Доведення. Як відомо [1], якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці $\tilde{A}$ від'ємні, то матрицант $X_\tau^t(\varphi)$ системи $\dot{x} = A(\varphi_t(\varphi))x$, залежної від $\varphi \in T^m$ як від параметра, допускає оцінку

$$\left\| X_\tau^t(\varphi) \right\| \le K_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)},$$

для будь-якого $t \ge \tau$ і деяких $K_1 \ge 1, \gamma_1 > 0$. Враховуючи другу умову з (22), матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi)$ однорідної системи з імпульсним збуренням

$$\begin{aligned} &\dot{x} = A(\varphi_t(\varphi))x, t \ne t_i(\varphi), \\ &\Delta x \,|_{t=t_i(\varphi)} = B(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))x, \end{aligned} \tag{24}$$

залежної від $\varphi \in T^m$ як від параметра, допускає оцінку

$$\left\| \Omega_\tau^t(\varphi) \right\| \le K e^{-\gamma(t-\tau)} \tag{25}$$

для будь-якого $t \ge \tau$ і деяких $K \ge 1, \gamma > 0$. Легко перевірити, що інваріантний многовид $x = u(\varphi)$ системи (6) матиме вигляд

$$u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau + \sum_{t_i(\varphi) < 0} \Omega_{t_i(\varphi)+0}^0(\varphi) g(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)) . \tag{26}$$

Нехай $x_t(\varphi)$ – довільний розв'язок системи (6), а $x_t^*(\varphi) = u(\varphi_t(\varphi))$ – розв'язок, що належить інваріантній множині. Тоді, враховуючи (25) і (26), отримуємо

$$\lim_{t \to \infty} \left\| x_t(\varphi) - u(\varphi_t(\varphi)) \right\| = 0 .$$

Це означає, що інваріантний многовид (26) є асимптотично стійким. Оцінка (23) напряму випливає з вигляду (26), якщо взяти до уваги (25). Теорему доведено.

5. Висновки

В роботі виділено один клас систем, визначених на прямому добутку m-вимірного тора і n-вимірного евклідового простору, для яких існує кусково неперервний інваріантний тороїдальний многовид $x = u(\varphi)$.

1. *Перестюк М. О., Балога С. І.* Існування інваріантного тора одного классу систем диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2008. – 11, №4. – С. 520-529., 2. *Перестюк Н. А., Плотников В. Ф., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью.– К.: Институт математики НАН Украины, 2007.– 427 с., 3. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы.– М.: Наука, 1987.– 304 с., 4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Выща шк., 1987. – 288 с., 5. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985.– 224 с., 6. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations.– Singapore: World Scientific, 1995. – 462 p.

Надійшла до редколегії 27.11.2009

УДК 517.98

А. Чайковський, канд. фіз.-мат. наук

ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ АБСТРАКТНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ

Знайдено нове зображення розв'язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі з G-секторіальним операторним коефіцієнтом. Отримані нові властивості розв'язку в залежності від правої частини.

It's found new representation of Cauchy's problem's solution for linear differential solution of the first order in Banach space with G-sectorial operator coefficient. New properties of solution are obtained depending on the right-hand function.

1. Вступ

Нехай $\left(B, \|\cdot\|\right)$ – комплексний банахів простір з нульовим елементом $\bar{0}$, I – одиничний оператор в B .

Наведемо означення G-секторіального оператора з роботи [1].

Означення 1. Будемо казати, що функція $G : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ належить класу Ψ , якщо вона задовольняє умови:

а) G – незростаюча на $[0, +\infty)$;

б) $G(t) \to 0, \ t \to +\infty$;

в) функція $1/G$ ліпшицева на $[0, +\infty)$.

Означення 2. Нехай $G \in \Psi$. Лінійний оператор $T : D(T) \subset B \to B$ назвемо G-секторіальним, якщо існують такі сталі $a \in \mathbf{R}$ і $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, що для множини $S_{a,\varphi} := \left\{ z \in \mathbf{C} \mid z \ne a, \left|\arg(z-a)\right| < \varphi \right\}$ справджуються умови:

а) спектр $\sigma(T) \subset S_{a,\varphi}$;

б) $\exists M > 0 \ \forall \lambda \notin S_{a,\varphi} \ : \ \left\| (T - \lambda I)^{-1} \right\| \le M G\left(|\lambda - a|\right)$.

