

$$\begin{pmatrix} D_1 & D_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & D_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_{n-1} & D_{n-1n} \\ D_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 & D_n \end{pmatrix}$$

і  $D_{12} = x_{12}D_2, \dots, D_{n-1n} = x_{n-1n}D_n, D_{n1} = x_{n1}D_1$ . Кільця  $D_1, \dots, D_n$  є тілами (тобто кільцями без ненульових дільників нуля). Всі ці кільця скінченні, оскільки кільце  $A$  скінченне. Таким чином за теоремою Веддербарга, кільця  $D_1, \dots, D_n$  є скінченними полями.

Множини  $D_{i+1}, i = 1, \dots, n-1$  і  $D_{n1} \in D_i - D_{i+1}$  – бімодулями при  $i = 1, \dots, n-1$  і  $D_{n1} \in D_n - D_1$  – бімодулем.

При  $i = 1, \dots, n-1$  відображення  $\sigma_i$ , що визначене за правилом  $\alpha x_{i+1} = x_{i+1} \alpha^{\sigma_i}$ , є мономорфізмом полів і ми отримуємо ланцюг вкладень:

$$D_1 \xrightarrow{\sigma_1} D_2 \xrightarrow{\sigma_2} D_3 \xrightarrow{\sigma_3} \dots \xrightarrow{\sigma_{n-1}} D_n.$$

Відображення  $\sigma_n : \alpha x_{n1} = x_{n1} \alpha^{\sigma_n}$  є мономорфізмом  $\sigma_n : D_n \rightarrow D_1$

Добуток відображень  $\sigma_{n-1}, \dots, \sigma_1$  дає мономорфізм  $D_1 \rightarrow D_n$ . Оскільки кількість елементів  $b$  в  $D_1$  і  $D_n$  скінченне, то кількість елементів  $b$  в  $D_1$  менше, ніж кількість елементів  $b$  в  $D_n$ . Але, так як  $\sigma_n : D_n \rightarrow D_1$  мономорфізм, то кількість елементів  $b$  в  $D_n$  не перебільшує кількість елементів  $b$  в  $D_1$ . Тоді всі відображення  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  являються ізоморфізмами, всі поля  $D_1, \dots, D_n$  ізоморфні. Тому  $A/R^2$  є напівланцюговим справа і зліва кільцем.

За теоремою 3 скінченні кільця  $A$  і  $A/R^2$  є напівланцюгові одночасно. Таким чином, якщо сагайдак  $Q(A)$  скінченного кільця  $A$  є простим циклом впливає, що кільце  $A$  є напівланцюговим.

#### 4. Висновки

У роботі було розглянуто правий та лівий сагайдаки скінченного комутативного кільця При цьому було сформульовано и доведено теорему, яка є узагальненням теореми О.О Нечаева про ланцюгові скінченні кільця.

1. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В Конечномерные алгебры. – Киев: Изд. "Вища школа", 1980. – 192 с. 2. Hazewinkel M., Gubareni N and Kirichenko V.V., Algebras, rings and modules. Vol. 1. Mathematics and its Applications, 575. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004. 3. Hazewinkel M., Gubareni N and Kirichenko V.V, Algebras, rings and modules. Vol. 2. Mathematics and its Applications, 586. Springer, Dordrecht, 2007.

Надійшла до редколегії: 17.11.09

УДК 532.5

О. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, О. Хорошилов, канд. фіз.-мат. наук

### ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГОДОГРАФА ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ПРОСТОРОВОГО ОБТІКАННЯ КОНІЧНИХ ТІЛ ІЗ ВДУВОМ

*При дослідженні надзвукового обтікання невісесиметричних конічних пористих тіл, скрізь поверхню яких здійснюється сильний вдув газу, для попереднього аналізу початкових параметрів застосовується графічна інтерпретація отриманих даних у площині годографа вектора швидкості.*

*At research of supersonic flow of unaxisymmetrical conical porous bodies with surface mass transfer for the preliminary analysis of initial parameters the graphic interpretation of the obtained data in a hodograph plane of velocity vector will be used*

