

а кут між променем OB та віссю u дорівнює куту Δ . Продовження променя OB дає дві точки перетину із яблукоподібною кривою: точку C у дозвуковій області течії й точку D для надзвукового потоку за стрибком ущільнення. Розв'язок у області II визначається кривою DE , а відрізок OE відповідає вектору швидкості за стрибком ущільнення [7].

На завершення, треба вказати, що наявність декількох незалежних параметрів задачі $(M_\infty, p_k, \Delta, k)$ дає можливість надати геометричну інтерпретацію розв'язку у тривимірному просторі. Для цього має сенс використати дві комбінації незалежних параметрів: M_∞, Δ, k та p_k, Δ, k . У такому випадку до двох осей u, v площини годографа швидкості має додаватися третя, яка відповідає значенням M_∞ або p_k .

3. Висновки

З метою прискорення збіжності ітераційних процесів при проведенні чисельних розрахунків запропоновано графічну інтерпретацію отриманих для вісесиметричної течії результатів у площині годографа вектора швидкості, що дозволило виявити та проаналізувати залежність області існування розв'язку від вихідних параметрів задачі. За допомогою даного підходу наочно показано вплив деяких геометричних параметрів на картину течії.

1. Антонов А.М., Зайцев А.В. Расчет распределения давления по пористым оболочкам вращения при динамическом взаимодействии их с гиперзвуковым потоком газа // Динамика и прочность тяжелых машин, 1980, вып.5, с.64-69. 2. Антонов А.М., Закревский В.А. Исследование влияния донного среза при степенном законе вдува // Прикладная механика, 1979, вып.15, №8, с.64-69. 3. Антонов А.М., Комашенко А.П. Некоторые автомодельные задачи о сильном вдуве газа через пластинку в сверхзвуковом потоке // Прикладная механика, 1969, т.5, вып.10, с.111-114. 4. Зайцев О.В., Хорошилов О.В. Про метод розв'язання задач із вільною границею // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія "Математика і механіка", 2002, вип.7, с.47-53. 5. Зайцев О.В., Хорошилов О.В., Черній Д.І. Метод розв'язання прямої та оберненої крайових задач про невісесиметричне обтікання кінцевих тіл із вдувом // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія "Математика і механіка", 2005, №13, С.54-59. 6. Коцин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, ч.1. М., 1968, 583с. 7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа, М., 1970, 904с. 8. Матвеева Н.С., Нейланд В.Я. Сильный вдув на теле конечной длины в сверхзвуковом потоке // Ученые записки ЦАГИ, 1970, т.1, №5, с.13-22.

Надійшла до редколегії 15.12.09

УДК 539.3

В. Мелешко, д-р фіз.-мат. наук, С. Папков, канд. фіз.-мат. наук, Ю. Токовий, канд. фіз.-мат. наук

НЕСКІНЧЕННІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ У ЗАДАЧАХ ПРУЖНОЇ РІВНОВАГИ ТІЛ СКІНЧЕНИХ РОЗМІРІВ

У рамках розвитку алгоритму удосконаленої редукції при застосування методу суперпозиції до розв'язання двовимірних задач теорії пружності для тіл скінчених розмірів запропоновано єдиний підхід визначення асимптотичного значення невідомих у нескінчених системах лінійних алгебричних рівнянь, до яких зводяться такого класу задач. Застосування підходу проілюстровано на двовимірній задачі для прямокутної області та вісесиметричній задачі для суцільного циліндра скінченної довжини. Показано, застосування запропонованого підходу дозволяє досягати високої точності обчислень шуканих величин при невеликій кількості рівнянь та невідомих у приведених скінчених системах.

To solve the two-dimensional problems of elasticity for elastic bodies of finite dimensions, a general approach for determination of asymptotic value of coefficients in infinite systems of linear algebraic equations is proposed in order to develop the advanced reduction algorithm within the framework of superposition method. The approach is illustrated with analysis of two cases: i) two-dimensional problem for a rectangle and ii) axially-symmetric problem for a solid finite cylinder. It is shown that application of the proposed approach yields a good accuracy by small number of coefficients and equations in basic finite systems.