Зауважимо, що при $G(t)=(t+1)^{-1}$, $t\ge 0$, поняття G-секторіального оператора співпадає з поняттям секторіального оператора (генератора аналітичної напівгрупи). Теорія таких операторів добре відома (див., наприклад, [3,4]) В загальному випадку G-секторіальні оператори та породжені ними напівгрупи досліджені в роботі [1]. Наведемо деякі отримані там результати, що стосуються операторної експоненти, у вигляді леми.

Лема 1. Нехай $G\in\Psi$. T – G-секторіальний оператор. Операторна експонента, визначена рівностями

$$e^{-Tt}:=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-t\mu}(T-\mu I)^{-1}d\mu,\ t>0,\ e^{-T\cdot 0}:=I,$$

де $\Gamma=\{it\operatorname{ctg}\varphi+|t|:t\in\mathbf{R}\setminus[-\delta,\delta]\}\cup\{\delta+it\operatorname{ctg}\varphi:t\in[-\delta,\delta]\}$, $\delta>0$, – крива, що охоплює $S_{0,\varphi}$, має властивості:

1) функція $e^{-Tt}b$ неперервна при фіксованому $b\in D(T)$ на $[0,+\infty)$;

2) функція $e^{-Tt}b$ неперервно диференційовна і має похідну $-Te^{-Tt}b$ при фіксованому $b\in D(T^2)$ на $[0,+\infty)$;

3) $\int_0^t e^{-Ts}ds=T^{-1}\left(I-e^{-Tt}\right)$;

4) $T^{-1}e^{-Tt}:=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mu^{-1}e^{-t\mu}(T-\mu I)^{-1}d\mu,\ t\ge 0$.

Нехай $R>0$, T – G-секторіальний оператор, $y\in C([0,R],B)$. Розглянемо задачу Коші

$$x'(t)=-Tx(t)+y(t),\ t\in(0,R],\ x(0)=\overline{0}. \tag{1}$$

В роботі [1] знайдено її розв'язок у вигляді

$$x(t)=\int_0^t e^{-T(t-s)}y(s)ds,\ t\in[0,R],$$

якщо функція y локально гельдерова та її значення лежать в області визначення деякого додатного степеня оператора T. В цій роботі буде знайдено інше зображення розв'язку та розв'язано задачу (1) за інших умов на функцію y.

Надалі припускається, що $a=0$. Інші випадки можна звести до цього заміною $x(t)=e^{-at}z(t),\ t\in[0,R]$.

2. Допоміжні твердження

Розглянемо спочатку задачу Коші (1) у випадку оператора T, пропорційного одиничному.

Лема 2. Нехай $y\in C([0,R],B)$. Для кожного $\mu\in\mathbf{C}$ задача Коші

$$z'_t(t,\mu)=-\mu z(t,\mu)+y(t),\ t\in[0,R],\ z(0)=\overline{0},$$

має єдиний неперервно диференційовний розв'язок

$$z(t,\mu)=\int_0^t e^{-\mu(t-s)}y(s)ds,\ t\in[0,R].$$

При цьому функція z при кожному фіксованому $t\in[0,R]$ є аналітичною по μ в $\mathbf{C}$ і допускає оцінку

$$\exists L_1>0\ \forall t\in[0,R]\ \forall\mu\notin S_{0,\varphi},\operatorname{Re}\mu>0:\ \|z(t,\mu)\|\le L|\mu|^{-1}.$$

Доведення. Існування та єдиність розв'язку показані в [2]. Аналітичність перевіряється безпосереднім диференціюванням. Крім того,

$$\|z(t,\mu)\|\le\max_{s\in[0,R]}\|y(s)\|\cdot\int_0^t e^{-\operatorname{Re}\mu(t-s)}ds=\|y\|_\infty(\operatorname{Re}\mu)^{-1}\left(1-e^{-t\operatorname{Re}\mu}\right)\le|\mu|^{-1}\|y\|_\infty(\cos\varphi)^{-1},\ t\in[0,R].$$

Лему 2 доведено.

