Розглянемо рівняння (13). Виконавши заміну змінних (21) отримаємо систему рівнянь

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \xi^3} - b_0(\varphi)\left(\frac{\partial V_0}{\partial \xi} V_j + \frac{\partial V_j}{\partial \xi} V_0\right) + \frac{\partial V_j}{\partial \eta} = F_j(\xi, \eta). \qquad (33)$$

Припустимо, що функція $F_j(\xi,\eta)$, $j=\overline{1,2N}$, належить простору швидко спадних функцій щодо ξ для довільних $|\eta| < T_1$. Тоді існує [5] розв'язок $V_j(\xi,\eta)$, $j=\overline{1,2N}$, рівняння (33), визначений для $|\eta| < T_1$, такий, що $V_j(\xi,\eta)$, $j=\overline{1,2N}$, належить простору швидко спадних функцій щодо змінної ξ. Отже, рівняння (13) має нескінченно диференційований розв'язок $V_j(t,\tau_1,\tau_2)$, визначений для всіх $\{(\tau_1,\tau_2)\in \mathbf{R}^2 : |\tau_1-\tau_2| < CT_1\}$, де $C = |\gamma_2(t)-\gamma_1(t)|$.

Теорема 1. *Припустимо, що функції $a_k(x)$, $b_k(x)$, $k \ge 0$, є нескінченно диференційовними на $\mathbf{R}^1$, система (31), (32) має такий розв'язок $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ для $t\in[0;T]$, що $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$ та виконуються умови (14) і (16)–(20).*

Тоді функція

$$Y_0(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + V_0(t,\tau_1,\tau_2), \quad \tau_s = \frac{x-\varphi_s(t)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad s=1,2,$$

є головним членом асимптотичного розвинення для двофазового солітоноподібного розв'язку рівняння (3) при $t\in[0;T]$.

Теорема 2. *Припустимо, що функції $a_k(x)$, $b_k(x)$, $k \ge 0$, є нескінченно диференційовними на $\mathbf{R}^1$, система (31), (32) має такий розв'язок $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ для $t\in[0;T]$, що $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$, виконуються умови (14) – (20), функції $F_j(\xi,\eta)$ $j=\overline{1,2N}$, належить простору швидко спадних функцій щодо ξ для $|\eta| < T_1$.*

Тоді функція

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{\frac{j}{2}} \left(u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)\right), \quad \tau_s = \frac{x-\varphi_s(t)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad s=1,2,$$

є асимптотичним розвиненням для двофазового солітоноподібного розв'язку задачі (2) для всіх $\left\{(x,t)\in R \times[0;T] : |\varphi_1(t)-\varphi_2(t)| < \varepsilon C T_1\right\}$, *де* $C = |\gamma_2(t)-\gamma_1(t)|$.

4. Висновки

В даній статті запропоновано алгоритм побудови асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром першого порядку при старшій похідній.

1. *Маслов В.П., Омельянов Г.А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи матем. наук. – 1981. – Вып. 36 (219), N. 2. – С. 63 – 124. 2. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 58, N.1. – С.111 – 124. 3. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2008. – Т.60,
N. 3. – С. 378 – 387. 4. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Советское радио. – 368 с. 5. *Фаминский А.В.* Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза и его обобщений // Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 1988. – Вып.13. – С. 56 – 105. 6. *Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Korteweg-de Vries equation and Generalizations. VI. Methods for Exact Solutions // Comm. Pure and Appl. Math. – 1974. – V. 27. – P. 97 – 133. 7. *Korteweg D.J., de Vries G.* On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves // Philos. Mag. – 1895. – N. 39. – P. 422 – 433. 8. *Maslov V.P., Omel'yanov G.A.* Geometric asymptotics for PDE. I. – Providence: American Math. Society. – 2001. – 243 p. 9. *Miura R.M.* The Korteweg-de Vries equation: survey of results // SIAM Review – 1976. – V. 18, N. 3. – P. 412 – 459. 10. *Samoylenko Yul.* Asymptotical expansions for one-phase soliton-type solution to perturbed Korteweg-de Vries equation // Proceedings of the Fifth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". – K.: Institute of Mathematics. – 2004. – Т. 3. – P. 1435 – 1441.

Надійшла до редколегії 24.02.10

УДК 517.9

П. Фекета, асп.

ІНВАРІАНТНІ МНОГОВИДИ ОДНОГО КЛАСУ РОЗРИВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянуто питання існування інваріантних тороїдальних множин одного класу систем диференціальних рівнянь, визначених на прямому добутку m-вимірного тора і евклідового простору, з імпульсним збуренням на підмноговиді тора розмірності m–1.

