зміщення $\hat{\beta}_n$, якщо множина дійсних точок спостереження $\{\xi_i, i \geq 1\}$ має не більше трьох граничних точок. Нехай $\mu$ – борельова міра на еліпсі $\Gamma_{\beta_0}$, породжена послідовністю $\{\xi_i, i \geq 1\}$.

*Для виконання умови (coп) необхідно і достатньо, щоб міра $\mu$ була зосереджена більш ніж в трьох точках.*

Залишилось перевірити виконання умови (vi) про невиродженість та відділеність від нуля власних чисел матриці $V_n$ – суми $n$ невід'ємих матриць рангу 1. Її можна сформулювати так: середнє арифметичне $x^T V_n x$, де $x$ належить одиничній сфері з центром в початку координат, що дорівнює квадрату скалярного добутку $(G^\beta x)^2 / \| G^\xi \|^2$, відділене від нуля. Необхідно принаймні 5 різних матриць.

*Для виконання умови (vi) необхідно і достатньо, щоб міра $\mu$ була зосереджена не менш ніж в п'яти точках.*

У підсумку, для виконання умов (i)-(vi), міра $\mu$ повинна бути зосереджена не менш ніж в п'яти точках, наприклад, розподілена з деякою додатною щільністю по еліпсу або його дузі.

Умови леми 5 не виконуються, оскільки $G^\xi$ перетворюється в $\vec{0}$ у центрі еліпса. А умови леми 6 – виконуються, отже, краще застосувати оцінки (10).

### 8. Висновки

Розглянуто оцінку ортогональної регресії у випадку неявної функціональної моделі з невідомим параметром $\sigma$, встановлено умови її неконзистентності, та знайдено перший член розкладу її асимптотичного відхилення. Оскільки для побудови покращеної оцінки не завжди можна беззастережно використовувати ті оцінки, що застосовувалися у випадку явної моделі, запропоновано альтернативні оцінки. В подальшому цікаво було б порівняти, які з них кращі для практичних застосувань. Також на прикладі моделі еліпсоїда проілюстровано значення умов (i)-(vi). Для подальшого уточнення оцінки потрібно поширити результати [6] на неявну модель – знайти другий член асимптотичного відхилення оцінки, та кращі оцінки $\sigma^2$, $k_n$, $V_n$.

1. *Репетацька Г.С.* Неконзистентність оцінки ортогональної регресії у векторній нелінійній моделі з похибками в змінних // Теорія ймовірності та математична статистика. – 2005. – Вип. 73 – С. 146-160. 2. *Fazekas I., Kukush A.G., Zwanzig S.* On inconsistency of the least squares estimator in nonlinear functional relations. Preprint. – Department of Statistics and Demography, Odense University, Denmark, 1998. 3. *Fazekas I., Kukush A., Zwanzig S.* Bias correction of nonlinear orthogonal regression // Ukrainian Mathematical Journal – 2001. – Vol. 56, № 8. – P. 1101-1118. 4. *Fuller W.A.* Measurement errors models. – Wiley, New York, 1987. 5. *Phanzagl J.* On the measurability and consistency of minimum contrast estimates // Metrika. –1969. –14. – P. 249-273. 6. *Repetatska G.* Modified orthogonal regression estimator in the quadratic errors-in-variables model // Theory of Stochastic Processes. – 2005. – Вип. 11(27), № 3-4. – P. 110-120.

**Надійшла до редколегії 19.10.09**

**УДК 512.552**

**Н. Кайдан, асп.**

## САГАЙДАКИ СКІНЧЕННИХ КІЛЕЦЬ

***В цій статті ми будемо розглядати правий та лівий сагайдаки скінченного комутативного кільця. Буде сформульовано та доведено теорему про ланцюгові скінченні кільця.***

***In this article we consider the right and left quivers finite commutative ring. Will be formulated and prove a theorem about chain finite rings***

### 1. Вступ

Ми розглядаємо скінченні кільця з $1 \neq 0$. Скінченне кільце $A$ називається розкладним, якщо $A$ є прямим добутком двох кілець відмінних від нуля. В протилежному випадку кільце $A$ називається нерозкладним.

