У формулах (51) застосовано компоненти: фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{ik}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\exp\left[-\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)t\right]\times$$
$$\times\frac{V_i(z,\lambda_j)V_k(\zeta,\lambda_j)}{\|V(z,\lambda_j)\|^2}K_x(x,\sigma)K_x(\xi,\sigma)K_y(y,s)K_y(\eta,s)d\sigma ds; i,k=\overline{1,n+1},$$

нижньої аплікатної матриці Гріна $W_i^1(t,x,\xi,y,\eta,z)=-\frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0}E_{i1}(t,x,\xi,y,\eta,z,l_0)$, верхньої аплікатної матриці Гріна $W_i^2(t,x,\xi,y,\eta,z)=\frac{\sigma_{n+1}a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}}E_i(t,x,\xi,y,\eta,z,l)$, абсцисної матриці Гріна $W_{xik}\left(t,x,y,\eta,z,\zeta\right)=E_{ik}\left(t,x,0,y,\eta,z,\zeta\right)$ та ординатної матриці Гріна $W_{yik}\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right)=E_{ik}\left(t,x,\xi,y,0,z,\zeta\right)$ параболічної початково-крайової задачі (1)-(4), (36), (37).

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{jk}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)$ і функцій Гріна $W_i^1(t,x,\xi,y,\eta,z)$, $W_i^2(t,x,\xi,y,\eta,z)$, $W_{xjk}\left(t,x,y,\eta,z,\zeta\right)$ $W_{yjk}\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right)$ безпосередньо перевіряється, що функції $T_j\left(t,x,y,z\right)$, визначені формулами (51), задовольняють рівняння (1),початкові умови (2), крайові умови (3), (36), (37) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [18].

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметри p,h дають можливість виділяти із формул (51) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхнях $x=0, y=0$ крайових умов 1-го роду й 2-го роду та їх можливих комбінацій; 3) аналіз розв'язку (51) в залежності від аналітичного вигляду функцій $f_j\left(t,x,y,z\right)$, $g_j\left(x,y,z\right)$, $\omega_j^1\left(t,x,z\right),\omega_j^2\left(t,x,z\right)$ $\left(j=\overline{1,n+1}\right)$, $g_0\left(t,x,y\right)$ та $g_l\left(t,x,y\right)$ проводиться безпосередньо.

4. Висновки

За загальних припущень у межах феноменологічної теорії теплопровідності побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків нестаціонарних задач в обмежених багатошарових просторових середовищах. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задач й можуть бути використані як у теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – М., 1964. 2. *Громик А.П., Конет І.М.* Нестаціонарні задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2007. – Вип.15. – С. 67-82. 3. *Громик А.П., Конет І.М.* Початково-крайові задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.16. – С.100-118. 4. *Громик А.П., Конет І.М.* Початково-крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.17. – С. 102-120. 5. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. К., 1998. 6. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – М., 1964. 7. *Коляно Ю.М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К., 1992. 8. *Конет І.М.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К., 1998. 9. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці, 2001. 10. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці, 2004. 11. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Нестаціонарні задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.16. – С. 118-134. 12. *Ленюк М.П.* Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К., 1997. 13. *Ленюк М.П.* Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К., 1983. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.4). 14. *Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – М., 1984. – 368 с. 15. *Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К., 1991. 16. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. – М., 1955. 17. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М., 1972. 18. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. – М., 1965.

Надійшла до редколегії 14.09.09

УДК 517.98

Ю. Ільченко, асп.

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ З СИЛЬНО Р-ПОЗИТИВНИМ ОПЕРАТОРНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ

Розглядаються лінійні неоднорідні диференціальні рівняння першого порядку в комплексному банаховому просторі з сильно Р-позитивним операторним коефіцієнтом і шукаються розв'зки таких рівнянь та досліджується поведінка вказаних операторів.