Existence problems of invariant toroidal sets for a certain class of system of differential equations defined on direct product of m-measurable torus and Euclidian space subjected an impulsive perturbations on m–1-measurable submanifold of torus are considered.

1. Вступ

Основним об'єктом дослідження даної роботи є система диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням, визначена на прямому добутку m-вимірного тора і n-вимірного евклідового простору вигляду

$$\dot\varphi = a(\varphi,x),\ \dot x = A(\varphi)x + f(\varphi),\ \varphi \notin \Gamma,$$
$$\Delta x|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x + g(\varphi).$$

Встановлення умов існування кусково неперервних інваріантних множин такої системи ускладнюється нелінійністю функції a по змінній x. Використання методу послідовних наближень, запропонованого в [3], приводить до задачі відшукання розв'язків системи $\dot{\varphi} = a(\varphi, u_k(\varphi))$ з розривною правою частиною на торі. Тому, накладаючи деякі обмеження на функцію $a(\varphi, x)$, в роботі виділяється клас задач для якого, по-перше, існує єдиний абсолютно неперервний розв'язок $\varphi_t(\varphi)$ такої системи, при умові $\varphi_0(\varphi) = \varphi$ і, по-друге, всі перетини цього розв'язку з поверхнею Γ трансверсальні.

2. Система з розривною правою частиною на торі

Позначимо через $C_\Gamma^r(T^m)$ простір 2π-періодичних кусково неперервних та диференційовних до r-го порядку включно функцій, визначених на m-вимірному торі T^m з розривами першого роду на множині Γ.

Нехай задано систему диференціальних рівнянь на торі

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \tag{1}$$

де $a(\varphi) \in C_\Gamma^1(T^m)$, множина $\Gamma = \{\varphi \in T^m : \Phi(\varphi) = 0\}$, де $\Phi(\varphi)$ – неперервна скалярна 2π-періодична за φ функція.

Визначимо ліву і праву сторони поверхні Γ. Називатимемо збіжну послідовність точок тора $\varphi_n \to \varphi$ від'ємною, якщо існує така послідовність додатних чисел $\psi_n \to 0, n \to \infty$, що $\varphi_{\psi_n}(\varphi_n) \in \Gamma$. Множину таких послідовностей позначимо Ψ^-. Аналогічно, послідовність $\varphi_n \to \varphi$ називатимемо додатною, якщо існує така послідовність від'ємних чисел $\psi_n \to 0, n \to \infty$, що $\varphi_{\psi_n}(\varphi_n) \in \Gamma$ і позначатимемо $\varphi_n \in \Psi^+$.

Позначимо

$$a^-(\varphi) = \lim_{\varphi^* \in \Psi^-, \varphi^* \to \varphi} a(\varphi^*), \varphi \in \Gamma,$$

$$a^+(\varphi) = \lim_{\varphi^* \in \Psi^+, \varphi^* \to \varphi} a(\varphi^*), \varphi \in \Gamma,$$

$$a_n^-(\varphi) = \left\langle grad\Phi(\varphi), a^-(\varphi) \right\rangle, \varphi \in \Gamma,$$

$$a_n^-(\varphi) = \left\langle grad\Phi(\varphi), a^-(\varphi) \right\rangle, \varphi \in \Gamma.$$

Позначимо через $t_i(\varphi), i \in \mathbb{Z}$ розв'язки рівняння $\Phi(\varphi_t(\varphi)) = 0$, тобто точки перетину розв'язку $\varphi_t(\varphi)$ з поверхнею Γ. Як відомо [5], якщо функція $a(\varphi)$ така, що для будь-якого $\varphi \in \Gamma$

$$a_n^+(\varphi) < 0 \text{ або } a_n^-(\varphi) > 0, \tag{2}$$

система (1) має єдиний абсолютно неперервний розв'язок $\varphi_t(\varphi)$ при умові $\varphi_0(\varphi) = \varphi$. Більше того, якщо $a_n^+(\varphi) > 0, a_n^-(\varphi) > 0$ для будь-якого $\varphi \in \Gamma_0$, де Γ_0-деяка відкрита область на поверхні Γ, то розв'язок $\varphi_t(\varphi)$ в області Γ_0 переходить з лівої сторони поверхні Γ на праву, маючи при цьому лише одну спільну точку з поверхнею Γ. Тобто $\varphi_t(\varphi)$ перетинає Γ трансверсально. Аналогічно, при виконанні умови $a_n^+(\varphi) < 0, a_n^-(\varphi) < 0$ для будь-якого $\varphi \in \Gamma_0$ розв'язок $\varphi_t(\varphi)$ в області Γ_0 переходить з правої сторони на ліву, маючи при цьому лише одну спільну точку з поверхнею Γ. Тому існує $\theta > 0$ таке, що справедлива оцінка