Позначимо через $R$ радикал скінченного кільця $A$. Будь-яке скінченне кільце $A$ є артіновим з двох сторін кільцем і тому є напівдосконалим кільцем. Тоді правий (лівий) регулярний $A$-модуль $A_A$ ($_A A$) має наступний розклад в пряму суму нерозкладних правих (лівих) проективних $A$-модулів: $A_A = P_1^{n_1} \oplus ... \oplus P_s^{n_s}$ ($_A A = Q_1^{n_1} \oplus ... \oplus Q_s^{n_s}$), де $X^n$ пряма сума $n$ копій модуля $X$. Модулі $P_1,...,P_s$ $(Q_1,...,Q_s)$ попарно неізоморфні.

Нехай $1 = f_1 + ... + f_s$ буде відповідним розкладом одиниці кільця $A$ в сумму попарно ортогональних ідемпотентів, тобто $f_i A = P_i^{s_i}$. Тоді $_A A = Af_1 \oplus ... \oplus Af_s = Q_1^{n_1} \oplus ... \oplus Q_s^{n_s}$ – розклад напівдосконалого кільця $A$ в пряму суму нерозкладних проективних правих (лівих) $A$ – модулів, тобто $Af_i = Q_i^{n_i}$, де $Q_i$ – нерозкладний проективний правий $A$ – модуль ($i = 1,...,s$). Розглянемо двосторонній розклад Пірса кільця $A$:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

Двосторонній розклад Пірса радикала $R$ кільця $A$ має вигляд: $R = \bigoplus_{i,j} f_i R f_j, \quad i, j = 1,...,s$.

**Пропозиція 1.** *Нехай* $A = P_1^{n_1} \oplus ... \oplus P_s^{n_s}$ *– розклад скінченного кільця* $A$ *в пряму суму нерозкладних проективних правих* $A$ *– модулів і нехай* $1 = f_1 + ... + f_s$ *буде відповідним розкладом кільця* $A$ *в пряму суму попарно ортогональних ідемпотентів, тобто* $f_i A = P_i^{s_i}$ *. Тоді радикал* $R$ *кільця* $A$ *має двосторонній розклад Пірса наступного вигляду:*

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & R_{22} & \dots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & R_{ss} \end{pmatrix},$$

де $R_{ii}$ радикал кільця $f_i A f_i$ , $A_{ij} = f_i A f_j \quad (i \neq j) \quad i, j = 1,...,s$ .

Кільце $f_i A f_i$ ізоморфне кільцю $End_A(P_i^{s_i}) \simeq M_{n_i}(End(P_i))$, де $End_A(P_i) = \mathrm{O}_i$ є локальним кільцем. Через $M_n(B)$ позначається кільце всіх квадратних матриць порядку $n$ з елементами кільця $B$ .

Добре відомо, що $rad\, M_{n_i}(\mathrm{O}_i) = M_{n_i}(rad\, \mathrm{O}_i)$ , де $rad\, B$ є радикалом кільця $B$ . Покладемо $U_i = P_i / P_i R$ , тоді $\overline{A} = A/R = U_1^{n_1} \oplus ... \oplus U_s^{n_s}$ . Аналогічно покладемо $V_i = Q_i / RQ_i \quad (i = 1,...,s)$.

Модулі $U_1,...,U_s \quad (V_1,...,V_s)$ – це всі прості праві (ліві) попарно неізоморфні $A$ – модулі.

Нагадаємо, що напівдосконале кільце $A$ називается зведеним, якщо фактор кільце $A/R$ є прямим добутком тіл. Це еквівалентно тому, що $n_1 = n_2 = ... = n_s = 1$ .

**Пропозиція 2.** *Якщо* $A$ *скінченне зведене кільце, тоді факторкільце* $A/R$ *є прямим добутком* $s$ *скінченних полів.*

Доведення випливає з теореми Веддербарна [1, с. 87].

Ми будемо розглядати правий та лівий сагайдаки скінченного кільця. Дамо означення сагайдака напівдосконалого нетерового справа кільця:

Нехай $A$ напівдосконале нетерове справа кільце, $P_1,...,P_s$ – це всі попарно неізоморфні нерозкладні праві $A$ – модулі. Розглянемо проективне накриття $R_i = P_i R \quad (i = 1,...,s)$ , яке будемо позначати $P(R_i)$ . Нехай $P(R_i) = \bigoplus_{j=1}^{s} P_j^{t_{ij}}$ . Ми співставимо нерозкладним модулям $P_1,...,P_s$ точки $1,...,s$ на площині і з'єднаємо точку $i$ з точкою $j$ , де $t_{ij}$ стрілка. Таку конструкцію графа назвемо правим сагайдаком, або просто сагайдаком для напівдосконалого нетерового справа кільця $A$ і позначимо $Q(A)$ . Аналогічно, може бути визначений і лівий сагайдак $Q'(A)$ для напівдосконалого нетерового зліва кільця. Правий сагайдак $Q(A)$ скінченно-вимірної алгебри $A$ над полем $K$ співпадає з сагайдаком Габріеля алгебри $A$ .