The linear nonhomogenious differential first-order equations are considered in complex Banach space with strongly P-positive operator coefficient and are searched for solutions of these equations, the behaviour of specified operator is researched.

1. Вступ.

Нехай $\left(\mathrm{B},\|\cdot\|\right)$ – комплексний банахів простір, $A:D(A)\to\mathrm{B}$ – лінійний оператор, $D(A)$ – скрізь щільна в B. Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку

$$x'\left(t\right)=Ax\left(t\right)+f\left(t\right)\;,\;t\in R\;,\tag{1}$$

де $f:R\to\mathrm{B}$ – відома функція, $x:R\to D\left(A\right)$ – шукана.

Розв'язки рівняння (1) відомі для деяких видів операторів – обмежених, сильно-позитивних (секторіальних) [2,4]. Якщо оператор A – G-секторіальний, то розв'язки його знайдено в роботі [1]. Для аналогічного однорідного рівняння було знайдено розв'язки у випадку сильно P-позитивного операторного коефіцієнта A [3]. Нижче ми розглядаємо рівняння (1) з сильно P-позитивним операторним коефіцієнтом A, а також досліджуємо питання існування та єдиності розв'язку задачі Коші для вказаного рівняння.

Нехай Γ – орієнтований проти годинникової стрілки контур, що складається із двох дуг Γ_+ і Γ_- параболи: $y^2 = k\left(x - x'\right),\ k > 0,\ x'$ – деяка фіксована точка, Γ_+ і Γ_- з'єднані відрізком Γ_0 прямої $x = x_0,\ x_0 \ge x',\ \Omega_\Gamma$ – область, що лежить зліва при вказаному напрямку обходу Γ.

Означення 1. Оператор $A: D(A) \to \mathrm{B}$ називається ***сильно*** P ***-позитивним***, якщо його спектр $\sigma(A)$ розміщений в області Ω_Γ, а на Γ та поза Ω_Γ має місце оцінка:

$$\left\| R_z\left(A\right) \right\|_{\mathrm{B}\to\mathrm{B}} \le \frac{\mathrm{M}}{1+\sqrt{|z|}}\,, \tag{2}$$

де $R_z\left(A\right) = \left(A - zI\right)^{-1}$.

2. Властивості операторної експоненти.

Нехай A – сильно P-позитивний оператор,

$$\Gamma_{a,b} = \left\{ z = \left(x, y\right) : x = ay^2 + b,\ a > 0, b \ge 0 \right\} - \tag{3}$$

контур, аналогічний контуру Γ з означення 1, для резольвенти $R_z\left(A\right)$ оператора A виконується оцінка (2). Покладемо:

$$e^{-At} := -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,b}} e^{-tz} R_z\left(A\right) dz,\ t > 0. \tag{4}$$

Лема 1: *Інтеграл (4) абсолютно збіжний.*

Доведення: Далі скрізь, де не буде оговорено, ми будемо розглядати випадок $b = 0$, тобто контур $\Gamma_{a,b} = \Gamma_{a,0} =: \Gamma_a$.

Оцінимо інтеграл від норми:

$$\int\limits_{\Gamma_a^+} \left| e^{-tz} \right| \left\| R_z\left(A\right) \right\| |dz| \le \int\limits_0^{+\infty} e^{-tay^2} \frac{\mathrm{M}\sqrt{4a^2y^2+1}}{1+\sqrt[4]{a^2y^4+y^2}} dy = \int\limits_0^{+\infty} e^{-w} \mathrm{M} \frac{\sqrt{\frac{4aw}{t}+1}}{1+\sqrt[4]{\frac{w^2}{t^2}+\frac{w}{ta}}} dw =: \mathrm{I}.$$

Зробимо спершу деякі оцінки на підінтегральну функцію. Позначимо:

$$g(w) := \frac{\sqrt{\frac{4aw}{t}+1}}{1+\sqrt[4]{\frac{w^2}{t^2}+\frac{w}{ta}}}.\ \text{Тоді}\ g(w) = \frac{\sqrt{\frac{4a}{t}+\frac{1}{w}} \cdot \sqrt{w}}{\left(\frac{1}{\sqrt{w}} + \sqrt[4]{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{taw}}\right)\sqrt{w}} \to 2\sqrt{a}, w \to \infty, \quad g(0) = 1,\ g \in C\left(\left[0;+\infty\right)\right).$$

Тому $\exists C > 0 : \left| g(w) \right| \le C$ на $\left[0;+\infty\right)$.