$$t_{i+1}(\varphi) - t_i(\varphi) \geq \theta. \tag{3}$$

Припущення 1. Надалі розглядатимемо такі функцій $a(\varphi)$, для яких поверхню Γ можна розбити на області Γ_i так, щоб для будь-якого $\varphi \in \Gamma_i$ виконувалася одна із умов

$$a_n^+(\varphi) > 0, a_n^-(\varphi) > 0 \tag{4}$$

або

$$a_n^+(\varphi) < 0, a_n^-(\varphi) < 0. \tag{5}$$

Зазначимо, що для різних Γ_i можуть виконуватися різні співвідношення.

3. Лінійне розширення системи на торі

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням, визначену на прямому добутку m-вимірного тора T^m і n-вимірного евклідового простору

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi} = a(\varphi), \dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi), \varphi \notin \Gamma, \\ &\Delta x|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x + g(\varphi), \end{aligned} \tag{6}$$

де $a(\varphi) \in C_\Gamma^1(T^m)$, $A(\varphi), B(\varphi), f(\varphi), g(\varphi) \in C(T^m)$, $\|x\| \leq h$. Якщо виконується припущення 1, тобто перше рівняння системи (6) має єдиний неперервний розв'язок, тоді система (6) має інваріантну множину $x = u(\varphi)$ вигляду

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(0, \tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau + \sum_{-\infty < t_i(\varphi) < +\infty} G(0, t_i(\varphi) + 0, \varphi) g(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)),$$

якщо тільки функція Гріна-Самойленка $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняє нерівності

$$\|G(t,\tau,\varphi)\| \le Ke^{-\gamma|t-\tau|}, \tag{7}$$

для будь-яких t,τ і деяких $K \ge 1, \gamma > 0$. Причому

$$\|u(\varphi)\| \le \frac{2K}{\gamma}\max_{\varphi\in T^m}\|f(\varphi)\| + \frac{2K}{1-e^{-\gamma\theta}}\max_{\varphi\in T^m}\|g(\varphi)\|. \tag{8}$$

Будемо називати функцію Гріна-Самойленка $G(t,\tau,\varphi)$ системи

$$\begin{aligned} &\dot\varphi = a(\varphi),\ \dot x = A(\varphi)x,\ \varphi\notin\Gamma,\\ &\Delta x|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x \end{aligned} \tag{9}$$

грубою, якщо знайдеться таке $\delta_0 > 0$ таке, що система

$$\begin{aligned} &\dot\varphi = a(\varphi)+a_1(\varphi),\ \dot x = A(\varphi)x,\ \varphi\notin\Gamma,\\ &\Delta x|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x, \end{aligned} \tag{10}$$

коли $a_1 \in C^1_\Gamma(T^m), \|a_1\| \le \delta_0$ має функцію Гріна-Самойленка $\tilde G(t,\tau,\varphi)$, для якої

$$\|\tilde G(t,\tau,\varphi)\| \le Ke^{-\gamma|t-\tau|}, \tag{11}$$

для будь-яких t,τ і деяких $K \ge 1, \gamma > 0$.

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\begin{aligned} &\dot\varphi = a(\varphi,x),\ \dot x = A(\varphi)x + f(\varphi),\ \varphi\notin\Gamma,\\ &\Delta x|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x + g(\varphi), \end{aligned} \tag{12}$$

де $a_1(\varphi,x) \in C^{(1,Lip)}_\Gamma(T^m,\|x\|\le h)$. Перепишемо її у вигляді

$$\begin{aligned} &\dot\varphi = a_0(\varphi)+a_1(\varphi,x),\ \dot x = A(\varphi)x + f(\varphi),\ \varphi\notin\Gamma,\\ &\Delta x|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x + g(\varphi), \end{aligned} \tag{13}$$

де $a_0(\varphi) = a(\varphi,0),\ a_1(\varphi,x) = a(\varphi,x) - a(\varphi,0)$. Нехай система

$$\begin{aligned} &\dot\varphi = a_0(\varphi),\ \dot x = A(\varphi)x,\ \varphi\notin\Gamma,\\ &\Delta x|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x \end{aligned} \tag{14}$$

