УДК 517.946

А. Громик, викл., І. Конет, д-р фіз.-мат. наук

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ОБМЕЖЕНИХ БАГАТОШАРОВИХ ПРОСТОРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Методом інтегральних перетворень побудовано точні аналітичні розв'язки нестаціонарних задач теплопровідності в обмежених багатошарових просторових середовищах.

The method of integral transformations builds up the exact analytical solution of non-stationary problems of heat conductivity in the limited multi-layer space areas.

1. Вступ

Нестаціонарні (початково-крайові) задачі феноменологічної теорії теплопровідності для багатошарових (кусково-однорідних) середовищ у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат становлять значний теоретичний, практичний та економічний інтерес [5,7,14,15]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків двовимірних та тривимірних лінійних температурних задач в однорідних і кусково-однорідних середовищах присвячені монографії [8-10, 12]. Зокрема, в [10] розглянуто випадок обмежених кусково-однорідних за декартовою координатою циліндрично-кругових середовищ (просторів, просторів з порожниною, суцільних тіл і тіл з порожниною). Необмежені двоскладові та тришарові просторові середовища розглянуто у працях [2-4,11]. У цій статті ми пропонуємо інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків нестаціонарних задач теплопровідності для обмежених кусково-однорідних просторових середовищ у декартовій системі координат.

2. Постановка задачі

Задача про структуру нестаціонарного температурного поля в ортотропному обмеженому $(n+1)$-шаровому просторовому середовищі математично зводиться до побудови обмеженого на множині

$$D_3 = \left\{(t,x,y,z)\middle| t>0; (x,y)\in\Omega_2 = \langle a;b\rangle\times\langle c;d\rangle; z\in K_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1}(l_{j-1};l_j); l_0\ge 0; l_k<l_{k+1}; l_{n+1}\equiv l<\infty\right\}$$

розв'язку диференціальних рівнянь теплопровідності [6, 17]

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} - \left[a_{xj}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]T_j + \chi_j^2 T_j = f_j(t,x,y,z); z\in I_j; j=\overline{1,n+1}, \tag{1}$$

з початковими умовами

$$T_j(t,x,y,z)\Big|_{t=0} = g_j(x,y,z); z\in I_j; j=\overline{1,n+1}, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0)T_1\Big|_{z=l_0} = g_0(t,x,y), (\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1})T_{n+1}\Big|_{z=l} = g_l(t,x,y), \tag{3}$$

умовами неідеального теплового контакту [1]

$$\begin{cases} [(R_k\frac{\partial}{\partial z}+1)T_k - T_{k+1}]\Big|_{z=l_k} = 0, \\ (\nu_k\frac{\partial T_k}{\partial z} - \nu_{k+1}\frac{\partial T_{k+1}}{\partial z})\Big|_{z=l_k} = 0, k=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{4}$$

та відповідними крайовими умовами на межі області Ω_2, де $a_{xj}, a_{yj}, a_{zj}\ge 0$ – коефіцієнти температуропровідності у напрямках координатних осей $x,y,z\left(j=\overline{1,n+1}\right)$; $\chi_j^2\ge 0$ – коефіцієнти дисипації теплової енергії; $f(t,x,y,z) = \left\{f_1(t,x,y,z), f_2(t,x,y,z),..., f_{n+1}(t,x,y,z)\right\}$ – інтенсивність теплових джерел; $g(x,y,z)=\left\{g_1(x,y,z), g_2(x,y,z),..., g_{n+1}(x,y,z)\right\}$ – температура середовища в початковий момент часу; $\alpha_{11}^0,\beta_{11}^0;\alpha_{22}^{n+1},\beta_{22}^{n+1}$ – деякі дійсні сталі; $g_0(t,x,y)$, $g_l(t,x,y)$ – задані обмежені неперервні функції в області $(0;+\infty)\times\Omega_2$; $R_k\ge 0$ – коефіцієнти термоопору; $\nu_k,\nu_{k+1}\ge 0$ – коефіцієнти теплопровідності; $T(t,x,y,z)=\left\{T_1(t,x,y,z), T_2(t,x,y,z),..., T_{n+1}(t,x,y,z)\right\}$ – шукана температура.

3. Основна частина

3.1. Інтегральне зображення розв'язку задачі теплопровідності в кусково-однорідному середовищі $(-\infty;+\infty)\times(0;b)\times\left\{z\in K_n^+\right\}$.

Розглянемо область $\Omega_2 = (-\infty;+\infty)\times(0;b)$. У цьому випадку на межі області Ω_2 виконуються крайові умови

$$\left.\frac{\partial^k T_j}{\partial x^k}\right|_{|x|=\infty} = 0; k = 0,1; j = \overline{1, n+1}, \tag{5}$$

щодо змінної x та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1\right)T_j\Big|_{y=0} = \omega_{1j}(t,x,z); \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2\right)T_j\Big|_{y=b} = \omega_{2j}(t,x,z), j = \overline{1, n+1} \tag{6}$$

щодо змінної y, де де $h_1 \geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $y = 0$; $\omega_{1j}(t,x,z) = h_1 T_j^{c1}(t,x,z), T_j^{c1}(t,x,z)$ – температура середовища на поверхні $y = 0$; $h_2 \geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $y = b$; $\omega_{2j}(t,x,z) = h_2 T_j^{c2}(t,x,z), T_j^{c2}(t,x,z)$ – температура середовища на поверхні $y = b$.