Повернемося до оцінюваного виразу:

$$\mathrm{I} \le \int\limits_0^{+\infty} e^{-w} \frac{MC}{2\sqrt{wta}} dw = \frac{MC}{2\sqrt{ta}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-w} w^{\frac{1}{2}-1} dw = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{MC}{2\sqrt{ta}} = \frac{MC\sqrt{\pi}}{2\sqrt{ta}}. \tag{5}$$

Отже, при $t > 0$ інтеграл (4) абсолютно збіжний, тому експонента e^{-At} визначена.

При детальному дослідженні поведінки отриманої підінтегральної функції $g(w) = \dfrac{\sqrt{4a^2y^2+1}}{1+\sqrt[4]{a^2y^4+y^2}}$, матимемо:

$$c \le g(w) \le C\,,$$

де $c = \min\left\{ \frac{2a}{1+\sqrt[4]{a^2+1}}; \frac{1}{1+\sqrt[4]{a^2+1}} \right\} = \frac{1}{1+\sqrt[4]{a^2+1}} \min\left\{2a;1\right\}, \quad C = \max\left\{ \frac{\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{a}}; \sqrt{4a^2+1} \right\} = \sqrt{4a^2+1} \max\left\{ \frac{1}{\sqrt{a}};1 \right\}.$

Неважко помітити, що при малих t оцінка, отримана в лемі для експоненти, буде погіршуватися. Тому постає питання: чи можна знайти "гарні" оцінки, дослідити експоненту на обмеженість при малих t. Для цього ми видозмінимо наш контур інтегрування, бо, як ми бачимо, початковий контур не дає відповіді на поставлені запитання. Видозміну проведемо таким чином, щоб новий контур на нескінченності співпадав зі старим, а в певних точках (досить близьких до вершини параболи) він переходив у дугу кола, таким чином обходячи зліва вершину – точку (0;0).

Нехай новий контур $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup \Gamma_3$, де Γ_1 та Γ_3 верхня та нижня дуга параболи відповідно (від точки $\left(ay_0^2; y_0\right)$ на параболі до ∞ та від точки $\left(ay_0^2; -y_0\right)$ до ∞), Γ_2 – дуга кола радіуса r_0 з центром в початку координат, що з'єднує точки $\left(ay_0^2; y_0\right)$ та $\left(ay_0^2; -y_0\right)$ і обходить початок координат проти годинникової стрілки.

1. Спочатку знайдемо оцінки для інтеграла по контуру Γ_2 (вважаємо, що y_0 – деяке наперед вибране фіксоване додатне число):

$$\mathrm{I}_2 = \int_{\Gamma_2} \left|e^{-tz}\right| \left\|R_z(A)\right\| |dz| \le \int_{arctg\frac{1}{ay_0}}^{2\pi - arctg\frac{1}{ay_0}} e^{-ty_0\sqrt{a^2y_0^2+1}\cos\varphi} \frac{M\sqrt{a^2y_0^4 + y_0^2}}{1+\sqrt[4]{a^2y_0^4+y_0^2}} d\varphi \le 2\pi M \frac{e^{ty_0\sqrt{a^2y_0^2+1}}\sqrt{a^2y_0^4+y_0^2}}{1+\sqrt[4]{a^2y_0^4+y_0^2}}.$$