Зауважимо, що сагайдак $Q(A)$ напівдосконалого нетерового справа кільця $A$ співпадає з сагайдаком $Q(A/R^2)$ .

Взагалі сагайдаком $Q$ будемо називати будь-який скінченний набір точок, які зв'язані між собою скінченним числом стрілок. Звичайно точки позначаються номерами $1,2,...,s$ . Тоді сагайдак $Q$ задається своєю матрицею інцидентності:

$$[Q] = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1s} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{s1} & t_{s2} & \dots & t_{ss} \end{pmatrix},$$

де $t_{ij}$ – число стрілок, які йдуть з точки $i$ в $j$ . У випадку, коли з вершини $i$ немає стрілок у вершину $j$ , то $t_{ij} = 0$ . Якщо стрілка $\sigma$ сагайдака $Q$ з'єднує точку $i$ з точкою $j$ , то $i$ називається початком, а $j$ називається кінцем стрілки $\sigma$ . Це позначимо так: $\sigma : i \to j$ .

Стрілка $\sigma$ сагайдака $Q$ у якої початок і кінець співпадають, називається петлею цього сагайдака.

Два сагайдака $Q$ і $Q'$ називаються ізоморфними, якщо між їх точками та стрілками можно установити взаємооднозначну відповідність, при якій начала і кінці відповідних стрілок переходять друг в друга.

Неважко переконатися в тому що $Q \simeq Q'$ тоді і тільки тоді, коли матриця інцидентності $[Q]$ і $[Q']$ можно перевести одне в інше одночасними перестановками одноіменних строк та столбців. Зокрема, сагайдак алгебри, визначений з точністю до ізоморфізма.

Нехай $Q$ сагайдак. Шлях сагайдака $Q$ – це впорядкований набір стрілок $\sigma_1,...,\sigma_k$ такий, що кінець стрілки $\sigma_i$ співпадає с початком стрілки $\sigma_{i+1} \quad (i = 1,...,k-1)$ . Кількість стрілок $k$ називається довжиною шляху. Початок стрілки $\sigma_1$ називається початком шляху, а кінець стрілки $\sigma_k$ – кінцем шляху. Будемо казати, що шлях з'єднує точку $i$ с точкою $j$ і записувати наступним чином: $\sigma_1 ... \sigma_k : i \to j$.

Сагайдак $Q$ називається зв'язним, якщо множину його вершин не можна розбити на дві непорожні підмножини, такі що не перетинаються і між якими немає стрілок.

В протилежному випадку сагайдак $Q$ називається незв'язним.

**Теорема 1.** *Скінченне кільце $A$ є нерозкладним, тоді і тільки тоді, коли його сагайдак $Q(A)$ зв'язний.* [3, с. 64]

Для кожного поля $K$ і кожного сагайдака $Q$ ми будуємо $K$ - алгебру $A_K(Q)$, яка називається алгеброю шляхів сагайдака $Q$ над полем $K$.

Базис простору $A_K(Q)$ утворюватимуть всілякі шляхи сагайдака $Q$ і набір символів $\varepsilon_i$ (по одному для кожної точки $i$). Таким чином, всякий елемент $A_K(Q)$ однозначно записується у вигляді $\sum_{i-1}^{s} c_i\varepsilon_i + \sum c_{\sigma_1...\sigma_k}\sigma_1...\sigma_k$ (друга сума береться по всім шляхам сагайдака $Q$), де $c_i \in A_K$, $c_{\sigma_1...\sigma_k} \in A_K$. Символ $\varepsilon_i$ зручно розглядати як шлях довжини $0$ з початком і кінцем в точці $i$.