Вважаємо, що для задачі (1)-(6) виконуються умови узгодженості [17]:

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right) g_1\Big|_{z=l_0} = g_0(0,x,y); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right) g_{n+1}\Big|_{z=l} = g_l(0,x,y);$$

$$\begin{cases} \left.\left[\left(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1\right) g_k - g_{k+1}\right]\right|_{z=l_k} = 0, \\ \left.\left(\nu_k \frac{\partial g_k}{\partial z} - \nu_{k+1} \frac{\partial g_{k+1}}{\partial z}\right)\right|_{z=l_k} = 0; k = \overline{1, n}, \end{cases} \left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1\right) g_j\Big|_{y=0} = \omega_{1j}(0,x,z); \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2\right) g_j\Big|_{y=b} = \omega_{2j}(b,x,z), j = \overline{1, n+1}.$$

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(6) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 13, 12].

До задачі (1)-(6) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної x [16]:

$$F_x\left[g(x)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\sigma x} dx \equiv \tilde{g}(\sigma), i = \sqrt{-1}, \tag{7}$$

$$F_x^{-1}\left[\tilde{g}(\sigma)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma \equiv g(x), \tag{8}$$

$$F_x\left[\frac{d^2 g}{dx^2}\right] = -\sigma^2 F_x\left[g(x)\right] \equiv -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma). \tag{9}$$

Інтегральний оператор F_x за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайовій задачі (1)-(6) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3' = \left\{(t,y,z) \mid t \geq 0; y \in (0;b); z \in K_n^+\right\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{T}_j}{\partial t} - \left[a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\tilde{T}_j + \left(a_{xj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2\right)\tilde{T}_j = \tilde{f}_j(t,\sigma,y,z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \tag{10}$$

з початковими умовами

$$\tilde{T}_j(t,\sigma,y,z)\Big|_{t=0} = \tilde{g}_j(\sigma,y,z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \tag{11}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right)\tilde{T}_1\Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_0(t,\sigma,y); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right)\tilde{T}_{n+1}\Big|_{z=l} = \tilde{g}_l(t,\sigma,y), \tag{12}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1\right)\tilde{T}_j\Big|_{y=0} = \tilde{\omega}_{1j}(t,\sigma,z); \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2\right)\tilde{T}_j\Big|_{y=b} = \tilde{\omega}_{2j}(t,\sigma,z) \tag{13}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left.\left[\left(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1\right)\tilde{T}_k - \tilde{T}_{k+1}\right]\right|_{z=l_k} = 0, \\ \left.\left(\nu_k \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial z} - \nu_{k+1} \frac{\partial \tilde{T}_{k+1}}{\partial z}\right)\right|_{z=l_k} = 0; k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{14}$$

До задачі (10)-(14) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті щодо змінної y [17]:

$$\Lambda_{yk}\left[g(y)\right] = \int_0^b g(y)\, v_k(y)\, dy \equiv g_k, \tag{15}$$

$$\Lambda_{yk}^{-1}\left[g_k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{v_k(y)}{\|v_k\|^2} \equiv g(y), \tag{16}$$

$$\Lambda_{yk}\left[\frac{d^2g}{dy^2}\right]=-\gamma_k^2 g_k+\nu_k(0)\left(-\frac{d}{dy}+h_1\right)g\Big|_{y=0}+\nu_k(b)\left(\frac{d}{dy}+h_2\right)g\Big|_{y=b}, \tag{17}$$

де ядро перетворення

$$\nu_k(y)=\frac{\gamma_k\cos(\gamma_k y)+h_1\sin(\gamma_k y)}{\sqrt{\gamma_k^2+h_1^2}},\ \|\nu_k\|^2\equiv\int_0^b\nu_k^2(y)dy=\frac{b}{2}+\frac{(h_1+h_2)(\gamma_k^2+h_1h_2)}{2(\gamma_k^2+h_1^2)(\gamma_k^2+h_2^2)},$$

$\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$ctg(\gamma b)=\frac{\gamma^2-h_1h_2}{\gamma(h_1+h_2)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_{yk} за правилом (15) внаслідок тотожності (17) початково-крайовій задачі (10)-(14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3''=\{(t,z)\mid t>0; z\in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial\tilde{T}_{jk}}{\partial t}-a_{zj}^2\frac{\partial^2\tilde{T}_{jk}}{\partial z^2}+\left(a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2\gamma_k^2+\chi_j^2\right)\tilde{T}_{jk}=\tilde{G}_{jk}(t,\sigma,z); z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1} \tag{18}$$

з початковими умовами

$$\tilde{T}_{jk}(t,\sigma,z)\big|_{t=0}=\tilde{g}_{jk}(\sigma,z); z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}, \tag{19}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)\tilde{T}_{1k}\Big|_{z=l_0}=\tilde{g}_{0k}(t,\sigma);\ \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1}\right)\tilde{T}_{n+1,k}\Big|_{z=l_0}=\tilde{\tilde{g}}_{lk}(t,\sigma) \tag{20}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases}\left[\left[\left(R_p\frac{\partial}{\partial z}+1\right)\tilde{T}_{pk}-\tilde{T}_{p+1,k}\right]\right]_{z=l_p}=0,\\ \left(\nu_p\frac{\partial\tilde{T}_p}{\partial z}-\nu_{p+1}\frac{\partial\tilde{T}_{p+1,k}}{\partial z}\right)\Big|_{z=l_p}=0;\ p=\overline{1,n},\end{cases} \tag{21}$$