1. Вступ

Серед аналітичних методів, що застосовуються для розрахунків напружено-деформованого стану пружних обмежених тіл з кутковими точками або ребрами (згин жорстко закріпленої по контуру прямокутної пластини, довгої прямокутної призми чи тонкої пластини під дією планарного силового чи теплового навантаження, вісесиметричного навантаження скінченного циліндра, тощо) метод суперпозиції виділяється як один з найбільш відомих та ефективних. Історія розвитку цього методу нараховує вже понад півтора століття (від знаменитої задачі про рівновагу пружного паралелепіпеда, сформульованої Г. Ляме у лекціях 1852 р.) і пов'язана з іменами видатних математиків Е. Мат'є та Б.М. Кояловича, інженера-кораблебудівника І.Г. Бубнова, механіків Г. Генкі, К.Е. Інґліса, С.П. Тимошенка та багатьох інших. Зокрема, значні досягнення у запровадженні методу суперпозиції отримано завдяки працям В.Т. Грінченка та А.Ф. Улітка [4,5]. Для плоского та вісесиметричного випадків такі задачі можуть бути зведені до класичної бігармонічної задачі про визначення в області бігармонічної функції (Ері або Лява, відповідно) при заданих на границі значеннях самої функції та її нормальної похідної [11]. Ретельні ретроспективні огляди та аналіз праць у цьому напрямку наведено, зокрема, в [10, 13].

Основна ідея методу суперпозиції полягає у побудові загального розв'язку бігармонічного рівняння у вигляді суми розв'инених у ряди Фур'є та Бесселя-Діні за повними системами функцій в кожному з координатних напрямків з довільними двома нескінченими послідовностями коефіцієнтів X_n , $n = 1, 2, \dots$ та Y_j , $j = 1, 2, \dots$. Виконання таким розв'язком заданих крайових умов призводить до парної нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь загального вигляду

$$\begin{cases} X_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(n)} Y_j + b_n, & n = 1, 2, \dots \\ Y_j = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(j)} X_n + d_j, & j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1)$$

с додатними коефіцієнтами $a_j^{(n)} > 0$, $c_n^{(j)} > 0$.

Така система може бути регулярною, якщо

$$\varphi_n = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(n)} > 0, \quad n=1,2,\dots, \quad \psi_j = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(j)} > 0, \quad j=1,2,\dots \quad (2)$$

або навіть цілком регулярною, коли

$$\varphi_n \geq \theta, \quad n=1,2,\dots, \quad \psi_j \geq \theta, \quad j=1,2,\dots, \quad \theta > 0. \quad (3)$$

Згідно загальної теорії нескінченних систем [6] (значний доробок до якої у вивчення питань єдності розв'язку та збіжності алгоритма простої редукції вніс П.С. Бондаренко [1-3], який працював у Київському університеті протягом тривалого часу) регулярна система має єдиний обмежений (так званий, головний) розв'язок, якщо виконані обмеження $|b_n| \leq C\varphi_n, \quad n=1,2,\dots, \quad |d_j| \leq C\psi_j, \quad j=1,2,\dots,$ на поведінку вільних членів. Аналогічно, повністю регулярна система володіє головним розв'язком, якщо виконані обмеження $|b_n| \leq C, \quad n=1,2,\dots, \quad |d_j| \leq C, \quad j=1,2,\dots,$ на поведінку вільних членів. Тут C – деяка стала.

Традиційний спосіб розв'язання нескінченної системи (1) полягає у застосуванні методу простої редукції. Згідно з цим методом, у перших N рівняннях першої стрічки у сумах по j залишається J перших невідомих $Y_j^{(s)}$, а у перших J рівняннях другої стрічки у сумах по n залишається N перших невідомих $X_n^{(s)}$. Решта ж рівнянь та невідомих для $n > N$ та $j > J$ відкидається. Скінченна система з $N+J$ рівнянь розв'язується у будь-який спосіб (Фур'є, який перший запропонував такий підхід, свою конкретну систему розв'язав явно, а Б.М. Коялович [7] показав, що метод послідовних наближень є збіжним для типової системи при розгляді задачі про прогин жорстко защемленої прямокутної пластинки). При цьому доведено [6], що для регулярної та повністю регулярної систем, метод простої редукції збігається до головного розв'язку

$$X_n^{(s)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} X_n, \quad Y_j^{(s)} \xrightarrow{J \rightarrow \infty} Y_j. \quad (4)$$

Однак, при такому способі розв'язання нескінченної системи (1) завжди маємо

$$X_n = \begin{cases} X_n^{(s)}, & n=1,2,\dots,N, \\ 0, & n > N, \end{cases} \quad Y_j = \begin{cases} Y_j^{(s)}, & j=1,2,\dots,J, \\ 0, & j > J. \end{cases} \quad (5)$$

З іншого боку, відомо [4], що аналіз поля напружень в околі кутових точок для прямокутника або ребер для циліндра вимагає асимптотики коефіцієнтів X_n при $n \rightarrow \infty$ та Y_j при $j \rightarrow \infty$ в системі (1). Очевидно, що метод простої редукції за умови (5) принципово не може дати відповіді на таке питання. Тому метод простої редукції виявляється [4] недостатньо ефективним для обчислення напружень і призводить в околах кутових точок (ребер) до неусувної похибки для довільних (як завгодно великих) значень N та J .