#### 1. Вступ

На основі двошарової моделі високошвидкісного обтікання плоских пористих тіл при наявності інтенсивного поверхневого масообміну [3, 8] була розглянута низка двовимірних задач для надзвукового та гіперзвукового потоків, сформульовані й розв'язані відповідні крайові задачі [1, 2, 4]. Трьохвимірною математичною моделлю надзвукового обтікання невісесиметричних конічних пористих тіл, скрізь поверхню яких здійснюється сильний вдув газу, побудована в [5], де запропонований метод отримання повного розв'язку задачі базується на ідеї послідовного визначення газодинамічних та геометричних параметрів в областях зовнішнього і внутрішнього потоків і наступного зрощування цих локальних розв'язків на поверхні контактної розриву за допомогою умови неперервності тиску. При цьому, в кожній області течії крайова задача зводиться до задачі типу Коші з початковими умовами, що містять довільні параметри, остаточне значення яких встановлюється після інтегрування системи рівнянь та виконання відповідних граничних умов. Основою алгоритму є два ітераційних процесу, один з яких вкладений у другий. На етапі проведення чисельних розрахунків важливим стає фактор вдалого визначення початкових значень довільних параметрів крайової задачі, що суттєво впливає на швидкість збіжності ітераційних процесів.

В даній роботі розглядається підхід, у якому для пришвидшення збіжності ітераційних процесів використовується графічна інтерпретація параметрів вісесиметричного конічного потоку у площині годографа вектора швидкості, що дозволяє виявити межі області існування розв'язку та проаналізувати їх залежність від низки вихідних параметрів задачі.

2

Схема течії, що розглядається, наведена на рис. 1. В роботі [5] загальний розв'язок задачі будується як суперпозиція розв'язків, що відповідають вісесиметричному обтіканню кругового конуса та збуренням потоку, які пов'язані зі просторовим характером течії. Таким чином, в процесі розв'язання загальної трьохвимірної задачі проводиться дослідження вісесиметричного потоку і визначається відповідний розв'язок. Аналіз отриманих результатів показав, що графічна інтерпретація розв'язку в площині годографа вектора швидкості має окремий інтерес.

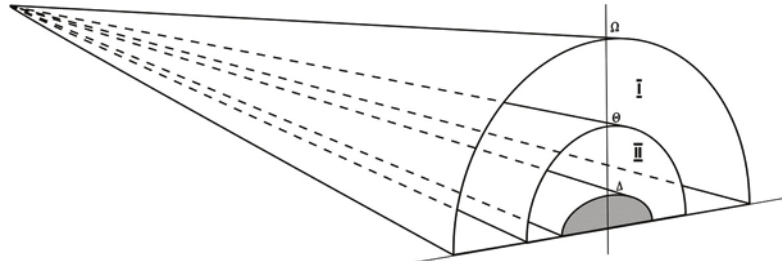


Рис. 1. Схема течії

Відповідно до математичної моделі [5] газодинамічні параметри задачі представлені у вигляді співвідношень:

$$f = f_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \Theta_l f_l \cos l\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m f_m \sin m\varphi, \quad f = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ p \\ \rho \\ S \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

де Індексом "0" позначені функції, які є розв'язком основної вісесиметричної течії, а індексами  $l$  і  $m$  - функції, що характеризують збурення вісесиметричного потоку.

Рівняння поверхонь пористого конуса  $\Delta$ , контактного розриву  $\Theta$  і стрибка ущільнення  $\Omega$  можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \Delta_l \cos l\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \Delta_m \sin m\varphi, \\ \Theta &= \Theta_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \Theta_l \cos l\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m \sin m\varphi, \\ \Omega &= \Omega_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \Omega_l \cos l\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \sin m\varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\Delta_0, \Theta_0, \Omega_0$  – відповідні поверхні, що мають круглий поперечний перетин.

Вихідною системою диференціальних рівнянь є система рівнянь Ейлера. Вісесиметричний потік описується нелінійною системою нульового наближення:

$$\begin{aligned} v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \xi_N} + \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{d\xi_N} - \sigma_0 \eta_0 u_0 v_0 &= 0, \\ v_0 \frac{dp_0}{d\xi_N} + \gamma p_0 \frac{dv_0}{d\xi_N} - \sigma_0 \gamma p_0 (v_0 + 2\eta_0 u_0) &= 0, \\ \frac{dp_0}{d\xi_N} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{d\xi_N} &= 0, \\ u_0^2 + v_0^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} D \end{aligned}$$

де  $N = I, II$  – номер області течії,  $\sigma_0 = \frac{\Theta_0 - \Delta_0}{\eta_0 (1 + \eta_0^2)}$ ,  $\eta_0 = \Theta_0 + \xi(\Delta_0 - \Theta_0)$ ,  $D = \frac{C_{kp\infty}}{C_{kpbd}}$ .

На стрибку ущільнення записуються співвідношення, які витікають зі законів збереження маси, імпульсу та енергії [8], на поверхні контактної розриву – умови непротікання і неперервності тиску, на поверхні конуса – умови, що задають параметри вдуву газу [5].