де $\tilde{F}_{jk}(\sigma,z)=\tilde{f}_{jk}(t,\sigma,z)+a_{yj}^2\nu_k(0)\tilde{\omega}_{1j}(t,\sigma,z)+a_{yj}^2\nu_k(b)\tilde{\omega}_{2j}(t,\sigma,z)$.

До задачі (18)-(21) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0;l]$ з *n* точками спряження [12]:

$$F_{jn}[g(z)]=\int_{l_0}^{l}g(z)V(z,\lambda_j)\sigma(z)dz\equiv g_j, \tag{22}$$

$$F_{jn}^{-1}[g_j]=\sum_{j=1}^{\infty}g_j\frac{V(z,\lambda_j)}{\|V(z,\lambda_j)\|^2}\equiv g(z), \tag{23}$$

$$\begin{aligned}F_{jn}\left[\sum_{i=1}^{n+1}a_i^2\theta(z-l_{i-1})\theta(l_i-z)\frac{d^2g}{dz^2}\right]&\equiv\sum_{i=1}^{n+1}a_i^2\int_{l_{i-1}}^{l_i}\frac{d^2g}{dz^2}V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz=-\lambda_j^2g_j-\sum_{i=1}^{n+1}k_i^2\int_{l_{i-1}}^{l_i}g(z)V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz-\\&-\frac{\sigma_1a_1^2}{\alpha_{11}^0}V_1(l_0,\lambda_j)\left(\alpha_{11}^0\frac{dg}{dz}+\beta_{11}^0g\right)\Big|_{z=l_0}+\frac{\sigma_{n+1}a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}}V_{n+1}(l,\lambda_j)\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{dg}{dz}+\beta_{22}^{n+1}g\right)\Big|_{z=l}.\end{aligned} \tag{24}$$

У рівностях (22)-(24) беруть участь величини і функції:

$$V(z,\lambda_j)=\sum_{i=1}^{n+1}V_j(z,\lambda_j)\theta(z-l_{i-1})\theta(l_i-z);\|V(z,\lambda_j)\|^2=\int_{l_0}^{l}V^2(z,\lambda_j)\sigma(z)dz\equiv\sum_{i=1}^{n+1}\int_{l_{i-1}}^{l_i}V_i^2(z,\lambda_j)\sigma_i(z)dz;$$

$$\sigma(z)=\sum_{i=1}^{n+1}\sigma_i\theta(z-l_{i-1})\theta(l_i-z);V_m(z,\lambda_j)=\prod_{i=m}^{n}c_{2i}q_{n+1,j}\left[\omega_{m-1,2}(\lambda_j)\cos(q_{mj}z)-\omega_{m-1,1}(\lambda_j)\sin(q_{mj}z)\right];m=\overline{1,n};$$

$$V_{n+1}(z,\lambda_j)=\omega_{n2}(\lambda_j)\cos(q_{n+1,j}z)-\omega_{n1}(\lambda_j)\sin(q_{n+1,j}z);c_{1k}=1;\ c_{2k}=\frac{\nu_{k+1}}{\nu_k};\ q_{sj}=a_s^{-1}(\lambda_j^2+k_s^2)^{1/2}\equiv a_s^{-1}b_{sj};$$

$$\sigma_k=\prod_{j=k}^{n}\frac{\nu_ja_{n+1}}{\nu_{j+1}a_k^2};\ \sigma_n=\frac{\nu_na_{n+1}}{\nu_{n+1}a_n^2};\ \sigma_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}};\nu_{11}^{k1}(q_{sj}l_k)=-R_kq_{sj}\sin(q_{sj}l_k)+\cos(q_{sj}l_k);\ \nu_{21}^{k1}(q_{sj}l_k)=-q_{sj}\sin(q_{sj}l_k);$$

$$\nu_{12}^{k1}(q_{sj}l_k)=-\nu_k^*q_{sj}\sin(q_{sj}l_k);\nu_{22}^{k1}(q_{sj}l_k)=\nu_k^*q_{sj}\cos(q_{sj}l_k);\nu_{11}^{k2}(q_{sj}l_k)=R_kq_{sj}\cos(q_{sj}l_k)+\sin(q_{sj}l_k);\nu_{21}^{k2}(q_{sj}l_k)=q_{sj}\cos(q_{sj}l_k);$$

$$\nu_{12}^{k2}\left(q_{sj}l_k\right)=\cos\left(q_{sj}l_k\right);\nu_{22}^{k2}\left(q_{sj}l_k\right)=\sin\left(q_{sj}l_k\right);\nu_k^*=\frac{\nu_{k+1}}{\nu_k};\delta_{sm}^k\left(q_{kj}l_k;q_{k+1,j}l_k\right)=\nu_{11}^{ks}\left(q_{kj}l_k\right)\nu_{22}^{km}\left(q_{k+1,j}l_k\right)-\nu_{21}^{ks}\left(q_{kj}l_k\right)\nu_{12}^{km}\left(q_{k+1,j}l_k\right);$$