Видатний математик Б.М. Коялович розвинув [8] спеціальну теорію лімітант, яка дозволила встановити характерну асимптотичну поведінку невідомих X_n та Y_j у нескінченних системах

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{j \rightarrow \infty} Y_j = G = \text{const} \neq 0, \quad (6)$$

що пояснює причину недоліку алгоритму простої редукції.

З огляду на закон асимптотичних виразів (6), важливим питанням у реалізації методу суперпозиції є визначення константи G , що дає можливість застосувати алгоритм удосконаленої редукції й тим самим уникнути ускладнень з визначенням розв'язків поблизу кутів. Традиційний підхід [4] впровадження алгоритму удосконаленої редукції полягає у реалізації припущення

$$X_n = X_N, \quad n > N, \quad Y_j = Y_J, \quad j > J \quad (7)$$

при врахуванні нескінченних сум у перших $N+J$ та $N+J$ рівняннях. Після розв'язання скінченної системи, яка відповідає системі (1), значення G визначається за формулою

$$G = \frac{1}{2}(X_N + Y_J). \quad (8)$$

Ґрунтуючись на законі (6), Б.М. Коялович запропонував [8] (з посиланням на роботу І.Г. Бубнова 1902 р.) дещо інший підхід врахування асимптотичної поведінки невідомих. Поклавши

$$X_n = G + x_n, \quad Y_j = G + y_j, \quad (9)$$

де

$$x_n = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad y_j = o(1), \quad j \rightarrow \infty, \quad (10)$$

(більш точна оцінка наведена в [13]), систему (1) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(n)} y_j - G\varphi_n + b_n, & n=1,2,\dots, \\ y_j = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(j)} x_n - G\psi_j + d_j, & j=1,2,\dots \end{cases} \quad (11)$$

і вже таку регулярну (повністю регулярну) систему розв'язувати методом простої редукції.

Важливе з теоретичної та практичної точки зору питання було сформульоване Б.М. Кояловичем [8, с. 163] щодо можливості визначення величини G *a priori*, тобто до розв'язування нескінченної систем (1) або (11). Загальні міркування з цього питання для випадку плоскої задачі для прямокутника містить стаття [12].

Метою даної роботи є отримання таких співвідношень для визначення величини G у рамках плоскої задачі теорії пружності для прямокутної області та вісесиметричної задачі для суцільного циліндра скінченної довжини, які дозволяють здійснювати надійний розрахунок напружено-деформованого стану вказаних областей, включно з околами кутових точок.

2. Розв'язування бігармонічних крайових задач

2.1 Задача теорії пружності для прямокутника

За відсутності масових сил плоска задача теорії пружності у прямокутній області $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ зводиться завдяки співвідношенням [11]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (12)$$

до розв'язання однорідного бігармонічного рівняння

$$\nabla^2 \nabla^2 U = 0 \quad (13)$$

для функції напружень Ері $U(x, y)$. Тут σ_x , σ_y , τ_{xy} – компоненти тензора напружень, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двовимірний оператор Лапласа в прямокутній системі координат.

Крайові умови для системи статично зрівноважених зовнішніх зусиль (для спрощення подальших викладок розглядаємо випадок симетричного нормального навантаження) мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_x(\pm a, y) &= q(y), & \tau_{xy}(\pm a, y) &= 0, & -b \leq y \leq b, \\ \sigma_y(x, \pm b) &= p(x), & \tau_{xy}(x, \pm b) &= 0, & -a \leq x \leq a. \end{aligned} \quad (14)$$

Крайова задача (13), (14) становить важливий частковий випадок славетної задачі Ляме про рівновагу пружного паралелепіпеда під дією довільної системи нормальних навантажень на його гранях. Сам Ляме вважав цю проблему такою ж складною як і задачу трьох тіл у небесній механіці (тепер здається, що він недооцінив труднощі другої задачі), і тому під його впливом Паризька Академія наук у 1846 році оголосила конкурс на здобуття *Grand Prix de Mathematiques* – золоті медалі та премії у 3000 франків. Цей конкурс повинен був визначити переможця у 1848 році, але був тричі продовжений на роки 1853 (поряд з великою теоремою Ферма!), 1857 та 1861, та нарешті у 1858 році був змінений на іншу, більш просту задачу.