має грубу функцію Гріна-Самойленка, тоді інваріантний многовид системи (12) шукатимемо методом послідовних наближень. За початковий многовид M_0 візьмемо тривіальний многовид $x = 0$. За многовид M_{k+1} візьмемо інваріантний многовид системи

$$\begin{aligned} &\dot\varphi = a_0(\varphi)+a_1(\varphi,u_k(\varphi)),\ \dot x = A(\varphi)x + f(\varphi),\ \varphi\notin\Gamma,\\ &\Delta x|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x + g(\varphi), \end{aligned} \tag{15}$$

де $u_k(\varphi)$ – інваріантний многовид на k-му кроці. Легко бачити, що малі збурення правої частини першого рівняння системи (15) не порушують виконання умов (4),(5) для функції $a_0(\varphi)+a_1(\varphi,u_k(\varphi))$, якщо тільки

$$\|a_0(\varphi)+a_1(\varphi,u_k(\varphi))\| < \delta_1,$$

де

$$\delta_1 = \min\left\{\|a_n^+(\varphi,0)\|,\|a_n^-(\varphi,0)\|\right\}\cdot\left(\sum_{i=1}^m\left\|\frac{\partial\Phi(\varphi)}{\partial\varphi_i}\right\|^2\right)^{-\frac12},\ \varphi\in\Gamma.$$

Отже, за припущенням 1, перше рівняння з (15) має єдиний абсолютно неперервний розв'язок $\varphi_t^{k+1}(\varphi)$, причому відстань між моментами імпульсної дії $t_{i+1}^{k+1}(\varphi)$ і $t_i^{k+1}(\varphi)$ задовольнятиме оцінку вигляду (3). Тоді система (15) має інваріантний многовид

$$u_{k+1}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(0,\tau,\varphi)f(\varphi_\tau^{k+1}(\varphi))d\tau + \sum_{-\infty<t_i^{k+1}(\varphi)<+\infty} G(0,t_i^{k+1}(\varphi)+0,\varphi)g(\varphi_{t_i^{k+1}(\varphi)}^{k+1}(\varphi)), \tag{16}$$

причому існують сталі K,γ,θ не залежні від функцій $f(\varphi)$ та $g(\varphi)$, такі, що

$$\|u_{k+1}(\varphi)\| \le \frac{2K}{\gamma}\max_{\varphi\in T^m}\|f(\varphi)\| + \frac{2K}{1-e^{-\gamma\theta}}\max_{\varphi\in T^m}\|g(\varphi)\|. \tag{17}$$

Позначимо $\max\limits_{\varphi\in T^m} f(\varphi) = m,\ \max\limits_{\varphi\in T^m} g(\varphi) = n$. Вважатимемо, що $\frac{2K}{\gamma}m + \frac{2K}{1-e^{-\gamma\theta}}n \le h$, тому $\|u_{k+1}(\varphi)\| \le h$.

Встановимо умови збіжності послідовності $u_k(\varphi)$. Для цього розглянемо різницю $w_{k+1}(\varphi) = u_{k+1}(\varphi) - u_k(\varphi)$. Враховуючи, що функції $u_k(\varphi)$ гладкі на $T^m - \Gamma$ і мають розриви першого роду на $\varphi\in\Gamma$, вони задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_k(\varphi)}{\partial\varphi}(a_0(\varphi)+a_1(\varphi,u_{k-1}(\varphi))) = A(\varphi)u_k(\varphi) + f(\varphi),\ \varphi\notin\Gamma,\\ &\Delta u_k(\varphi)|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)u_k(\varphi) + g(\varphi) \end{aligned}$$

Для кожного $k = 1,2,...$. Тоді функція $w_{k+1}(\varphi)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial w_{k+1}(\varphi)}{\partial\varphi}(a_0(\varphi) + a_1(\varphi, u_k(\varphi))) = A(\varphi)w_{k+1}(\varphi) + f_k(\varphi), \varphi \notin \Gamma,$$
$$\Delta w_{k+1}(\varphi)|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)w_{k+1}(\varphi),$$

де

$$f_k(\varphi) = -\frac{\partial u_k(\varphi)}{\partial\varphi}(a_1(\varphi, u_k(\varphi)) - a_1(\varphi, u_{k-1}(\varphi))) . \quad (18)$$