$$\omega_{01}\left(\lambda_j\right)=-\nu_{11}^{01}\left(q_{1j}l_0\right);\ \omega_{02}\left(\lambda_j\right)=-\nu_{11}^{02}\left(q_{1j},l_0\right);\omega_{sm}\left(\lambda_j\right)=\omega_{s-1,2}\left(\lambda_j\right)\delta_{sm}^k\left(q_{sj}l_s;q_{s+1,j}l_s\right)-\omega_{s-1,1}\left(\lambda_j\right)\delta_{2m}^k\left(q_{sj}l_s;q_{s+1,j}l_s\right);$$

λ_j − корені трансцендентного рівняння $\Delta_n\left(\lambda\right)\equiv\nu_{22}^{n+1,2}\left(q_{n+1}l\right)\omega_{n1}\left(\lambda\right)-\nu_{22}^{n+1,1}q_{n+1}\left(\lambda\right)l\omega_{n2}\left(\lambda\right)=0$, що утворюють дискретний спектр, $\theta\left(x\right)$ – одинична функція Гевісайда [18].

Запишемо систему диференціальних рівнянь (18) та початкові умови (19) у матричній формі

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial t}-a_1^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+q_1^2\left(\sigma,k\right)\right)\tilde{T}_{1k}\left(t,\sigma,z\right)\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}-a_2^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+q_2^2\left(\sigma,k\right)\right)\tilde{T}_{2k}\left(t,\sigma,z\right)\\ \dots\dots\dots\dots\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}-a_{n+1}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+q_{n+1}^2\left(\sigma,k\right)\right)\tilde{T}_{n+1,k}\left(t,\sigma,z\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{G}_{1k}\left(t,\sigma,z\right)\\ \tilde{G}_{2k}\left(t,\sigma,z\right)\\ \dots\dots\\ \tilde{G}_{n+1,k}\left(t,\sigma,z\right)\end{bmatrix},\tag{25}$$

$$\left.\begin{bmatrix}\tilde{T}_{1k}\left(t,\sigma,z\right)\\ \tilde{T}_{2k}\left(t,\sigma,z\right)\\ \dots\dots\\ \tilde{T}_{n+1,k}\left(t,\sigma,z\right)\end{bmatrix}\right|_{t=0}=\begin{bmatrix}\tilde{g}_{1k}\left(\sigma,z\right)\\ \tilde{g}_{2k}\left(\sigma,z\right)\\ \dots\dots\\ \tilde{g}_{n+1,k}\left(\sigma,z\right)\end{bmatrix},\tag{26}$$

де $q_j^2\left(\sigma,k\right)=a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2\gamma_k^2+\chi_j^2$; $a_j^2\equiv a_{zj}^2$; $j=\overline{1,n+1}$.

Інтегральний оператор F_{jn}, який діє за правилом (22), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{jn}\left[\dots\right]=\left[\int_{l_0}^{l_1}\dots V_1\left(z,\lambda_j\right)\sigma_1dz\int_{l_1}^{l_2}\dots V_2\left(z,\lambda_j\right)\sigma_2dz\dots\int_{l_n}^{+\infty}\dots V_{n+1}\left(z,\lambda_j\right)\sigma_{n+1}dz\right]\tag{27}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (25), (26). Внаслідок тотожності (24) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{d}{dt}+\lambda_j^2+q_i^2(\sigma,k)+k_i^2\right)\tilde{T}_{ikj}=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{G}_{ikj}-\sigma_1a_1^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{g}_{0k}(t,\sigma)+\sigma_{n+1}a_{n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}(l,\lambda_j)\tilde{g}_{lk}(t,\sigma),\tag{28}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left.\tilde{T}_{ikj}\right|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{g}_{ikj},\tag{29}$$

де $\tilde{T}_{ikj}\equiv\tilde{T}_{ikj}(t,\sigma)=\int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{T}_{ik}(t,\sigma,z)\mathrm{V}_i\left(z,\lambda_j\right)\sigma_idz,\tilde{G}_{ikj}\equiv\tilde{G}_{ikj}(t,\sigma)=\int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{G}_i(t,\sigma,z)\mathrm{V}_i\left(z,\lambda_j\right)\sigma_idz,$

$\tilde{g}_{ikj}\equiv\tilde{g}_{ikj}(\sigma)=\int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{g}_{ik}(\sigma,z)\mathrm{V}_i\left(z,\lambda_j\right)\sigma_idz;\ i=\overline{1,n+1}.$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\left\{q_1^2,q_2^2,\dots,q_{n+1}^2\right\}=q_1^2$ і покладемо всюди $k_i^2=q_1^2-q_i^2\ \left(i=\overline{1,n+1}\right)$. Задача Коші (28), (29) набуває вигляду