2. Знайдемо тепер оцінку для інтеграла по контуру Γ_1 (для Γ_3 аналогічно):

$$\mathrm{I}_1 = \int_{\{y \ge y_0\}} e^{-tay^2} Mg(y)dy \le \int_{y_0}^{+\infty} e^{-tay^2} MCdy = \int_{w_0}^{+\infty} e^{-w} \frac{MC}{2\sqrt{wta}} dw.$$

Розглянемо окремо таку функцію: $F(w) = \int_w^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$. Дослідивши її, одержимо, що на відрізку $[0;1]$ функція F обмежена прямими $w = \sqrt{\pi}$ та $w = \frac{1}{2e^2}$, а при $w \ge 1$: $F(w) = \int_w^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \le \frac{1}{\sqrt{w}e^w}$ (неважко показати, що отримана оцінка є асимптотично точною при великих w).

При малих t інтеграли I_1 та I_3 будуть дуже великі: $\mathrm{I}_1 \ge \frac{MC}{4e^2\sqrt{ta}}$, тому випадок, коли $w_0 \in [0;1]$, не розглядатимемо.

Якщо $w_0 \ge 1$: $w_0 = tay_0^2$, $y_0 = \frac{\sqrt{w_0}}{\sqrt{ta}}$, звідки випливає, що $y_0 \ge \frac{1}{\sqrt{ta}}$.

Поклавши з самого початку $y_0 = \frac{1}{\sqrt{ta}}$, матимемо:

$$\mathrm{I}_1 \le \frac{MC}{2\sqrt{tae^{tay_0^2}}\sqrt{ta}y_0} = \frac{MC}{2tae^{tay_0^2}y_0} = \frac{MC}{2\sqrt{tae}}.$$

Аналогічна оцінка для I_3. При вказаному y_0 I_2 матиме порядок: $\frac{2\pi Me}{\sqrt{t}}$ (ми отримали асимптотику при малих t).

Отримана для I_1 та I_3 оцінка асимптотично має той же порядок, що й оцінка при оригінальному контурі, але все ж певне покращення останньої є, в тому сенсі, що ми одержали кращу обмежуючу сталу. А оцінка на I_2 краща за отриману раніше лише при малих t.

Мають місце наступні теореми:

ТЕОРЕМА 1. *Нехай A − сильно P-позитивний оператор. Тоді мають місце наступні твердження:*

1. $\exists C_1 > 0, \forall t > 0$:

$$\left\|Ae^{-At}\right\| \le C_1 \frac{1+t}{t\sqrt{t}};$$

2. $\left\|e^{-At}\right\| \to 0, t \to \infty$.

Доведення: 1. $Ae^{-At} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma ze^{-zt}R_z(A)dz$, у цьому неважко переконатися.

Виконавши ряд перетворень та дослідивши підінтегральні функції матимемо, при $t \in [0;1]$:

$$\left\|Ae^{-At}\right\| \le \frac{M}{4\pi a}\int_0^1 \frac{e^{-w}}{t\sqrt{t}} \frac{\sqrt{4a^2+5at+t^2}}{\sqrt{w}} dw + \frac{M}{4\pi a}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-w}\sqrt{w}}{t\sqrt{t}} \sqrt{4a^2+5at+t^2} dw \le \frac{M}{4\pi a} \frac{1}{t\sqrt{t}} (L_1 + L_2)\sqrt{4a^2+5a+1},$$

$$\left\|Ae^{-At}\right\| \le \frac{ML_4}{4\pi a} \frac{3\sqrt{4a^2+5a+1}}{\sqrt{t}}, \quad t \in [1;+\infty)$$ (тут L_1, L_2, L_4 – деякі сталі).

Ввівши позначення: $C_1 := \frac{M}{4\pi a}\max\left\{L_4\left(3\sqrt{4a^2+5a+1}\right), (L_1+L_2)\sqrt{4a^2+5a+1}\right\}$,

$$\left\| Ae^{-At} \right\| \le C_1 \left(\frac{1}{t\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) = C_1 \frac{1+t}{t\sqrt{t}}$$, що й слід було довести.