Лема 3. Нехай $y\in C([0,R],B)$ та для деяких чисел $\gamma\in(0,1]$ і $L>0$ виконується умова Гельдера

$$\forall t_1,t_2\in[0,R]:\ \|y(t_1)-y(t_2)\|\le L|t_1-t_2|^\gamma.$$

Позначимо

$$z_0(t,\mu)=\int_0^t e^{-\mu(t-s)}y(t)ds=\mu^{-1}\left(1-e^{-\mu t}\right)y(t),\ t\in[0,R],\ \mu\in\mathbf{C}\setminus\{0\}.$$

Тоді функція z з леми 2 допускає оцінку

$$\exists L_2>0\ \forall t\in[0,R]\ \forall\mu\notin S_{0,\varphi},\operatorname{Re}\mu>0:\ \|z(t,\mu)-z_0(t,\mu)\|\le L_2|\mu|^{-1-\gamma}.$$

Доведення. Враховуючи означення гамма-функції Ейлера, маємо:

$$\|z(t,\mu)-z_0(t,\mu)\|\le\int_0^t e^{-\operatorname{Re}\mu(t-s)}L(t-s)^\gamma ds=L(\operatorname{Re}\mu)^{-1-\gamma}\int_0^{t\operatorname{Re}\mu}e^{-s}s^\gamma ds\le L|\mu|^{-1-\gamma}\Gamma(\gamma+1)(\cos\varphi)^{-1-\gamma},\ t\in[0,R].$$

Лему 3 доведено.

Лема 4. Нехай $y \in C([0,R],B)$, $0 < b < c < d \le R$, та для деяких чисел $\gamma \in (0,1]$ і $L > 0$ виконується умова Гельдера

$$\forall t_1, t_2 \in [b,d] : \|y(t_1) - y(t_2)\| \le L|t_1 - t_2|^\gamma .$$

Тоді функція z з леми 2 та функція z_0 з леми 3 допускають оцінку

$$\exists L_3 > 0 \ \forall t \in [c,d] \ \forall \mu \notin S_{0,\varphi}, \operatorname{Re}\mu > 0 : \|z(t,\mu) - z_0(t,\mu)\| \le L_3 |\mu|^{-1-\gamma} .$$

Доведення. Враховуючи означення гамма-функції Ейлера, маємо:

$$\|z(t,\mu) - z_0(t,\mu)\| \le \|y\|_\infty \int_0^b e^{-\operatorname{Re}\mu(t-s)} ds + \int_b^t e^{-\operatorname{Re}\mu(t-s)} L(t-s)^\gamma ds \le \|y\|_\infty e^{-\operatorname{Re}\mu(c-b)} + L(\operatorname{Re}\mu)^{-1-\gamma} \int_0^{(t-b)\operatorname{Re}\mu} e^{-s} s^\gamma ds \le$$

$$\le \|y\|_\infty e^{-|\mu|\cos\varphi(c-b)} + L|\mu|^{-1-\gamma} \Gamma(\gamma+1)(\cos\varphi)^{-1-\gamma}, \ t \in [c,d].$$

Потрібна оцінка випливає з того, що степенева функція зростає повільніше експоненти.
Лему 4 доведено.

Лема 5. Задача Коші (1) у випадку сталої функції y має єдиний розв'язок $x \in C([0,R],B) \cap C^1((0,R],B)$. Якщо додатково виконується умова

(і) для довільного $b \in D(T)$ існує $\left(e^{-Tt}b\right)'(0) = -Tb$, то цей розв'язок має похідну в точці 0. Якщо ж виконуються умови (і) і

(іі) для довільного $b \in B$: $e^{-Tt}b \to b, t \to 0+$, то розв'язок належить класу $C^1([0,R],B)$.

