В.В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях / В.В. Шарко // Укр.мат.жур – 2003. – Т.55, №5 – С.687-700 4 *Юрчук І.А.* Комбінаторні аспекти топологічної класифікації функцій на колі / Юрчук І.А. / Укр..мат.жур.– 2008.–Т60, №6. – С.829-836.

Надійшла до редколегії 30.11.09

УДК 519.21

Г. Репетацька

ПОКРАЩЕНА ОЦІНКА ОРТОГОНАЛЬНОЇ РЕГРЕСІЇ ДЛЯ НЕЯВНОЇ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ МОДЕЛІ З ПОХИБКАМИ В ЗМІННИХ

Для неявної функціональної моделі регресії з похибками в змінних розглядається оцінка ортогональної регресії. Встановлено умови неконзистентності, знайдено перший член розкладу асимптотичного відхилення оцінки по дисперсії похибок, та запропонована покращена оцінка, яка має менше асимптотичне відхилення. Отримані результати розглянуті на прикладі еліпса.

For implicit functional errors-in-variables model the orthogonal regression estimator is considered. The conditions for the inconsistency are presented, and the first term of the asymptotic expansion of its deviation is derived. An improved estimator is proposed, that has smaller asymptotic deviation from the true value. As an example the estimation of the ellipse is considered.

1. Вступ

Розглянемо неявну функціональну модель регресії з похибками у змінних

$$\begin{cases} G(\xi_i,\beta_0)=0, \\ x_i=\xi_i+\varepsilon_i,\ i=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{1}$$

де $G(\xi,\beta)$ – скалярна функція від векторних змінних $\xi\in\mathbb{R}^q$, $q\ge 2$ та $\beta\in\Theta\subset\mathbb{R}^p$, β_0 – параметр, що оцінюється, x_i – дані спостережень, ξ_i – невідомі детерміновані величини, ε_i – похибки спостережень.

Для моделі (1) розглянемо оцінку ортогональної регресії (о.о.р.) $\hat{\beta}_n$, встановимо, що вона неконзистентна, та запропонуємо покращену оцінку, яка має менше асимптотичне відхилення при малих похибках та великих n. Раніше аналогічні результати були отримані в [1,3] для явних моделей регресії.

Відомо, що для лінійної функції регресії о.о.р. конзистентна (див. [4]), та при нормально розподілених похибках з однаковою дисперсією є оцінкою максимальної правдоподібності. Але в роботі [3] доведено, що для явної нелінійної моделі регресії о.о.р. неконзистентна і навіть відділена від істинного значення β_0. Також в [3] знайдено перший член розкладу її асимптотичного відхилення по дисперсії похибок та запропоновано покращену оцінку, яка має менше асим-