2. З (5) випливає:

$$\left\| e^{-At} \right\| \le \frac{MC\sqrt{\pi}}{2\sqrt{ta}},$$ а отже,

$$\left\| e^{-At} \right\| \to 0, t \to \infty.$$

ТЕОРЕМА 2. *Нехай* A *– сильно* P*-позитивний оператор. Тоді* $\forall t > 0$:

$$\left(e^{-At} \right)' = -Ae^{-At}.$$

Доведення: Нехай $\tau > 0.$ Запишемо таку норму:

$$\left\| \frac{e^{-A(t+\tau)} - e^{-At}}{\tau} + Ae^{-At} \right\| = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Gamma} e^{-zt} \left(\frac{e^{-z\tau} - 1 + z\tau}{\tau} \right) R_z(A) dz \right\| \le \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left| e^{-zt} \right| |z| |h(z\tau)| \left\| R_z(A) \right\| |dz|,$$ де

$$h(w) := \frac{e^{-w} - 1 + w}{w}$$ і $|h(w)| \le L'$ на $\{ w \mid \operatorname{Re} w > 0 \},$ де L' – деяка стала.

Застосувавши теорему Лебега про мажоровану збіжність, взявши за мажоранту:

$$g(z) := L' \left| e^{-zt} \right| |z| \left\| R_z(A) \right\|,$$

отримаємо збіжність до нуля початкового інтеграла, що й доводить рівність в теоремі (випадок $\tau < 0$ аналогічний).

Далі наведемо допоміжні твердження.

Лема 2. Для будь-якого $x \in D\left(A^2\right)$ при $t \to 0+$ виконується співвідношення:

$$\left(\frac{I - e}{t} - A \right) x \to 0.$$

Доведення: Нехай $x \in D(A^2), x_0 = A^2 x, x_0 \in \mathrm{B}.$ Маємо:

$$A^{-2} e^{-At} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} z^{-2} e^{-zt} R_z(A) dz + A^{-2} - A^{-1} t,$$ (де Γ_r – контур, що обходить точку (0;0) зліва колом радіуса r)

(це доводиться виконанням нескладних перетворень і застосуванням теорії лишків). Далі запишемо, поклавши $r = 1/\sqrt{t}$:

$$\left\| \left(t^{-1} \left(A^{-2} - e^{-At} A^{-2} \right) + A^{-1} \right) x_0 \right\| = \left\| \left(\frac{t^{-1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} z^{-2} e^{-zt} R_z(A) dz \right) x_0 \right\| = \frac{t}{2\pi} \left\| \left(\int_{\Gamma_r} t^{-2} z^{-2} e^{-zt} R_z(A) dz \right) x_0 \right\|.$$

$$\left\| \int_{\Gamma_r} t^{-2} z^{-2} e^{-zt} R_z(A) dz \right\| = \left\| \int_{\Gamma_r^1} t^{-2} z^{-2} e^{-zt} R_z(A) dz + \int_{\Gamma_r^2} t^{-2} z^{-2} e^{-zt} R_z(A) dz + \int_{\Gamma_r^3} t^{-2} z^{-2} e^{-zt} R_z(A) dz \right\| \le$$

$$\le \int_a^{+\infty} e^{-w} \frac{MC}{2\sqrt{wta}} dw + 2\pi Me \frac{\frac{\sqrt[4]{t}}{t}\sqrt{a^2+t}}{\sqrt[4]{t}+1} + \int_{-a}^{-\infty} e^{-w} \frac{MC}{2\sqrt{-wta}} dw = \frac{MCC_2}{\sqrt{ta}} + \frac{2\pi Me\sqrt[4]{t}\sqrt{a^2+t}}{t\left(\sqrt[4]{t}+1\right)},$$