Доведення. Нехай $y(t) = y_0$, $t \in [0,R]$. Розглянемо функцію $x(t) := \int_0^t e^{-T(t-s)} y_0 ds$, $t \in [0,R]$. Нехай $\lambda \notin \sigma(T)$ – деяке фіксоване. Тоді

$$x(t) := \int_0^t e^{-T(t-s)} (T - \lambda I)(T - \lambda I)^{-1} y_0 ds = \left(I - e^{-Tt}\right)(T - \lambda I)^{-1} y_0 - \lambda (T - \lambda I)^{-1} x(t) =$$

$$= (T - \lambda I)^{-1} \left(\left(I - e^{-Tt}\right) y_0 - \lambda x(t)\right), \ t \in [0,R].$$

Звідси випливає, що $x(t) \in D(T)$, $t \in [0,R]$. Крім того, враховуючи лему 1, існує

$$x'(t) = Te^{-Tt}(T - \lambda I)^{-1} y_0 - \lambda\left((T - \lambda I)^{-1} y_0 - T(T - \lambda I)^{-1} x(t)\right) =$$

$$= -T\left(\left(I - e^{-Tt}\right)(T - \lambda I)^{-1} y_0 - \lambda (T - \lambda I)^{-1} x(t)\right) + y_0 = -Tx(t) + y_0, \ t \in (0,R].$$

З умови (і) випливає, що це твердження правильне при $t = 0$. При виконанні умови (іі) функція $Tx(t)$, а отже і $x'(t)$ неперервна в нулі.

Крім того, задача (1) рівносильна задачі

$$\left(e^{-(r-t)T} x(t)\right)'_t = e^{-(r-t)T} y(t), \ t \in (0,r), r \in (0,R), \ x(0) = \overline{0},$$

звідки

$$e^{-(r-t)T} x(t) = \int_0^t e^{-(r-s)T} y(s) ds = e^{-(r-t)T} \int_0^t e^{-(t-s)T} y(s) ds, \ t \in (0,r), r \in (0,R), \ x(0) = \overline{0}.$$

Подіємо на цю рівність оператором $(T - \lambda I)^{-1}$ при деякому фіксованому $\lambda \notin \sigma(T)$:

$$e^{-(r-t)T} (T - \lambda I)^{-1} x(t) = e^{-(r-t)T} (T - \lambda I)^{-1} \int_0^t e^{-(t-s)T} y(s) ds, \ t \in (0,r), r \in (0,R), \ x(0) = \overline{0}.$$

Переходячи при фіксованому $t \in (0,R)$ до границі при $r \to t+$ отримаємо єдиність розв'язку.
Лему 5 доведено.

3. Основні результати

Теорема 1. Нехай T – G-секторіальний оператор, для якого $a = 0$, і при деякому $\alpha \in (0,1]$ інтеграл $\int_1^{+\infty} G(t) t^{-\alpha} dt$ збіжний і виконуються умови (і), (іі) леми 5. Тоді задача Коші (1) для кожної функції $y \in C([0,R],B)$, гельдерової на $[0,R]$ з показниками L, γ, причому $\gamma \ge \alpha$, має єдиний розв'язок $x \in C^1([0,R],B)$. Цей розв'язок можна подати у вигляді

$$x(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(T-\mu I)^{-1} z(t,\mu)\,d\mu,\ t\in[0,R], \tag{2}$$

де $\Gamma = \{it\operatorname{ctg}\varphi + |t| : t\in\mathbf{R}\setminus[-\delta,\delta]\} \cup \{\delta + it\operatorname{ctg}\varphi : t\in[-\delta,\delta]\},\ \delta>0$, – крива, що охоплює $S_{0,\varphi}$, функція z визначена в лемі 2.

Доведення. Враховуючи лему 5, не зменшуючи загальності, можна вважати, що $y(0)=\overline{0}$ (інакше окремо розглянемо функції $y(t)-y(0)$ і $y(0)$).

Зауважимо, що з умови випливає збіжність інтеграла $\int_{\Gamma} G(|\mu|)|\mu|^{-\alpha}|d\mu|$.

Інтеграл в формулі (2) збігається і задає неперервну на $[0,R]$ функцію, бо за лемою 2 і означенням 2

$$\left\|(T-\mu I)^{-1} z(t,\mu)\right\| \le MG(|\mu|)L_1|\mu|^{-1},\ t\in[0,R],\ \mu\in\Gamma .$$