Тестові чисельні розрахунки проведено для вісесиметричних конічних потоків, а отримані розв'язки перенесено у площину годографа вектора швидкості.

Далі наведені деякі приклади, які ілюструють сутність розробленого підходу.

Поле швидкостей та геометричні характеристики внутрішнього потоку для випадку  $M_\infty = 2, p_k = 1.0$  зображені на рис. 2. Криві 4, 3, 2 та 1 є геометричним місцем кінців вектора швидкості  $U_\Delta$  газу, що вдувається, на поверхні пористого конуса, коли  $\Delta = 9^0, 10^0, 12^0, 15^0$  відповідно. Крива 5 – це геометричне місце кінців вектора швидкості  $U_\Theta$  на

поверхні розподілу для усіх вказаних вище значень  $\Delta$ . Таким чином, лінія 5 відповідає параметричній сім'ї кривих 1-4, де параметром є величина  $\Delta$ .

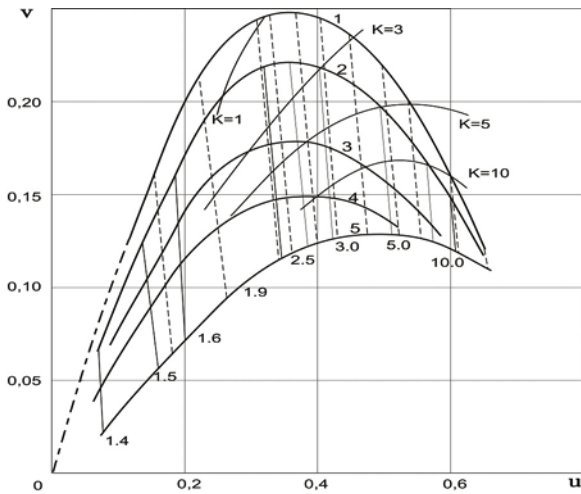


Рис. 2. Поля швидкостей та геометричні параметри

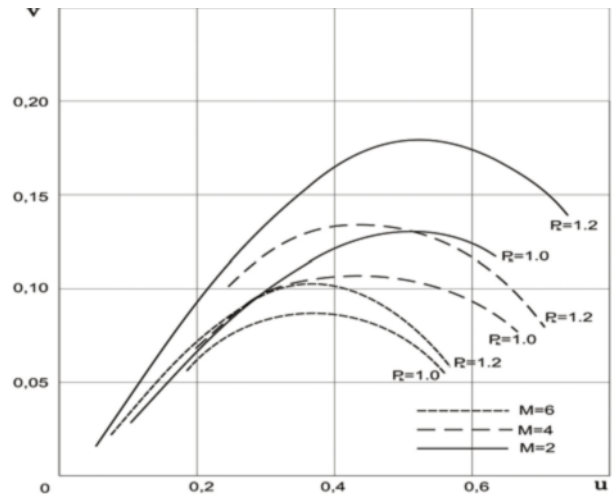


Рис. 3. Залежність швидкості на конусі від параметрів  $M_\infty$  та  $p_k$

Крім цього, на рис. 2 зображена ще одна сім'я кривих, параметром для якої є  $k = ctg\beta$ . Розв'язок задачі у внутрішній області наведений у вигляді ліній, що мають незначну кривизну, розташовані майже вертикально й з'єднують відповідні точки кривих 1-4 та 5. Треба вказати, що одна точка на кривій швидкості  $U_\infty$  має відповідну їй точку на кожній з ліній 1-4 із різними значеннями  $k$ . Праворуч криві швидкості на конусі асимптотично дотикаються лінії 5, що визначає граничний випадок, коли  $k \rightarrow \infty$ , тобто здійснюється вдвугазу паралельно поверхні тіла.

З допомогою рис. 2 зручно розглянути область існування розв'язку при заданих  $M_\infty, p_k, \Delta, k$ . Вочевидь, що зверху область обмежена кривою швидкості на поверхні розподілу. При цьому точка перетину вказаних ліній є образом граничного випадку, коли  $k \rightarrow \infty$ . Ліворуч область існування розв'язку обмежена умовами, що витікають з припущень, які лежать у основі моделі, що розглядається.

На рис. 2 наочно продемонстровано вплив геометричних параметрів  $\Delta$  і  $k$  на картину течії. Дійсно, за допомогою графічної інтерпретації розв'язків легко визначити, наприклад, що мінімальної швидкості газу, який вдвугазується, можна досягти шляхом збільшення  $\Delta$  при одночасному зменшенні  $k$  або навпаки.