Вираз для функції напружень Ері має вигляд [10, 12]

$$\begin{aligned} U(x, y) &= A_0 x^2 + B_0 y^2 + b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{X_n}{\alpha_n^2} \left[\left(b \operatorname{ch} \alpha_n b + \frac{1}{\alpha_n} \right) \frac{\operatorname{ch} \alpha_n y}{\operatorname{sh} \alpha_n b} - y \frac{\operatorname{sh} \alpha_n y}{\operatorname{sh} \alpha_n b} \right] \cos \alpha_n x - \\ &- a \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{Y_j}{\beta_j^2} \left[\left(a \operatorname{ch} \beta_j a + \frac{1}{\beta_j} \right) \frac{\operatorname{ch} \beta_j x}{\operatorname{sh} \beta_j a} - x \frac{\operatorname{sh} \beta_j x}{\operatorname{sh} \beta_j a} \right] \cos \beta_j y \end{aligned} \quad (15)$$

де $\alpha_n = n\pi/a$, $\beta_j = j\pi/b$; $A_0, B_0, X_n, n = 1, 2, \dots, Y_j, j = 1, 2, \dots$, – невідомі коефіцієнти. Виразивши компоненти тензора напружень через функцію (15) за допомогою співвідношень (12), їх слід підкорити крайовим умовам (14), попередньо розвинувши функції $p(x)$ та $q(y)$ у ряди Фур'є

$$p(x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n p_n \cos \alpha_n x, \quad q(y) = q_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j q_j \cos \beta_j y,$$

де

$$p_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a p(x) dx, \quad p_n = \frac{(-1)^n}{a} \int_{-a}^a p(x) \cos \alpha_n x dx, \quad q_0 = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b q(y) dy, \quad q_j = \frac{(-1)^j}{b} \int_{-b}^b q(y) \cos \beta_j y dy.$$

Сталі A_0 та B_0 визначаються явно

$$2A_0 = p_0, \quad 2B_0 = q_0, \quad (16)$$

і відповідають постійному несамозрівноваженому навантаженню на торцях прямокутника.

Коефіцієнти рядів Фур'є X_n та Y_j визначаються з нескінченної системи

$$\begin{cases} X_n b \Delta(\alpha_n b) = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \frac{4\alpha_n^3}{(\beta_j^2 + \alpha_n^2)^2} - \alpha_n p_n, & n = 1, 2, \dots, \\ Y_j a \Delta(\beta_j a) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{4\beta_j^3}{(\alpha_n^2 + \beta_j^2)^2} + \beta_j q_j, & j = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (17)$$

де $\Delta(\xi) = \operatorname{cth} \xi + \frac{\xi}{\operatorname{sh}^2 \xi}$. Використавши значення суми

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{4\lambda^3}{(\lambda^2 + \mu_i^2)^2} = h\Delta(\lambda h) - \frac{2}{\lambda}, \quad \mu_i = \frac{i\pi}{h}, \quad (18)$$

приходимо до висновку, що система (17) є регулярною, причому згідно (2)

$$\varphi_n = \frac{2}{\alpha_n b \Delta(\alpha_n b)} = O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \quad \psi_j = \frac{2}{\beta_j a \Delta(\beta_j a)} = O(j^{-1}), \quad j \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Саме система (17) (яка при деякому конкретному навантаженні виявляється тотожною для задачі про згин жорстко защемленої прямокутної пластинки) і була предметом детального дослідження, здійсненого Б.М. Кояловичем. У своїй роботі [7] він довів, що для системи (17) сходиться метод послідовних наближень, пізніше [8], він розвинув спеціальну теорію лімітантів, яка дозволила довести справедливості закону асимптотичних виразів (6) для поведінки невідомих з великими номерами.

2.2. Вісесиметрична задача для суцільного пружного циліндра скінченної довжини

У випадку вісесиметричного навантаження скінченного пружного циліндра $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-h \leq z \leq h$ відповідна задача теорії пружності зводиться до бігармонічного рівняння

$$\nabla^2 \nabla^2 \chi = 0 \quad (20)$$

для бігармонічної функції Лява [9] $\chi(r, z)$, де вісесиметричний оператор Лапласа у циліндричній системі координат

$$(r, \theta, z) \text{ має вигляд } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

При цьому компоненти тензора напружень $\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}$ виражаються через функцію $\chi(r, z)$ співвідношеннями:

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right), \quad \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left((2 - \sigma) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right), \quad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left((1 - \sigma) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right), \quad (21)$$

в яких через σ позначено коефіцієнт Пуассона.