Позначимо

$$z_1(t,\mu) = \int_0^t\big(z(s,\mu)-z_0(s,\mu)\big)ds + \mu^{-1}z(t,\mu) = \int_0^t \mu^{-1}e^{-\mu s}y(s)\,ds,\ t\in[0,R],\ \mu\in\Gamma .$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}T(T-\mu I)^{-1}\left(-\mu^{-1}z(t,\mu)+z_1(t,\mu)\right)d\mu = \\
&\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(T-\mu I+\mu I)(T-\mu I)^{-1}\mu^{-1}z(t,\mu)\,d\mu - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}T(T-\mu I)^{-1}z_1(t,\mu)\,d\mu = \\
&\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\mu^{-1}z(t,\mu)\,d\mu + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(T-\mu I)^{-1}z(t,\mu)\,d\mu - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}T(T-\mu I)^{-1}z_1(t,\mu)\,d\mu = \\
&-x(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}T(T-\mu I)^{-1}z_1(t,\mu)\,d\mu,\ t\in[0,R],
\end{aligned} \tag{3}$$

де використана аналітичність z по μ. Крім того, оскільки $\left\|T(T-\mu I)^{-1}\right\| = \left\|I+\mu(T-\mu I)^{-1}\right\| \le 1+M|\mu|G(|\mu|),\ \mu\in\Gamma$, то, враховуючи лему 3,

$$\left\|T(T-\mu I)^{-1}\big(z(t,\mu)-z_0(t,\mu)\big)\right\| \le L_1|\mu|^{-1-\gamma}\big(1+M|\mu|G(|\mu|)\big),\ \mu\in\Gamma,\ t\in[0,R]. \tag{4}$$

Розглянемо інтеграл

$$J(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}T(T-\mu I)^{-1}\big(z(t,\mu)-z_0(t,\mu)\big)d\mu,\ t\in[0,R].$$

Оцінка (4) показує, що $J\in C([0,R],B)$ і цю функцію можна інтегрувати під знаком інтеграла. Тому, враховуючи означення z_1, рівність (3) і аналітичність z по μ, маємо:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t J(s)\,ds = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}T(T-\mu I)^{-1}\left(\int_0^t\big(z(s,\mu)-z_0(s,\mu)\big)ds\right)d\mu = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}T(T-\mu I)^{-1}\left(-\mu^{-1}z(t,\mu)+z_1(t,\mu)\right)d\mu = \\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\mu^{-1}z(t,\mu)\,d\mu + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(T-\mu I)^{-1}z(t,\mu)\,d\mu - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}T(T-\mu I)^{-1}z_1(t,\mu)\,d\mu = \\
&=-x(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}T(T-\mu I)^{-1}z_1(t,\mu)\,d\mu,\ t\in[0,R].
\end{aligned} \tag{5}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
&\left\|T(T-\mu I)^{-1}(z_1)'_t(t,\mu)\right\| = \left\|T(T-\mu I)^{-1}\mu^{-1}e^{-\mu t}y(t)\right\| \le \big(1+M|\mu|G(|\mu|)\big)|\mu|^{-1}e^{-t\operatorname{Re}\mu}Lt^{\gamma} \le \\
&\big(1+M|\mu|G(|\mu|)\big)|\mu|^{-1-\gamma}(\cos\varphi)^{-\gamma}\sup_{s\ge 0}\frac{s^{\gamma}}{e^{s}},\ \mu\in\Gamma,\ t\in[0,R],
\end{aligned}$$

то останній інтеграл в (5) можна диференціювати під знаком інтеграла, отримуючи неперервну функцію. Звідси

$$x'(t) = -J(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}T(T-\mu I)^{-1}\mu^{-1}e^{-\mu t}y(t)\,d\mu,\ t\in[0,R],$$

причому $x'\in C([0,R],B)$.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Нехай T – G-секторіальний оператор, для якого $a=0$, і при деякому $\alpha\in(0,1]$ інтеграл $\int_1^{+\infty}G(t)t^{-\alpha}dt$ збіжний. Тоді задача Коші (1) для кожної функції $y\in C([0,R],B)$, яка є локально-гельдеровою на

$(0,R)$, причому показник степеня на кожному проміжку гельдеровості не менший α, має єдиний розв'язок $x \in C^1((0,R],B) \cap C([0,R],B)$. Цей розв'язок можна подати у вигляді (2).

Доведення. Аналогічно доведенню теореми 1 показуємо, що не зменшуючи загальності можна вважати, що $y(0) = \overline{0}$ і інтеграл в формулі (2) збігається та задає неперервну функцію. Також використаємо введені вище функції z_1 та J.