На рис. 3 зображена параметрична залежність кривих швидкості на поверхні розподілу від величин  $M_\infty$  і  $p_k$ . Вектор швидкості на поверхні розподілу збільшується із зменшенням  $M_\infty$  або із збільшенням  $p_k$ .

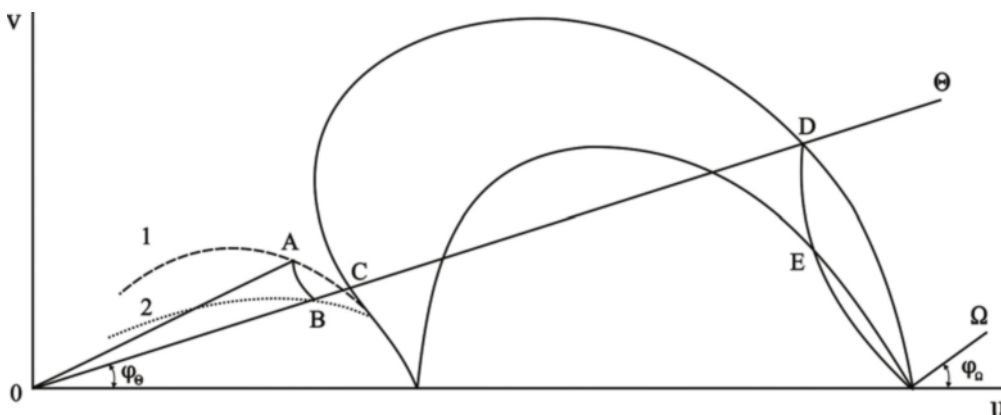


Рис. 4. Розв'язок задачі у площині годографа вектора швидкості

Загальна картина течії у областях I й II зображена на рис. 4, де крива 1 – це геометричне місце кінців вектора швидкості на поверхні конуса при  $M_\infty = 2, p_k = 1.0, \Delta = 9^\circ$ , а крива 2 є геометричним місцем кінців вектора швидкості на поверхні розподілу. Крім того, зображена ударна поляра і яблукоподібна крива для зовнішнього потоку [6] із значенням числа  $M_\infty = 2$ .

У цьому випадку графічно розв'язок задачі визначається наступним чином. На кривій 1 визначається точка A перетину з променем OA, що проведений під кутом  $\theta = \Delta + \beta$  до осі u. Вектор OA визначає швидкість газу, що вдвугазується з поверхні конусу під кутом  $\beta$  до останньої. Поле швидкостей у внутрішній області визначається кривою AB, яка перетинає лінію 2 у точці B. При цьому вектор OB відповідає вектору швидкості на поверхні розподілу  $\Theta$ ,

а кут між променем  $OB$  та віссю  $u$  дорівнює куту  $\Delta$ . Продовження променя  $OB$  дає дві точки перетину із яблукоподібною кривою: точку  $C$  у дозвуковій області течії й точку  $D$  для надзвукового потоку за стрибком ущільнення. Розв'язок у області II визначається кривою  $DE$ , а відрізок  $OE$  відповідає вектору швидкості за стрибком ущільнення [7].

На завершення, треба вказати, що наявність декількох незалежних параметрів задачі  $(M_\infty, p_k, \Delta, k)$  дає можливість надати геометричну інтерпретацію розв'язку у тривимірному просторі. Для цього має сенс використати дві комбінації незалежних параметрів:  $M_\infty, \Delta, k$  та  $p_k, \Delta, k$ . У такому випадку до двох осей  $u, v$  площини годографа швидкості має додаватися третя, яка відповідає значенням  $M_\infty$  або  $p_k$ .

### 3. Висновки

З метою прискорення збіжності ітераційних процесів при проведенні чисельних розрахунків запропоновано графічну інтерпретацію отриманих для вісесиметричної течії результатів у площині годографа вектора швидкості, що дозволило виявити та проаналізувати залежність області існування розв'язку від вихідних параметрів задачі. За допомогою даного підходу наочно показано вплив деяких геометричних параметрів на картину течії.