Для симетричного відносно площини $z = 0$ навантаження циліндра лише нормальними (для спрощення викладок) зусиллями крайові умови мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_r(a, z) &= f(z), \quad \tau_{rz}(a, z) = 0, \quad -h \leq z \leq h, \\ \sigma_z(r, \pm h) &= g(r), \quad \tau_{rz}(r, \pm h) = 0, \quad 0 \leq r \leq a. \end{aligned} \quad (22)$$

Побудова розв'язку бігармонічного рівняння в вісесиметричному випадку, що підходить для задоволення усіх крайових умов (20), можна здійснювати у різний спосіб. Ми застосуємо підхід [15], що ґрунтується на використанні функції Лява, вираз для якої вибираємо у вигляді

$$\chi(r, z) = B_0 z^3 + D_0 r^2 z + a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n R_n(r) \frac{\sin k_n z}{k_n^4} + h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j Z_j(z) \frac{J_0(\lambda_j r)}{\lambda_j^4 J_0(\lambda_j a)},$$

де

$$R_n(r) = k_n r \frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)} - \left(2 - 2\sigma + k_n a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} \right) \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)}, \quad Z_j(z) = (2\sigma + \lambda_j h \operatorname{cth} \lambda_j h) \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - \lambda_j z \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h},$$

$k_n = n\pi/h$; $\lambda_j > 0$ – корінь рівняння $J_1(\lambda_j a) = 0$, J_0 , J_1 і I_0 , I_1 – відповідно звичайні та модифіковані функції Бесселя першого роду нульового та першого порядків.

Визначення напружень згідно зі співвідношеннями (21) та задоволення ними крайових умов (22) призводить до скінченної системи

$$6\sigma B_0 + 2(2\sigma - 1)D_0 = f_0, \quad 6(1 - \sigma)B_0 + 4(2 - \sigma)D_0 = g_0$$

для сталих B_0 та D_0 , що відповідають несамозрівноваженим навантаженням, а також до нескінченної системи

$$\begin{cases} X_n P_n - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \frac{4k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = f_n, \quad n = 1, 2, \dots, \\ Y_j \Delta_j - \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{4\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = -g_j, \quad j = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (23)$$

де

$$P_n = a^2 \left(\frac{I_0^2(k_n a)}{I_1^2(k_n a)} - 1 \right) + 2 \frac{\sigma - 1}{k_n^2} > 0, \quad \Delta_j = \frac{h}{\lambda_j} \left(\operatorname{cth} \lambda_j h + \frac{\lambda_j h}{\operatorname{sh}^2 \lambda_j h} \right) > 0,$$

$$f_0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(z) dz, \quad g_0 = \frac{2}{a^2} \int_0^a g(r) dr, \quad f_n = \frac{(-1)^n}{h} \int_{-h}^h f(z) \cos k_n z dz, \quad g_j = \frac{2}{a^2} \int_0^a g(r) \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} dr.$$

Як і в попередньому випадку, можна довести [4], що система (23) є регулярною, володіє єдиним обмеженим розв'язком для неперервних навантажень $f(z)$ та $g(r)$ і для неї справедливий закон асимптотичних виразів (6).

3. Визначення значення сталої G

3.1 Задача для прямокутника

У термінах невідомих x_n, y_j, G з використанням суми (18) нескінченна система (17) набуває вигляду

$$\begin{cases} x_n b \Delta(\alpha_n b) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \frac{4\alpha_n^3}{(\beta_j^2 + \alpha_n^2)^2} - G \frac{2}{\alpha_n} - \alpha_n p_n, & n = 1, 2, \dots, \\ y_j a \Delta(\beta_j a) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{4\beta_j^3}{(\alpha_n^2 + \beta_j^2)^2} - G \frac{2}{\beta_j} + \beta_j q_j, & j = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (24)$$

що конкретизує вигляд системи (11).

Пропонується два способи отримання додаткового рівняння для визначення G .

У першому способі розділимо першу стрічку системи (24) на α_n і просумуємо по n від 1 до нескінченності. Аналогічно, розділимо другу стрічку системи (24) на β_j просумуємо по j в тих же межах. Ці операції допустимі згідно з асимптотичною поведінкою (10) невідомих x_n та y_j . Такою же законною є зміна порядку підсумовування у правих частинах отриманих рівнянь. Для неперервних навантажень маємо $p_n = O(n^{-2}), n \rightarrow \infty$, та $q_j = O(j^{-2}), j \rightarrow \infty$, і тому всі операції є допустимими.