Тому $x = w_{k+1}(\varphi)$ є інваріантною множиною системи рівнянь

$$\dot\varphi = a_0(\varphi) + a_1(\varphi, u_k(\varphi)), \dot x = A(\varphi)x + f_k(\varphi), \varphi \notin \Gamma,$$
$$\Delta x|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x. \quad (19)$$

Позначимо $\left\|\frac{\partial u_k(\varphi)}{\partial\varphi}\right\| \le M$. Тоді, враховуючи, що функція $a_1(\varphi, x)$ ліпшицева за x зі сталою Ліпшиця L , знаходимо

$$\|w_{k+1}(\varphi)\| \le \frac{2K}{\gamma}\max_{\varphi\in T^m}\|f_k(\varphi)\| \le \frac{2K}{\gamma}ML\|w_k(\varphi)\| . \quad (20)$$

Вважаючи, що стала Ліпшиця L настільки мала, що $\frac{2K}{\gamma}ML < 1$, робимо висновок про рівномірну збіжність послідовності функцій $\{u_k(\varphi)\}$ на множині $\varphi \in T^m$. Покладемо

$$\lim_{k\to\infty} u_k(\varphi) = u(\varphi) . \quad (21)$$

Покажемо, що гранична функція $u(\varphi)$ визначає інваріантну поверхню системи (12). Послідовність розв'язків $\varphi_t^k(\varphi)$ є компактною в просторі неперервних на I функцій, де I – довільний скінченний відрізок дійсної осі. Тоді з неї можна виділити рівномірно збіжну на I підпослідовність. Нехай $\varphi_t^{k_v}$, $v = 1,2,..$ – така підпослідовність, а $\varphi_t(\varphi)$ – її границя. В силу збіжності послідовності $\varphi_t^{k_v}$ та неперервності функції $\Phi(\varphi)$, послідовність наборів часів $\{t_i(\varphi)\}^{k_v}$, що є розв'язками рівнянь $\Phi(\varphi_t^{k_v}) = 0$, збіжна до набору часів $t_i(\varphi)$, який є розв'язком рівняння $\Phi(\varphi_t(\varphi)) = 0$. Перейшовши в (15) до границі, коли $k \to \infty$ та в силу довільності інтервала I переконуємося, що гранична функція $u(\varphi)$ визначає інваріантну множину системи (12). Таким чином, має місце твердження.

Теорема 1. Нехай в системі (12) функція $a(\varphi, x)$ така, що $a(\varphi, 0)$ задовольняє припущення 1 і система

$$\dot\varphi = a(\varphi, 0), \dot x = A(\varphi)x, \varphi \notin \Gamma,$$
$$\Delta x|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x$$

має грубу функцію Гріна-Самойленка. Тоді існують достатньо малі сталі $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\} > 0$ і $L > 0$, що для будь-якої функції $a_1(\varphi, x) \in C_\Gamma^{(1,Lip)}(T^m, \|x\| \le h)$ такої, що

$$\|a_1(\varphi, x)\| \le \delta,$$
$$\|a_1(\varphi, x') - a_1(\varphi, x'')\| \le L\|x' - x''\|,$$

система (12) має інваріантний тороїдальний многовид.

4. Один клас розривної динамічної системи

Позначимо

$$\Omega = \bigcup_{\varphi\in T^m} \Omega_\varphi ,$$

де Ω_φ – ω -гранична множина траєкторії $\varphi_t(\varphi)$. Розглянемо систему (6) у випадку, коли матрична функція $A(\varphi)$ на множині Ω є сталою матрицею, тобто $A(\varphi) = \tilde A$ для всіх $\varphi \in \Omega$, а функція $B(\varphi)$ на множині Ω є нульовою матрицею, тобто $B(\varphi) = 0$ для всіх $\varphi \in \Omega$. Це означає, що для всіх $\varphi \in T^m$

$$\lim_{t\to\infty} A(\varphi_t(\varphi)) = \tilde A,$$
$$\lim_{t\to\infty} B(\varphi_t(\varphi)) = 0. \quad (22)$$

Теорема 2. Якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці $\tilde A$ від'ємні, то для довільних неперервних 2π -періодичних за φ_j $(j = 1,2,..,m)$ функцій $f(\varphi)$ і $g(\varphi)$ система (6), при виконанні умови (22), має асимптотично стійку інваріантну тороїдальну множину $x = u(\varphi)$, причому

$$\|u(\varphi)\| \le \frac{K}{\gamma}\max_{\varphi\in T^m}\|f(\varphi)\| + \frac{K}{1 - e^{-\gamma\theta}}\max_{\varphi\in T^m}\|g(\varphi)\|. \quad (23)$$