Визначимо добуток шляхів $\alpha$ та $\beta$, як шлях $\alpha\beta$, якщо кінець $\alpha$ співпадає з початком $\beta$, і як $0$ – в іншому випадку. Іншими словами,

$$(\sigma_1...\sigma_k)(\tau_1...\tau_l) = \begin{cases} \sigma_1...\sigma_k\tau_1...\tau_l, & \text{якщо кінець } \sigma_k \text{ співпадає з початком } \tau_1, \\ 0 - \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

$$\varepsilon_i\sigma_1...\sigma_k = \begin{cases} \sigma_1...\sigma_k, & \text{якщо } i - \text{початок } \sigma_1, \\ 0 - \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

$$\sigma_1...\sigma_k\varepsilon_i = \begin{cases} \sigma_1...\sigma_k, & \text{якщо } i - \text{кінець } \sigma_1, \\ 0 - \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

$$\varepsilon_i\varepsilon_j = \begin{cases} \varepsilon_i, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Теорема: Для будь-якого сагайдака $Q$ існує скінченне кільце $A$ таке, що його сагайдак $Q(A)$ співпадає з $Q$.

## 2. Сагайдаки комутативних скінченних кілець

В [1, с. 237] сформульвана наступна теорема: комутативне кільце є напівдосконале тоді і тільки тоді, коли воно є скінченним прямим добутком комутативних локальніх кілець.

З цієї теореми випливає наступна структурна теорема для скінченних комутативних кілець.

**Теорема 2.** *Комутативне скінченне кільце є скінченним прямим добутком комутативних локальних скінченних кілець. Навпаки, всі кільця такого вигляду є комутативними скінченними кільцями.*

Для сагайдака нерозкладного скінченного комутативного кільця $A$ можуть бути такі можливості:

1) $Q(A)$ є одна вершина без стрілок;

2) $Q(A)$ є одна вершина з однією петлею;

3) $Q(A)$ є одна вершина з $n$ петлями;

У першому випадку кільце $A$ є полем, у другому випадку кільце $A$ є однорядним кільцем, у третьому випадку лівий сагайдак є однією вершиною з $n$ петлями.

Звідси випливає така теорема: правий і лівий сагайдаки скінченного комутативного кільця співпадають.

## 3. Частинні випадки

Нам знадобиться наступна теорема:

**Теорема 3.** *Напівдосконале нетерове кільце $A$ є напівланцюговим тоді і тільки тоді, коли факторкільце $A/R^2$ є напівланцюговим артіновим кільцем.* [3, с. 313]

**Теорема 4.** *Нехай $A$ - скінченне кільце, $R$ – його радікал. Припустимо, що сагайдак $Q(A)$ кільця $A$ є простим циклом $C_n$:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & n-1 & & n \\ \bullet & \to & \bullet & \to & \bullet & \to & \ldots\bullet & \to & \bullet \end{array}$$

Тоді кільце $A$ є напівланцюговим.

***Доведення***: Доведемо, що факторкільце $A/R^2$ є напівланцюговим. Оскільки $Q(A) = Q(A/R^2)$, то сагайдак $Q(A/R^2)$ кільця $A/R^2$ є простим циклом $C_n$. Тоді кільце $A/R^2$ нерозкладне і його двобічний пірсовський розклад має вигляд:

$$\begin{pmatrix} D_1 & D_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & D_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_{n-1} & D_{n-1n} \\ D_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 & D_n \end{pmatrix}$$

і $D_{12} = x_{12}D_2$, ..., $D_{n-1n} = x_{n-1n}D_n$, $D_{n1} = x_{n1}D_1$. Кільця $D_1,...,D_n$ є тілами (тобто кільцями без ненульових дільників нуля). Всі ці кільця скінченні, оскільки кільце $A$ скінченне. Таким чином за теоремою Веддербарга, кільця $D_1,...,D_n$ є скінченними полями.

Множини $D_{ii+1}, i = 1,...,n-1$ і $D_{n1}$ є $D_i - D_{i+1}$ – бімодулями при $i = 1,...,n-1$ і $D_{n1}$ є $D_n - D_1$ – бімодулем.