$$\frac{d\tilde{T}_{kj}}{dt}+\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2\gamma_k^2+\chi_1^2\right)\tilde{T}_{kj}=\tilde{G}_{kj}(t,\sigma)-\frac{\sigma_1a_1^2}{\alpha_{11}^0}V_1\left(l_0,\lambda_j\right)\tilde{g}_{0k}\left(t,\sigma\right)+\frac{\sigma_{n+1}a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}}V_{n+1}\left(l,\lambda_j\right)\tilde{g}_{lk}\left(t,\sigma\right),\tag{30}$$

$$\left.\tilde{T}_{kj}(t,\sigma)\right|_{t=0}=\tilde{g}_{kj}(\sigma),\tag{31}$$

де $\tilde{T}_{kj}\left(t,\sigma\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{T}_{ikj}\left(t,\sigma\right),\tilde{G}_{kj}\left(t,\sigma\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{G}_{ikj}\left(t,\sigma\right),\tilde{g}_{kj}\left(\sigma\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{g}_{ikj}\left(\sigma\right).$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним обмеженим розв'язком задачі (30), (31) є функція

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{kj}(t,\sigma)=\int_0^t\exp\left[-\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2\gamma_k^2+\chi_1^2\right)\left(t-\tau\right)\right]\times\Big[\tilde{G}_{kj}(\tau,\sigma)-\frac{\sigma_1a_1^2}{\alpha_{11}^0}V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{g}_{0k}(\tau,\sigma)+\\+\frac{\sigma_{n+1}a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}}V_{n+1}(l,\lambda_j)\tilde{g}_{lk}(\tau,\sigma)+\delta_+(\tau)\tilde{g}_{jk}(\sigma)\Big]d\tau,\end{aligned}\tag{32}$$

де $\delta_+(\tau)$ – міра Дірака, зосереджена в точці $\tau=+0$ [19].

Оскільки суперпозиція операторів F_{jn} та F_{jn}^{-1} є одиничним оператором, то оператор F_{jn}^{-1} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{jn}^{-1}[\ldots]=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\ldots\dfrac{V_1\left(z,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2}\\ \sum\limits_{j=1}^{\infty}\ldots\dfrac{V_2\left(z,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \sum\limits_{j=1}^{\infty}\ldots\dfrac{V_{n+1}\left(z,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2}\end{bmatrix}. \qquad (33)$$

За правилом множення матриць застосуємо операторну матрицю-стовпець (33) до матриці-елемента $\left[\tilde{T}_{kj}(t,\sigma)\right]$, де функція $\tilde{T}_{kj}(t,\sigma)$ визначена формулою (32). Одержуємо єдиний обмежений розв'язок задачі (18)-(21):

$$\tilde{T}_{ik}(t,\sigma,z)=\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{T}_{kj}(t,\sigma)\frac{V_i(z,\lambda_j)}{\left\|V_i(z,\lambda_j)\right\|^2};\, i=\overline{1,n+1}. \qquad (34)$$

До функцій $\tilde{T}_{ik}(t,\sigma,z)$ послідовно застосуємо обернені оператори Λ_{yk}^{-1} за правилом (16) та F_x^{-1} за правилом (8). Виконавши елементарні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{aligned}T_i(t,x,y,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^b\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{ik}(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)\times\left[f_k(\tau,\xi,\eta,\zeta)+\delta_+(\tau)g_k(\xi,\eta,\zeta)\right]\sigma_k\,d\xi d\eta d\zeta d\tau+\\ +\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^b\left[W_i^1(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z)g_0(\tau,\xi,\eta)+W_i^2(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z)g_l(\tau,\xi,\eta)\right]d\xi d\eta d\tau+\\ +a_{yi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}\left[W_{yik}^1(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta)\omega_{1k}(\tau,\xi,\zeta)+W_{yik}^2(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta)\omega_{2k}(\tau,\xi,\zeta)\right]\sigma_k\,d\xi d\zeta d\tau,\, i=\overline{1,n+1},\end{aligned} \qquad (35)$$

які описують структуру нестаціонарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (35) застосовано компоненти: фундаментальної матриці розв'язків

$$\begin{aligned}E_{ik}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\exp\left[-\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2\gamma_k^2+\chi_1^2\right)t\right]\frac{V_i(z,\lambda_j)V_k(\zeta,\lambda_j)}{\left\|V_i(z,\lambda_j)\right\|^2}\times\\ \times\cos(|x-\xi|\sigma)\frac{V_r(y)V_r(\eta)}{\left\|V_r\right\|^2}d\sigma;\;\; i,k=\overline{1,n+1},\end{aligned}$$

нижньої аплікатної матриці Гріна $W_i^1(t,x,\xi,y,\eta,z)=-\sigma_1 a_1^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}E_{i1}(t,x,\xi,y,\eta,z,l_0)$, верхньої аплікатної матриці Гріна $W_i^2(t,x,\xi,y,\eta,z)=-\sigma_{n+1}a_{n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}E_{i,n+1}(t,x,\xi,y,\eta,z,l)$, лівої та правої ординатних матриць Гріна $W_{yik}^1(t,x,\xi,y,z,\zeta)=E_{ik}(t,x,\xi,y,0,z,\zeta)$, $W_{yik}^2(t,x,\xi,y,z,\zeta)=E_{ik}(t,x,\xi,y,b,z,\zeta)$ параболічної початково-крайової задачі (1)-(6).