1. Антонов А.М., Зайцев А.В. Расчет распределения давления по пористым оболочкам вращения при динамическом взаимодействии их с гиперзвуковым потоком газа // Динамика и прочность тяжелых машин, 1980, вып.5, с.64-69. 2. Антонов А.М., Закревский В.А. Исследование влияния донного среза при степенном законе вдува // Прикладная механика, 1979, вып.15, №8, с.64-69. 3. Антонов А.М., Комашенко А.П. Некоторые автомодельные задачи о сильном вдуве газа через пластинку в сверхзвуковом потоке // Прикладная механика, 1969, т.5, вып.10, с.111-114. 4. Зайцев О.В., Хорошилов О.В. Про метод розв'язання задач із вільною границею // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія "Математика і механіка", 2002, вип.7, с.47-53. 5. Зайцев О.В., Хорошилов О.В., Черній Д.І. Метод розв'язання прямої та оберненої крайових задач про невісесиметричне обтікання кінцевих тіл із вдувом // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія "Математика і механіка", 2005, №13, С.54-59. 6. Коцин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, ч.1. М., 1968, 583с. 7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа, М., 1970, 904с. 8. Матвеева Н.С., Нейланд В.Я. Сильный вдув на теле конечной длины в сверхзвуковом потоке // Ученые записки ЦАГИ, 1970, т.1, №5, с.13-22.

Надійшла до редколегії 15.12.09

УДК 539.3

В. Мелешко, д-р фіз.-мат. наук, С. Папков, канд. фіз.-мат. наук, Ю. Токовий, канд. фіз.-мат. наук

## НЕСКІНЧЕННІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ У ЗАДАЧАХ ПРУЖНОЇ РІВНОВАГИ ТІЛ СКІНЧЕНИХ РОЗМІРІВ

У рамках розвитку алгоритму удосконаленої редукції при застосування методу суперпозиції до розв'язання двовимірних задач теорії пружності для тіл скінчених розмірів запропоновано єдиний підхід визначення асимптотичного значення невідомих у нескінчених системах лінійних алгебричних рівнянь, до яких зводяться такого класу задач. Застосування підходу проілюстровано на двовимірній задачі для прямокутної області та вісесиметричній задачі для суцільного циліндра скінченної довжини. Показано, застосування запропонованого підходу дозволяє досягати високої точності обчислень шуканих величин при невеликій кількості рівнянь та невідомих у приведених скінчених системах.

To solve the two-dimensional problems of elasticity for elastic bodies of finite dimensions, a general approach for determination of asymptotic value of coefficients in infinite systems of linear algebraic equations is proposed in order to develop the advanced reduction algorithm within the framework of superposition method. The approach is illustrated with analysis of two cases: i) two-dimensional problem for a rectangle and ii) axially-symmetric problem for a solid finite cylinder. It is shown that application of the proposed approach yields a good accuracy by small number of coefficients and equations in basic finite systems.

### 1. Вступ

Серед аналітичних методів, що застосовуються для розрахунків напружено-деформованого стану пружних обмежених тіл з кутковими точками або ребрами (згин жорстко закріпленої по контуру прямокутної пластини, довгої прямокутної призми чи тонкої пластини під дією планарного силового чи теплового навантаження, вісесиметричного навантаження скінченного циліндра, тощо) метод суперпозиції виділяється як один з найбільш відомих та ефективних. Історія розвитку цього методу нараховує вже понад півтора століття (від знаменитої задачі про рівновагу пружного паралелепіпеда, сформульованої Г. Ляме у лекціях 1852 р.) і пов'язана з іменами видатних математиків Е. Мат'є та Б.М. Кояловича, інженера-кораблебудівника І.Г. Бубнова, механіків Г. Генкі, К.Е. Інґліса, С.П. Тимошенка та багатьох інших. Зокрема, значні досягнення у запровадженні методу суперпозиції отримано завдяки працям В.Т. Грінченка та А.Ф. Улітка [4,5]. Для плоского та вісесиметричного випадків такі задачі можуть бути зведені до класичної бігармонічної задачі про визначення в області бігармонічної функції (Ері або Лява, відповідно) при заданих на границі значеннях самої функції та її нормальної похідної [11]. Ретельні ретроспективні огляди та аналіз праць у цьому напрямку наведено, зокрема, в [10, 13].

Основна ідея методу суперпозиції полягає у побудові загального розв'язку бігармонічного рівняння у вигляді суми розв'инених у ряди Фур'є та Бесселя-Діні за повними системами функцій в кожному з координатних напрямків з довільними двома нескінченими послідовностями коефіцієнтів  $X_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  та  $Y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Виконання таким розв'язком заданих крайових умов призводить до парної нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь загального вигляду

$$\begin{cases} X_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(n)} Y_j + b_n, & n = 1, 2, \dots \\ Y_j = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(j)} X_n + d_j, & j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1)$$

с додатними коефіцієнтами  $a_j^{(n)} > 0$ ,  $c_n^{(j)} > 0$ .

Така система може бути регулярною, якщо