При $i = 1,...,n-1$ відображення $\sigma_i$, що визначене за правилом $\alpha x_{ii+1} = x_{ii+1}\alpha^{\sigma_i}$, є мономорфізмом полів і ми отримуємо ланцюг вкладень:

$$D_1 \xrightarrow{\sigma_1} D_2 \xrightarrow{\sigma_2} D_3 \xrightarrow{\sigma_3} \dots \xrightarrow{\sigma_{n-1}} D_n .$$

Відображення $\sigma_n : \alpha x_{n1} = x\alpha^{\sigma_n}$ є мономорфізмом $\sigma_n : D_n \to D_1$

Добуток відображень $\sigma_{n-1},...,\sigma_1$ дає мономорфізм $D_1 \to D_n$. Оскільки кількість елементів $b$ в $D_1$ і $D_n$ скінченне, то кількість елементів $b$ в $D_1$ менше, ніж кількість елементів $b$ в $D_n$. Але, так як $\sigma_n : D_n \to D_1$ мономорфізм, то кількість елементів $b$ в $D_n$ не перебільшує кількість елементів $b$ в $D_1$. Тоді всі відображення $\sigma_1,...,\sigma_n$ являються ізоморфізмами, всі поля $D_1,...,D_n$ ізоморфні. Тому $A/R^2$ є напівланцюговим справа і зліва кільцем.

За теоремою 3 скінченні кільця $A$ і $A/R^2$ є напівланцюгові одночасно. Таким чином, якщо сагайдак $Q(A)$ скінченного кільця $A$ є простим циклом випливає, що кільце $A$ є напівланцюговим.

### 4. Висновки

У роботі було розглянуто правий та лівий сагайдаки скінченного комутативного кільця При цьому було сформульовано и доведено теорему, яка є узагальненням теореми О.О Нечаева про ланцюгові скінченні кільця.

1. *Дрозд Ю.А., Кириченко В.В* Конечномерные алгебры. – Киев: Изд. "Вища школа", 1980. – 192 с. 2. *Hazewinkel M., Gubareni N and Kirichenko V.V.,* Algebras, rings and modules. Vol. 1. Mathematics and its Applications, 575. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004. 3. *Hazewinkel M., Gubareni N and Kirichenko V.V,* Algebras, rings and modules. Vol. 2. Mathematics and its Applications, 586. Springer, Dordrecht, 2007.

**Надійшла до редколегії: 17.11.09**

**УДК 532.5**

**О. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, О. Хорошилов, канд. фіз.-мат. наук**

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГОДОГРАФА ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ПРОСТОРОВОГО ОБТІКАННЯ КОНІЧНИХ ТІЛ ІЗ ВДУВОМ

***При дослідженні надзвукового обтікання невісесиметричних конічних пористих тіл, скрізь поверхню яких здійснюється сильний вдув газу, для попереднього аналізу початкових параметрів застосовується графічна інтерпретація отриманих даних у площині годографа вектора швидкості.***

***At research of supersonic flow of unaxisymmetrical conical porous bodies with surface mass transfer for the preliminary analysis of initial parameters the graphic interpretation of the obtained data in a hodograph plane of velocity vector will be used***

### 1. Вступ

На основі двошарової моделі високошвидкісного обтікання плоских пористих тіл при наявності інтенсивного поверхневого масообміну [3, 8] була розглянута низка двовимірних задач для надзвукового та гіперзвукового потоків, сформульовані й розв'язані відповідні крайові задачі [1, 2, 4]. Трьохвимірна математична модель надзвукового обтікання невісесиметричних конічних пористих тіл, скрізь поверхню яких здійснюється сильний вдув газу, побудована в [5], де запропонований метод отримання повного розв'язку задачі базується на ідеї послідовного визначення газодинамічних та геометричних параметрів в областях зовнішнього і внутрішнього потоків і наступного зрощування цих локальних розв'язків на поверхні контактного розриву за допомогою умови неперервності тиску. При цьому, в кожній області течії крайова задача зводиться до задачі типу Коші з початковими умовами, що містять довільні параметри, остаточне значення яких встановлюється після інтегрування системи рівнянь та виконання відповідних граничних умов. Основою алгоритму є два ітераційних процесу, один з яких вкладений у другий. На етапі проведення чисельних розрахунків важливим стає фактор вдалого визначення початкових значень довільних параметрів крайової задачі, що суттєво впливає на швидкість збіжності ітераційних процесів.

В даній роботі розглядається підхід, у якому для пришвидшення збіжності ітераційних процесів використовується графічна інтерпретація параметрів вісесиметричного конічного потоку у площині годографа вектора швидкості, що дозволяє виявити межі області існування розв'язку та проаналізувати їх залежність від низки вихідних параметрів задачі.