Доведення. Як відомо [1], якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці $\tilde{A}$ від'ємні, то матрицант $X_\tau^t(\varphi)$ системи $\dot{x} = A(\varphi_t(\varphi))x$, залежної від $\varphi \in T^m$ як від параметра, допускає оцінку

$$\left\|X_\tau^t(\varphi)\right\| \le K_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)},$$

для будь-якого $t \ge \tau$ і деяких $K_1 \ge 1, \gamma_1 > 0$. Враховуючи другу умову з (22), матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi)$ однорідної системи з імпульсним збуренням

$$\begin{aligned} &\dot{x} = A(\varphi_t(\varphi))x, t \ne t_i(\varphi), \\ &\Delta x\,|_{t=t_i(\varphi)} = B(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))x, \end{aligned} \tag{24}$$

залежної від $\varphi \in T^m$ як від параметра, допускає оцінку

$$\left\|\Omega_\tau^t(\varphi)\right\| \le K e^{-\gamma(t-\tau)} \tag{25}$$

для будь-якого $t \ge \tau$ і деяких $K \ge 1, \gamma > 0$. Легко перевірити, що інваріантний многовид $x = u(\varphi)$ системи (6) матиме вигляд

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau + \sum_{t_i(\varphi)<0} \Omega_{t_i(\varphi)+0}^0(\varphi) g(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)). \tag{26}$$

Нехай $x_t(\varphi)$ – довільний розв'язок системи (6), а $x_t^*(\varphi) = u(\varphi_t(\varphi))$ – розв'язок, що належить інваріантній множині. Тоді, враховуючи (25) і (26), отримуємо

$$\lim_{t\to\infty} \left\|x_t(\varphi) - u(\varphi_t(\varphi))\right\| = 0.$$

Це означає, що інваріантний многовид (26) є асимптотично стійким. Оцінка (23) напряму випливає з вигляду (26), якщо взяти до уваги (25). Теорему доведено.

5. Висновки

В роботі виділено один клас систем, визначених на прямому добутку m-вимірного тора і n-вимірного евклідового простору, для яких існує кусково неперервний інваріантний тороїдальний многовид $x = u(\varphi)$.

1. *Перестюк М. О., Балога С. І.* Існування інваріантного тора одного классу систем диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2008. – 11, №4. – С. 520-529., 2. *Перестюк Н. А., Плотников В. Ф., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью.– К.: Институт математики НАН Украины, 2007.– 427 с., 3. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы.– М.: Наука, 1987.– 304 с., 4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Выща шк., 1987. – 288 с., 5. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985.– 224 с., 6. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations.– Singapore: World Scientific, 1995. – 462 p.

Надійшла до редколегії 27.11.2009

УДК 517.98

А. Чайковський, канд. фіз.-мат. наук

ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ АБСТРАКТНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ

Знайдено нове зображення розв'язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі з G-секторіальним операторним коефіцієнтом. Отримані нові властивості розв'язку в залежності від правої частини.

It's found new representation of Cauchy's problem's solution for linear differential solution of the first order in Banach space with G-sectorial operator coefficient. New properties of solution are obtained depending on the right-hand function.

1. Вступ

Нехай $\left(B, \|\cdot\|\right)$ – комплексний банахів простір з нульовим елементом $\bar{0}$, I – одиничний оператор в B.

Наведемо означення G-секторіального оператора з роботи [1].

Означення 1. Будемо казати, що функція $G:[0,+\infty) \to (0,+\infty)$ належить класу Ψ, якщо вона задовольняє умови:

а) G – незростаюча на $[0,+\infty)$;

б) $G(t) \to 0,\ t \to +\infty$;

в) функція $1/G$ ліпшицева на $[0,+\infty)$.

Означення 2. Нехай $G \in \Psi$. Лінійний оператор $T: D(T) \subset B \to B$ назвемо G-секторіальним, якщо існують такі сталі $a \in \mathbf{R}$ і $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, що для множини $S_{a,\varphi} := \left\{z \in \mathbf{C} \mid z \ne a, \left|\arg(z-a)\right| < \varphi\right\}$ справджуються умови:

а) спектр $\sigma(T) \subset S_{a,\varphi}$;

б) $\exists M > 0\ \ \forall \lambda \notin S_{a,\varphi}\ :\ \left\|(T - \lambda I)^{-1}\right\| \le MG\left(|\lambda - a|\right)$.