де $C_2 := \int_a^{+\infty} e^{-w} \frac{1}{\sqrt{w}} dw$, тоді матимемо:

$$\left\| \left(t^{-1} \left(A^{-2} - e^{-At} A^{-2} \right) + A^{-1} \right) x_0 \right\| \le \frac{t}{2\pi} \left(\frac{MCC_2}{\sqrt{ta}} + \frac{2\pi Me\sqrt[4]{t}\sqrt{a^2+t}}{t\left(\sqrt[4]{t}+1\right)} \right) \left\| x_0 \right\| =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{t} MCC_2}{2\pi\sqrt{a}} + \frac{Me\sqrt[4]{t}\sqrt{a^2+t}}{\sqrt[4]{t}+1} \right) \left\| x_0 \right\| \to 0,\ t \to 0+.$$

Лема 3. Для будь-якого $x \in \mathrm{B}$ при $t \to 0+$:

$$\sqrt{t}\left(e^{-At} - I \right) x \to 0.$$

Якщо додатково $x \in D(A),$ то

$$\left(e^{-At} - I \right) x \to 0,\ t \to 0+.$$

Доведення: 1. Нехай $x \in D(A)$, тоді маємо:

$$\left\|e^{-At}x - x\right\| = \left\|-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(e^{-tz}-1\right)\left(A - zI\right)^{-1}z^{-1}dz\,Ax\right\| \le \left\{\exists c \ge 0 : \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma}\left|e^{-y}-1\right|\frac{1}{|y|^{3/2}}|dy| \le c\right\} \le c\sqrt{t}\left\|Ax\right\|,$$

звідки:

$$\sqrt{t}\left(e^{-At} - I\right)x \to 0,\ t \to 0+.$$

2. Якщо $x \notin D(A)$, то скориставшись скрізь щільністю $D(A)$ в просторі B, доведеним вище пунктом а), та оцінкою (5), отримаємо доведення твердження в цьому випадку.

4. Розв'язність диференціального рівняння

ТЕОРЕМА 3. *Нехай A – сильно P-позитивний оператор. Функція $f : (0;R) \to D(A)$ задовольняє умову:*

$$\exists L > 0, \forall s_1, s_2 \in (0;R) : \left\|f(s_1) - f(s_2)\right\| \le L\left|s_1 - s_2\right|.$$

Тоді функція $F(t) := \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds,\ t \in (0;R), F(0) = \vec{0}$ є розв'язком задачі Коші:

$$F'(t) = -AF(t) + f(t),\ t \in (0;R),\ F(0) = \vec{0}. \tag{6}$$

Доведення: Оскільки для $F(t)$ при $t > 0$ має місце зображення:

$$F(t) = A^{-1}\left(I - e^{-At}\right)f(t) + A^{-1}\int_0^t Ae^{-A(t-s)}\left(f(s) - f(t)\right)ds,\ t > 0,$$

то $F(t) \in D(A),$ при $t > 0$.

Для доведення того факту, що функція $F(t)$ — розв'язок задачі Коші (6), показуємо, що вона задовольняє рівняння в задачі (6). Вважаємо, що $\Delta t > 0$, для $\Delta t < 0$ міркування аналогічні. Маємо:

$$\frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} - \left(-AF(t) + f(t)\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\int_0^{t+\Delta t} e^{-A(t+\Delta t - s)}f(s)ds - \frac{1}{\Delta t}\int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds + \int_0^t Ae^{-A(t-s)}f(s)ds - f(t) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

$$I_1 := \int_0^t e^{-A(t-s)}\left(\frac{e^{-A\Delta t} - I}{\Delta t} + A\right)f(t)ds,\ I_2 := \int_0^t e^{-A(t-s)}\left(\frac{e^{-A\Delta t} - I}{\Delta t} + A\right)\left(f(s) - f(t)\right)ds,$$

$$I_3 := \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} e^{-A(t+\Delta t - s)}\left(f(s) - f(t)\right)ds,\ I_4 := A^{-1}\left(\frac{I - e^{-A\Delta t}}{\Delta t} - A\right)f(t).$$

Провівши дослідження отриманих інтегралів, можна переконатися, що

$$\frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} - \left(AF(t) + f(t)\right) = I + I + I + I \to 0, \Delta t \to 0+.$$

А також неважко помітити, що виконується початкова умова.