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{ik}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)$ і функцій Гріна $W_i^s(t,x,\xi,y,\eta,z)$, $W_{yjk}^s(t,x,\xi,y,\eta,z)\left(s=1,2\right)$ безпосередньо перевіряється, що функції $T_j(t,x,y,z)$, визначені формулами (35), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умові (3), (5), (6) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [18].

Зауваження 1. У випадку $a_{xj}^2=a_{yi}^2=a_{zj}^2\equiv a_j^2\geq 0$ формули (35) визначають структуру нестаціонарного температурного поля в ізотропному обмеженому ($n+1$)-шаровому просторовому середовищі.

Зауваження 2. Якщо деякі з коефіцієнтів термоопору R_k дорівнюють нулю, то безпосередньо з формул (35) одержуємо структуру нестаціонарного температурного поля у випадку здійснення на відповідних площинах $z=l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 3. При $R_k=0\left(k=\overline{1,n}\right)$ безпосередньо з формул (35) одержуємо структуру нестаціонарного температурного поля у випадку здійснення на всіх площинах $z=l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 4. Параметри $\alpha_{11}^0,\beta_{11}^0,\alpha_{22}^{n+1},\beta_{22}^{n+1}$ дають можливість виділяти із формул (35) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхнях $z=l_0, z=l$ крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій.

Зауваження 5. Параметри $h_j\ \left(j=1,2\right)$ дозволяють виділяти із формул (35) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхнях $y=0$, $y=b$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій.

Зауваження 6. Аналіз розв'язку (35) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t,x,y,z)$, $g_j(x,y,z)$ $\omega_{1j}(t,x,z), \omega_{2j}(t,x,z)\left(j=\overline{1,n+1}\right), g_0(t,x,y)$ та $g_l(t,x,y)$ проводиться безпосередньо.

3.2. Інтегральне зображення розв'язку задачі теплопровідності в кусково-однорідному середовищі $(0;+\infty)\times(0;+\infty)\times\{z\in K_n^+\}$.

Розглянемо область $\Omega_2=(0;+\infty)\times(0;+\infty)$. У цьому випадку на межі області виконуються крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x}+p\right)T_j\Big|_{x=0}=\omega_j^1(t,y,z),\frac{\partial^k T_j}{\partial x^k}\Big|_{x=+\infty}=0;k=0,1 \tag{36}$$

щодо змінної x та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)T_j\Big|_{y=0}=\omega_j^2(t,x,z);\ \frac{\partial^k T_j}{\partial y^k}\Big|_{y=+\infty}=0;k=0,1 \tag{37}$$

щодо змінної y, де $p\ge 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $x=0$; $\omega_j^1(t,y,z)=pT_j^{c1}(t,y,z)$, $T_j^{c1}(t,y,z)$ – температура середовища на поверхні $x=0$; $h\ge 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $y=0$; $\omega_j^2(t,x,z)=hT_j^{c2}(t,x,z)$, $T_j^{c2}(t,x,z)$ – температура середовища на поверхні $y=0$.

Вважаємо, що для задачі (1)-(4), (36), (37) виконуються умови узгодженості:

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)g_1\Big|_{z=l_0}=g_0(0,x,y);\ \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1}\right)g_{n+1}\Big|_{z=l}=g_l(0,x,y);$$

$$\begin{cases}\left[\left[\left(R_k\frac{\partial}{\partial z}+1\right)g_k-g_{k+1}\right]\right]\Big|_{z=l_k}=0,\\ \left(\nu_k\frac{\partial g_k}{\partial z}-\nu_{k+1}\frac{\partial g_{k+1}}{\partial z}\right)\Big|_{z=l_k}=0;k=\overline{1,n};\end{cases}\quad \left(-\frac{\partial}{\partial x}+p\right)g_j\Big|_{x=0}=\omega_j^1(0,y,z);\ \frac{\partial^k g_j}{\partial x^k}\Big|_{x=+\infty}=0;$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)g_j\Big|_{y=0}=\omega_j^2(0,x,z);\ \frac{\partial^k g_j}{\partial y^k}\Big|_{y=+\infty}=0;\ k=0,1;\ j=\overline{1,n+1}.$$

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(4), (36), (37) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 13, 12].

До задачі (1)-(4), (36), (37) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі щодо змінної x [16, 13]:

$$F_{+x}\left[g(x)\right]=\int_0^{+\infty}g(x)K_x(x,\sigma)dx\equiv\tilde g(\sigma), \tag{38}$$

$$F_{+x}^{-1}\left[\tilde g(\sigma)\right]=\int_0^{+\infty}\tilde g(\sigma)K_x(x,\sigma)d\sigma\equiv g(x), \tag{39}$$

$$F_{+x}\left[\frac{d^2g}{dx^2}\right]=-\sigma^2\tilde g(\sigma)+K_x(0,\sigma)\left(-\frac{dg}{dx}+pg\right)\Big|_{x=0}, \tag{40}$$

де ядро перетворення $K_x(x,\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sigma\cos(\sigma x)+p\sin(\sigma x)}{\sqrt{\sigma^2+p^2}}$.