Використовуючи значення сум

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{4\mu_i^2}{(\lambda^2 + \mu_i^2)} = h \Delta(\lambda h) - \frac{2h^2}{\text{sh}^2 \lambda h}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i^2} = \frac{h^2}{6}, \quad (25)$$

та додавши два отримані рівняння, приходимо до одного рівняння

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{2b^2}{\text{sh}^2 \alpha_n b} + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \frac{2a^2}{\text{sh}^2 \beta_j a} + G \frac{a^2 + b^2}{3} = \sum_{j=1}^{\infty} q_j - \sum_{n=1}^{\infty} p_n \quad (26)$$

Права частина (26) дорівнює, згідно з розвиненням навантажень $p(x)$ та $q(y)$ в ряди Фур'є, величини $(q(b) - q_0) - (p(a) - p_0)$. Можна показати [10], що рівняння (26) виражає значення різниці головних напружень $\sigma_x(a, b) - \sigma_y(a, b)$ у кутовій точці, яка задається крайовими умовами (14). Таким чином, рівняння для G має чіткий механічний зміст. Відзначимо, що коефіцієнти при x_n та y_j у правій частині (26) спадають за експоненціальним законом, як $\exp(-2n)$ та $\exp(-2j)$, відповідно. Тому, декілька перших невідомих (які надійно визначаються при розв'язанні системи (24) методом простої редукції) дають дуже стабільне значення для G .

Другий спосіб визначення рівняння для G полягає в тому, що перша стрічка системи (24) ділиться на α_n^3 , а друга – на β_j^3 , та проводиться підсумовування по n та j . Використавши значення суми (18), після нескладних перетворень, отримуємо рівняння

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{2}{\alpha_n^4} + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \frac{2}{\beta_j^4} + G \frac{a^4 + b^4}{45} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j}{\beta_j^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\alpha_n^2}. \quad (27)$$

Використавши значення суми

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\cos \mu_j z}{\mu_i^2} = \frac{3z^2 - h^2}{12}, \quad \mu_j = \frac{i\pi}{h}, \quad (28)$$

праву частину (27) можна подати як

$$\frac{1}{12b} \int_{-b}^b q(y)(3y^2 - b^2) dy - \frac{1}{12a} \int_{-a}^a p(x)(3x^2 - a^2) dx.$$

Механічне тлумачення рівняння (27) потребує подальших досліджень. Відзначимо, що коефіцієнти при x_n та y_j тут спадають лише за степеневим законом, хоча і досить швидко, як $O(n^{-4})$ та $O(j^{-4})$, відповідно.

Таким чином, систему рівнянь (24) разом з додатковим рівнянням (26) або (27) можна розв'язувати методом простої редукції, залишаючи скінчену кількість N та J невідомих та $N + J$ рівнянь. При цьому, числа N та J є невеликими, що значно полегшує обчислення.

3.2. Віссиметрична задача для скінченного циліндра

У термінах нових невідомих (9) система (23) набуває вигляду

$$\begin{cases} x_n P_n - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4k_n^2 y_j}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + \frac{2G(1 + \sigma)}{k_n^2} = f_n, \\ y_j \Delta_j - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\lambda_j^2 x_n}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + \frac{2G}{\lambda_j^2} = -g_j. \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

Тут також можливо запропонувати два підхода до визначення ефективного рівняння для сталої G .

Згідно першого, просумуємо першу групу рівнянь (29) по n , а другу – по j . Це можна здійснити з огляду на збіжність наявних рядів та асимптотики (10). Додавши отримані в такий спосіб рівняння, з використанням формул (25) та

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{4\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = a^2 \left(1 - \frac{I_0^2(k_n a)}{I_1^2(k_n a)} \right) + \frac{2a I_0(k_n a)}{k_n I_1(k_n a)}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} = \frac{a^2}{8},$$

приходимо до

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \left[P_n + \frac{1-\sigma}{k_n^2} - \frac{a I_0(k_n a)}{k_n I_1(k_n a)} \right] + \sum_{j=1}^J \frac{y_j h^2}{\text{sh}^2 \lambda_j h} + G \left(\frac{1+\sigma}{6} h^2 + \frac{a^2}{8} \right) = \frac{f(h) - f_0}{2} - \frac{g(a) - g_0}{2}. \quad (30)$$

Рівняння (29) у сукупності з (30) дозволяє визначити величину G для скінченних значень N і J . Рівняння (30) відображає механічні особливості задачі, оскільки відповідає різниці головних напружень на ребрі циліндра. При цьому коефіцієнти при x_n спадають як $\frac{1}{k_n^2 a^2}$, а при y_j – як $\exp(-2\lambda_j h)$, що є важливим фактором при виборі значень N та J .