ТЕОРЕМА 4 (теорема єдиності). *Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді для будь-якого $x_0 \in D(A)$ існує єдиний розв'язок задачі Коші:*

$$x'(t) + Ax(t) = f(t),\ t \in (0;R),\ x(0) = x_0,$$

причому

$$x(t) = e^{-At}x_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds,\ t \in (0;R). \tag{7}$$

Доведення: Функція (7) є розв'язком задачі Коші за теоремами 2 та 3 (і лемою 3):

$$x'(t) = -Ae^{-At}x_0 - A\int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds + f(t) = -Ax(t) + f(t),\quad t > 0;$$

$x(t) \to x_0, t \to 0+$ (для доведення цього потрібно скористатися 1-3 лемами).

Для доведення єдиності розглянемо розв'язок однорідної задачі Коші $x(s)$ та функцію $u(t,s)$:

$$u(t,s) = e^{-A(t-s)}A^{-1}x(s),\ 0 \le s \le t < R.$$

Функція u диференційовна по $s \in (0;t)$ за теоремою 2 і лемою 3, і $\frac{\partial u}{\partial s} = \vec{0}$, звідси:

$$u(t,s) = u(t;0),\ s \in [0;t],\ \text{звідки випливає, що } u(t,0) = u(t;t),$$

$$e^{-At}A^{-1}x(0) = A^{-1}x(t),\ \text{а отже } x(t) = e^{-At}x_0,\ t > 0.$$

5. Висновок

В роботі ми знайшли розв'язки рівняння (1) аналітичними методами, а також дослідили поведінку сильно P-позитивних операторів, показати, в чому цей клас операторів схожий на розглядувані раніше класи (наприклад, виконання однакових граничних тверджень, такий же вигляд розв'язку задачі Коші), а в чому відрізняється (інша оцінка на норму операторної експоненти).

1.*Городний М.Ф., Чайковский А.В.* Обобщение понятия секториального оператора. // Мат.сборник. – 2006, №7, 197. – С.29-46. 2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М., 1972. 3. *Макаров В.Л., Гаврилюк І.П.* Експоненціально збіжні методи паралельної дискретизації для еволюційних рівнянь першого порядку. // Доповіді НАН України.– 2002, №3.–С.24-28. 4. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М., 1985.

Надійшла до редколегії 25.11.09

УДК 517.9

О. Капустян, д-р фіз.-мат. наук, проф., А. Паньков, асп.

ПРО РЕКУРЕНТНІ ВЛАСТИВОСТІ ω-ГРАНИЧНИХ МНОЖИН МНОГОЗНАЧНИХ НАПІВПОТОКІВ.

В роботі досліджується ланцюгова рекурентність ω-граничних множин траєкторій многозначних напівпотоків.
In this paper we investigate chain recurrence property of the omega limit sets of trajectories of multivalued semiflows

1. Вступ

Однією з найважливіших задач в теорії динамічних систем є вивчення поведінки траєкторій на інваріантних множинах [2]. Однією з характеристик цієї поведінки э ланцюгова рекурентність, детальне вивчення якої для автономних та асимптотично автономних напівпотоків проведено в [6]. В даній роботі деякі результати із [6] узагальнюються на випадок многозначних напівпотоків ($m-$напівпотоків) [1,5]. Зокрема для $m-$напівпотоку, породженого розв'язками диференціального включення, доведено, що кожна зв'язна, компактна, ланцюгово-рекурентна множина є $\omega-$граничною множиною траєкторії диференціального включення з як завгодно близькою до вихідної правою частиною.