Інтегральний оператор F_{+x} за правилом (38) внаслідок тотожності (40) крайовій задачі (1)-(4), (36), (37) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'=\left\{(t,y,z)\middle| t>0; y\in(0;+\infty); z\in K_n^+\right\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial\tilde T_j}{\partial t}-\left[a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\tilde T_j-\left(a_{xj}^2\sigma^2+\chi_j^2\right)\tilde T_j=\tilde F_j(t,\sigma,y,z);\ j=\overline{1,n+1} \tag{41}$$

з початковими умовами (11), крайовими умовами (12), крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)\tilde T_j\Big|_{y=0}=\tilde\omega_j^2(t,\sigma,z);\ \frac{\partial^k\tilde T_j}{\partial y^k}\Big|_{y=+\infty}=0;\ k=0,1 \tag{42}$$

та умовами спряження (14), де $\tilde F_j(t,\sigma,y,z)=\tilde f_j(t,\sigma,y,z)+a_{xj}^2K_x(0,\sigma)\omega_j^1(t,y,z);j=\overline{1,n+1}.$

До задачі (41), (11), (12), (42), (14) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі щодо змінної y [16, 13]:

$$F_{+y}\left[g(y)\right]=\int_0^{+\infty} g(y)K_y(y,s)\,dy\equiv\tilde{g}(s), \tag{43}$$

$$F_{+y}^{-1}\left[\tilde{g}(s)\right]=\int_0^{+\infty}\tilde{g}(s)K_y(y,s)\,ds\equiv g(y), \tag{44}$$

$$F_{+y}\left[\frac{d^2g}{dy^2}\right]=-s^2\tilde{g}(s)+K_y(0,s)\left(-\frac{dg}{dy}+hg\right)\Bigg|_{y=0}, \tag{45}$$

де ядро перетворення $K_y(y,s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s\cos(sy)+h\sin(sy)}{\sqrt{s^2+h^2}}$.

Інтегральний оператор F_{+y} за правилом (43) внаслідок тотожності (45) початково-крайовій задачі (41), (11), (12), (42), (14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3''=\left\{(t,z)\middle|t>0;z\in K_n^+\right\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial\tilde{\tilde{T}}_j}{\partial t}-a_{zj}^2\frac{\partial^2\tilde{\tilde{T}}_j}{\partial z^2}+\left(a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2s^2+\chi_j^2\right)\tilde{\tilde{T}}_j=\tilde{\tilde{F}}_j(t,\sigma,s,z);z\in I_j;\,j=\overline{1,n+1} \tag{46}$$

з початковими умовами

$$\tilde{\tilde{T}}_j(t,\sigma,s,z)\Big|_{t=0}=\tilde{\tilde{g}}_j(\sigma,s,z);z\in I_j;\,j=\overline{1,n+1}, \tag{47}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)\tilde{\tilde{T}}_1\Big|_{z=l_0}=\tilde{\tilde{g}}_0(t,\sigma,s);\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1}\right)\tilde{\tilde{T}}_{n+1}\Big|_{z=l}=\tilde{\tilde{g}}_l(t,\sigma,s), \tag{48}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases}\left[\left(R_k\frac{\partial}{\partial z}+1\right)\tilde{\tilde{T}}_k-\tilde{\tilde{T}}_{k+1}\right]\Bigg|_{z=l_k}=0,\\ \left(\nu_k\frac{\partial\tilde{\tilde{T}}_k}{\partial z}-\nu_{k+1}\frac{\partial\tilde{\tilde{T}}_{k+1}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=l_k}=0;\,k=\overline{1,n},\end{cases} \tag{49}$$

де $\tilde{\tilde{F}}_j(t,\sigma,s,z)=\tilde{\tilde{f}}_j(t,\sigma,s,z)+a_{xj}^2K_x(0,\sigma)\tilde{\omega}_j^1(t,s,z)+a_{yj}^2K_y(0,s)\tilde{\omega}_j^2(t,\sigma,z);\,j=\overline{1,n+1}.$

З точністю до позначень початково-крайова задача на спряження (46)-(49) збігається із задачею (18)-(21). Побудований методом інтегрального перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0;l]$ з n точками спряження єдиний обмежений розв'язок задачі (46)-(49) відповідно до формул (34) визначають функції

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{T}}_i(t,\sigma,s,z)=\sum_{j=1}^{\infty}\Bigg\{\int_0^t\exp\left[-\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)(t-\tau)\right]\times\Bigg[\tilde{\tilde{F}}_j(t,\sigma,s)-\frac{\sigma_1a_1^2}{\alpha_{11}^0}V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_0(\tau,\sigma,s)+\\+\frac{\sigma_{n+1}a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}}V_{n+1}(l,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_l(\tau,\sigma,s)+\delta_+(\tau)\tilde{\tilde{g}}_j(\sigma,s)\Bigg]d\tau\Bigg\}\frac{V_i(z,\lambda_1)}{\left\|V_i(z,\lambda_1)\right\|^2};i=\overline{1,n+1}.\end{aligned} \tag{50}$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{\tilde{T}}_i(t,\sigma,s,z)$, визначених формулами (50), обернені оператори F_{+y}^{-1} та F_{+x}^{-1}, одержуємо функції

$$\begin{aligned}T_i(t,x,y,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{ik}(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)\left[f_k(\tau,\xi,\eta,\zeta)+\delta_+(\tau)g_k(\xi,\eta,\zeta)\right]\sigma_k\,d\xi d\eta d\zeta d\tau+\\+\int_0^t\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left[W_i^1(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z)g_0(\tau,\xi,\eta)+W_i^2(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z)g_l(\tau,\xi,\eta)\right]d\xi d\eta d\tau+\\+a_{xi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{xik}(t-\tau,x,y,\eta,z,\zeta)\omega_j^1(\tau,\eta,\zeta)\sigma_k\,d\eta d\zeta d\tau+\\+a_{yi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{yik}(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta)\omega_j^2(\tau,\xi,\zeta)\sigma_k\,d\xi d\zeta d\tau;\,i=\overline{1,n+1},\end{aligned} \tag{51}$$