Додаткове рівняння для визначення G у задачі для циліндра можна отримати й у інший спосіб. Якщо попередньо поділити рівняння першої групи системи (23) на k_n^2 , а другої – на λ_j^2 , а потім проробити ті ж самі дії, які застосовувалися для отримання рівняння (30), то отримаємо

$$(1+\sigma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{k_n^4} + \sum_{j=1}^J \frac{y_j}{\lambda_j^4} + G \left(\frac{1+\sigma}{90} h^4 + \frac{a^4}{192} \right) = \int_0^h f(z) \frac{3z^2 - h^2}{12h} dz + \int_0^a r g(r) \frac{2r^2 - a^2}{8a^2} dr. \quad (31)$$

Коефіцієнти при x_n та y_j у рівнянні (31) спадають пропорційно до четвертого степеня відповідних власних значень і мають простіший вигляд, ніж відповідні у рівнянні (30). Зауважимо також, що права частина рівняння (31) є відомою функцією, що виражається через задані крайові умови.

Варто також зауважити, що точність обчислення розв'язків нескінченних систем (17), (23) при переході до основних скінченних систем при $n=1, \dots, N$, $j=1, \dots, J$ значною мірою залежить від характеру заданих крайових умов, що відповідає поведінці вільних членів у вказаних системах. Вивчення цього питання детальніше, а також з'ясування фізичного змісту цього рівняння може стати предметом для подальших досліджень.

4. Числові приклади та обговорення

4.1. Приклад Тимошенка для прямокутної області

У якості першого прикладу розглянемо визначення сталої G у задачі про розтягування прямокутника нормальними зусиллями

$$q(y) = 12(y^2 - b^2), \quad p(x) = 0$$

на торцях $x = \pm a$ (приклад С.П. Тимошенка). Для цього випадку вільні члени системи (12) набувають вигляду:

$$p_n = 0, \quad q_j = \frac{48}{\beta_j}. \quad (32)$$

Зауважимо, що до нескінченної системи (17) з вільними членами (32) зводиться також задача про згин тонкої жорсткозашемленої прямокутної пластинки [7,8].

Для квадрата $a=b=1$, система (24) з додатковими рівняннями (26) або (27), з огляду на симетрію $x_n = -y_j$ ($n=j$), дозволяє визначити сталу G точно: $G=12$.

У випадку $a=1, b=2$ сталу G вже не вдається визначити з міркувань симетрії. В таблиці 1 наведені результати обчислень величини G з використанням рівняння (26).

Таблиця 1

N	J	G
1	2	17,974
1	4	17,970
2	4	17,972
3	6	17,972

З наведених даних робимо висновок, що використання запропонованого підходу дозволяє отримати значення G з високою точністю за відносно невеликої кількості членів та рівнянь у зведених скінчених системах.

4.2. Скінчений циліндр, навантажений на торцях параболічними нормальними зусиллями

У якості прикладу застосування рівнянь (30) та (31) у вісесиметричній задачі, розглянемо навантаження

$$g(r) = 2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 - 1, \quad f(z) = 0, \quad (33)$$

аналогічні до розглянутих у пункті 4.1 для прямокутника.

Таблиця 2

$N \backslash J$	1	2	3	4	5
1	-1,5417	-1,5407	-1,5406	-1,5405	-1,5405
2	-1,5413	-1,5405	-1,5404	-1,5404	-1,5404
3	-1,5408	-1,5402	-1,5401	-1,5401	-1,5401
4	-1,5405	-1,5401	-1,5400	-1,5400	-1,5400
5	-1,5404	-1,5400	-1,5400	-1,5400	-1,5400

У таблиці 2 наведено результати обчислення величини G на основі (29), (30) для випадку кубоподібного циліндра ($a = h$). З даної таблиці можна зробити два основні висновки: як і в попередньому прикладі для квадрата, найкраща точність досягається при $J = N$; використання (29), (30) забезпечує досить високу точність в обчисленні G . Аналогічні результати мають місце і за використання рівняння (31) замість (30).