2.Постановка задачі

Нехай (X,ρ) – повний метричний простір, K – множина таких відображень $\varphi:[0,+\infty)\to X$, що:
1) $\forall z\in X\ \ \exists\varphi(\cdot)\in K:\ \varphi(0)=z$;
2) $\forall\varphi(\cdot)\in K\ \ \forall\tau\ge 0\ \ \varphi^{\tau}(\cdot)\in K$, де $\varphi^{\tau}(t)=\varphi(t+\tau)$.

$\varphi(\cdot)\in K$ називатимемо траєкторією. Означимо (многозначне) відображення $G:R_+\times X\to 2^X$

$$G(t,z)=\{\varphi(t)\,|\,\varphi(\cdot)\in K,\ \varphi(0)=z\}.$$

Тоді легко показати, що G $m-$напівпотік, тобто

$$G(0,z)=z\quad\forall z\in X,$$

$$G(t_1+t_2,z)\subset G(t_1,G(t_2,z))\quad\forall z\in X\quad\forall t_1,t_2\in R_+.$$

Крім того, $\forall\ \varphi(\cdot)\in K,\ \forall\ t,s\ge 0\ \ \varphi(t+s)\in G(t,\varphi(s))$.

Основним об'єктом вивчення є множина

$$\omega(\varphi)=\{z\in X\,|\,\exists t_n\to\infty\ \ \varphi(t_n)\to z\}.$$

Лема 1 [1,5]. Нехай для $\varphi(\cdot)\in K$ множина $\overline{\bigcup_{t\ge 0}\varphi(t)}$ є компактом, $\forall t\ge 0$ відображення $x\mapsto G(t,x)$ має замкнений графік. Тоді $\omega(\varphi)\ne\varnothing$, компактна, $\omega(\varphi)\subset G(t,\omega(\varphi))$ (напівінваріантність) і $\lim_{t\to\infty}\rho(\varphi(t),\omega(\varphi))=0$. Якщо $\varphi\in C(0,+\infty;X)$, то $\omega(\varphi)$ зв'язна.

Зауважимо, що $\omega(\varphi)$ інваріантна ($\omega(\varphi)=G(t,\omega(\varphi))$), якщо G однозначний на $\overline{\bigcup_{t\ge 0}\varphi(t)}$. У випадку многозначного G це, взагалі кажучи, не так. Проте клас компактних, інваріантних, зв'язних підмножин для $m-$напівпотоку G не є порожнім і при досить загальних умовах включає в себе глобальний атрактор.

Означення [1]. Компакт $A\subseteq X$ називається глобальним атрактором $m-$напівпотоку G , якщо $A\subseteq G(t,A)\ \forall t\ge 0$ і для будь-якої обмеженої множини $B\subseteq X$ $dist(G(t,B),A)\to 0,\ t\to+\infty$.

Тут і надалі $dist(A,B)=\sup_{\xi\in A}\inf_{\zeta\in B}\rho(\xi,\zeta)$, $dist_H(A,B)=\max\{dist(A,B),dist(B,A)\}$, $B_r(A)=\{y\in X\mid dist(y,A)\le r\}$.

Лема 2 [1,5]. Нехай $m-$напівпотік G задовольняє умови:
1) існує обмежена, зв'язна така множина $B_0\subset X$, що для довільної обмеженої $B\subset X$ $dist(G(t,B),B_0)\to 0,\ t\to+\infty$;
2) для будь-якої обмеженої $B\subset X$ та $\forall t_n\to+\infty$ будь-яка послідовність $\xi_n\in G(t_n,B)$ є предкомпактною;
3) $m-$напівпотік G є строгим, тобто $G(t+s,z)=G(t,G(s,z))\ \forall z\in X,\ \forall t,s\in R_+$;
4) відображення $z\to G(t,z)$ зв'язнозначне і напівнеперервне зверху.