які описують структуру нестаціонарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (51) застосовано компоненти: фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{ik}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\exp\left[-\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)t\right]\times$$
$$\times\frac{V_i(z,\lambda_j)V_k(\zeta,\lambda_j)}{\|V(z,\lambda_j)\|^2}K_x(x,\sigma)K_x(\xi,\sigma)K_y(y,s)K_y(\eta,s)d\sigma ds; i,k=\overline{1,n+1},$$

нижньої аплікатної матриці Гріна $W_i^1(t,x,\xi,y,\eta,z)=-\dfrac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0}E_{i1}(t,x,\xi,y,\eta,z,l_0)$, верхньої аплікатної матриці Гріна $W_i^2(t,x,\xi,y,\eta,z)=\dfrac{\sigma_{n+1}a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}}E_i(t,x,\xi,y,\eta,z,l)$, абсцисної матриці Гріна $W_{xik}\left(t,x,y,\eta,z,\zeta\right)=E_{ik}\left(t,x,0,y,\eta,z,\zeta\right)$ та ординатної матриці Гріна $W_{yik}\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right)=E_{ik}\left(t,x,\xi,y,0,z,\zeta\right)$ параболічної початково-крайової задачі (1)-(4), (36), (37).

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{jk}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)$ і функцій Гріна $W_i^1(t,x,\xi,y,\eta,z)$, $W_i^2(t,x,\xi,y,\eta,z)$, $W_{xjk}\left(t,x,y,\eta,z,\zeta\right)$ $W_{yjk}\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right)$ безпосередньо перевіряється, що функції $T_j\left(t,x,y,z\right)$, визначені формулами (51), задовольняють рівняння (1),початкові умови (2), крайові умови (3), (36), (37) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [18].

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметри p,h дають можливість виділяти із формул (51) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхнях $x=0, y=0$ крайових умов 1-го роду й 2-го роду та їх можливих комбінацій; 3) аналіз розв'язку (51) в залежності від аналітичного вигляду функцій $f_j\left(t,x,y,z\right)$, $g_j\left(x,y,z\right)$, $\omega_j^1\left(t,x,z\right),\omega_j^2\left(t,x,z\right)$ $\left(j=\overline{1,n+1}\right)$, $g_0\left(t,x,y\right)$ та $g_l\left(t,x,y\right)$ проводиться безпосередньо.

4. Висновки

За загальних припущень у межах феноменологічної теорії теплопровідності побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків нестаціонарних задач в обмежених багатошарових просторових середовищах. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задач й можуть бути використані як у теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – М., 1964. 2. *Громик А.П., Конет І.М.* Нестаціонарні задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2007. – Вип.15. – С. 67-82. 3. *Громик А.П., Конет І.М.* Початково-крайові задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.16. – С.100-118. 4. *Громик А.П., Конет І.М.* Початково-крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.17. – С. 102-120. 5. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. К., 1998. 6. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – М., 1964. 7. *Коляно Ю.М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К., 1992. 8. *Конет І.М.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К., 1998. 9. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці, 2001. 10. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці, 2004. 11. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Нестаціонарні задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.16. – С. 118-134. 12. *Ленюк М.П.* Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К., 1997. 13. *Ленюк М.П.* Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К., 1983. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.4). 14. *Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – М., 1984. – 368 с. 15. *Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К., 1991. 16. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. – М., 1955. 17. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М., 1972. 18. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. – М., 1965.

Надійшла до редколегії 14.09.09

УДК 517.98

Ю. Ільченко, асп.

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ З СИЛЬНО P-ПОЗИТИВНИМ ОПЕРАТОРНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ

Розглядаються лінійні неоднорідні диференціальні рівняння першого порядку в комплексному банаховому просторі з сильно P-позитивним операторним коефіцієнтом і шукаються розв'язки таких рівнянь та досліджується поведінка вказаних операторів.

The linear nonhomogenious differential first-order equations are considered in complex Banach space with strongly P-positive operator coefficient and are searched for solutions of these equations, the behaviour of specified operator is researched.

1. Вступ.

Нехай $\left(\mathrm{B},\|\cdot\|\right)$ – комплексний банахів простір, $A:D(A)\to\mathrm{B}$ – лінійний оператор, $D(A)$ – скрізь щільна в B. Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку

$$x'\left(t\right)=Ax\left(t\right)+f\left(t\right)\ ,\ t\in R\ , \tag{1}$$

де $f:R\to\mathrm{B}$ – відома функція, $x:R\to D\left(A\right)$ – шукана.