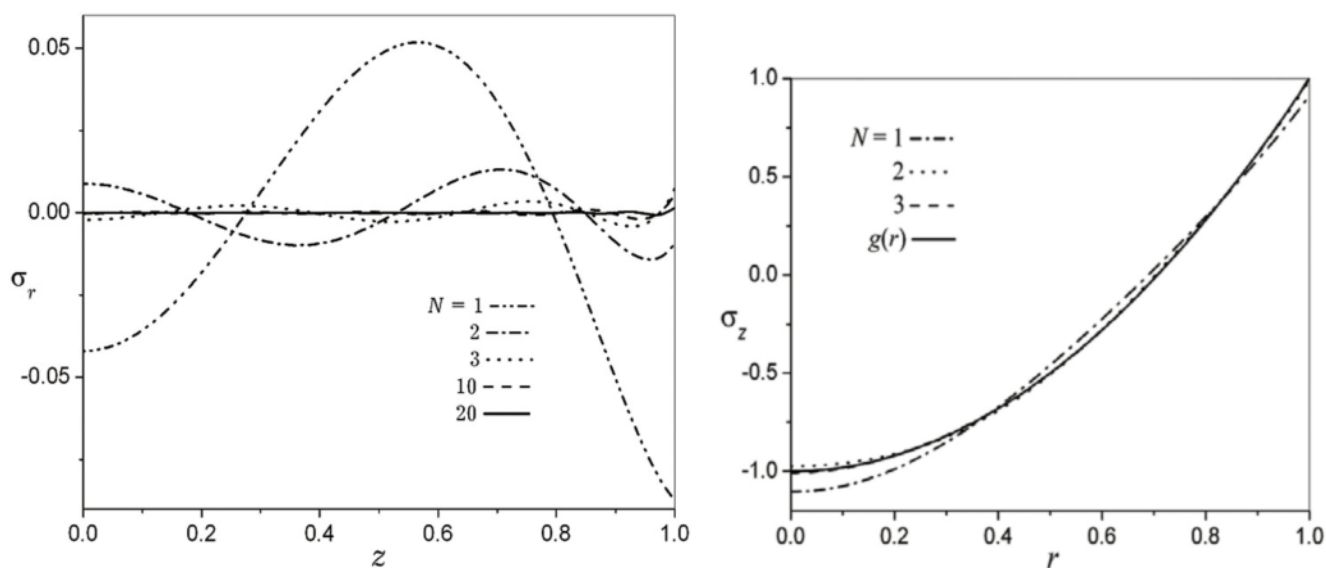


Рис. 1. Задоволення радіальними та осьовими напруженнями крайових умов в залежності від кількості рівнянь у скінченій системі (29) при $J = N$

Зауважимо, що отримані значення величини G у сукупності з розв'язками відповідної скінченної системи дозволяють здійснювати розрахунок напружень у циліндрі з високою точністю навіть за утримання лише кількох рівнянь та складових у скінченних сумах. Важливим критерієм точності обчислень є задоволення напруженнями крайових умов на бічній поверхні циліндра. На рис. 1 показано, як радіальні та осьові напруження задовольняють крайові умови в залежності від кількості врахованих складових та рівнянь в основній системі (29). Як бачимо, напруження добре задовольняють крайові умови (33), починаючи з $N = J = 2$.

5. Висновки

Запропоновано підхід до визначення асимптотичного значення невідомих у нескінченних система, до яких зводяться двовимірні задачі теорії пружності для прямокутника та суцільного циліндра, а також теорії пластин, за використання методу суперпозиції. Підхід полягає в отриманні додаткового рівняння, яке у комплексі з рівняннями основної скінченної системи рівнянь дозволяє встановити вираз для G . Розглянуті числові приклади показали ефективність запропонованого підходу як у випадку прямокутника, так і для скінченного циліндра, що полягає у досягненні високої точності обчислень напружено-деформованого стану вказаних тіл за досить малої кількості невідомих та рівнянь, що враховуються в основних скінченних системах.

1. Бондаренко П.С. К вопросу об единственности для бесконечных систем линейных уравнений // Вестник КГУ. Мат. сборник. – 1951. – Т.29, № 2. – С.403-418. 2. Бондаренко П.С. Зауваження до чисельного розв'язування крайових задач рівняння Лапласа і бігармонічного рівняння // Вестник КГУ. Мат. сборник. – 1954. – № 5. – С.39-49. 3. Бондаренко П.С. О сходимости алгоритма последовательных приближений и оценки погрешностей при численном решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Вестник КГУ. Мат. сборник. – 1957. – № 9. – С.81-89. 4. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – К., 1978. 5. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Равновесие упругих тел канонической формы. – К., 1985. 6. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М., 1962. 7. Коялович Б.М. Об одном уравнении с частными производными четвертого порядка. – СПб., 1902. 8. Коялович Б.М. Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // Изв. Физ.-Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. – 1930. – Т. III. – С.41-167. 9. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.-Л., 1935. 10. Мелешко В.В. Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 3. – С.45-68. 11. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966. 12. Папков С.О., Мелешко В.В. Двовимірні бігармонічна задача в прямокутнику // Вісник Київського ун-та. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2009. – № 4. – С.40-43. 13. Meleshko V.V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Reviews. – 2003. – V. 56. – P.33-85. 14. Meleshko V.V., Gomitko A.M. Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle // Proc. R. Soc. London. – 1997. – Vol. A453. – P. 2139-2160. 15. Meleshko V.V. Equilibrium of an elastic finite cylinder: Filon's problem revisited // J. Engng Math. – 2003. – Т. 46. – P. 355-376.