Зафіксуємо $t_0 \in [0,R]$ і позначимо $[b,d]$ відрізок, для якого $t_0 \in (b,d)$, і на якому функція y гельдерова з деякими показниками L,γ. Оберемо також довільну точку $c \in (b,t_0)$. Оскільки $\left\|T(T-\mu I)^{-1}\right\| = \left\|I + \mu(T-\mu I)^{-1}\right\| \le 1 + M|\mu|G(|\mu|),\ \mu \in \Gamma$, то, враховуючи лему 4,

$$\left\|T(T-\mu I)^{-1}\left(z(t,\mu) - z_0(t,\mu)\right)\right\| \le L_1|\mu|^{-1-\gamma}\left(1 + M|\mu|G(|\mu|)\right),\ \mu \in \Gamma,\ t \in [c,d].$$

Ця оцінка показує, що $J \in C([c,d],B)$ і цю функцію можна інтегрувати під знаком інтеграла. Тому, враховуючи означення z_1 і рівність (3), маємо:

$$\begin{aligned}
&\int_c^t J(s)\,ds = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma T(T-\mu I)^{-1}\left(\int_c^t \left(z(s,\mu) - z_0(s,\mu)\right)ds\right)d\mu = \\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma T(T-\mu I)^{-1}\left(\int_0^c \left(z(s,\mu) - z_0(s,\mu)\right)ds - \int_0^t \left(z(s,\mu) - z_0(s,\mu)\right)ds\right)d\mu = \\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma T(T-\mu I)^{-1}\left(-\mu^{-1}z(c,\mu) + z_1(c,\mu) + \mu^{-1}z(t,\mu) - z_1(t,\mu)\right)d\mu = \\
&= -x(c) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma T(T-\mu I)^{-1}z_1(c,\mu)\,d\mu + x(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma T(T-\mu I)^{-1}z_1(t,\mu)\,d\mu,\ t \in [c,d].
\end{aligned} \tag{6}$$

Оскільки

$$\left\|T(T-\mu I)^{-1}(z_1)'_t(t,\mu)\right\| = \left\|T(T-\mu I)^{-1}\mu^{-1}e^{-\mu t}y(t)\right\| \le \left(1 + M|\mu|G(|\mu|)\right)|\mu|^{-1}e^{-c\operatorname{Re}\mu}\sup_{t\in[0,R]}\|y(t)\|,\ \mu \in \Gamma, t \in [c,d],$$

то останній інтеграл в (6) можна диференціювати під знаком інтеграла, отримуючи неперервну функцію. Звідси

$$x'(t) = -J(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma T(T-\mu I)^{-1}\mu^{-1}e^{-\mu t}y(t)\,d\mu,\ t \in [c,d],$$

причому $x' \in C([c,d],B)$.

З довільності $t_0 \in (0,R]$ випливає, що $x \in C^1((0,R],B)$.

Теорему 2 доведено.

4. Висновки

В роботі доведено існування неперервно диференційовних на відрізку або півінтервалі розв'язків задачі Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі за деяких умов на праву частину. На відміну від вже відомих наведені умови не містять вимоги належності значень правої частини до області визначення степенів операторного коефіцієнта.

1. *Городний М.Ф., Чайковский А.В.* Об одном обобщении понятия секториального оператора // Мат. сборник. – 2006, №3. 2. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М. 1970. 3. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М., 1985. 4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М., 1972.

Надійшла до редакції 25.11.09

УДК 517.91

А. Бондаренко, О. Пришляк, д-р фіз.-мат. наук

ВІДОБРАЖЕННЯ ТРИВИМІРНИХ МНОГОВИДІВ

Розглядаються функції Морса на замкненому тривимірному многовиді в коло, для яких рід прообразу регулярної точки не перевищує 1. Для таких функцій з чотирма критичними точками дана топологічна класифікація.

We consider Morse functions on closed 3-manifolds into circle when genus of regular point's preimage less or equal to 1. The topological classification of such functions with four critical points is obtained.

1. Вступ

Топологічною класифікацією функцій Морса на поверхнях займались В.В.Шарко, О.О.Пришляк, А.Т.Фоменко, А.В.Болсінов та інші. Важливим інваріантом функцій Морса є графи, введені Рібом і Кронродом [7].