$(0,R)$, причому показник степеня на кожному проміжку гельдеровості не менший α, має єдиний розв'язок $x \in C^1((0,R],B) \cap C([0,R],B)$. Цей розв'язок можна подати у вигляді (2).

Доведення. Аналогічно доведенню теореми 1 показуємо, що не зменшуючи загальності можна вважати, що $y(0)=\overline{0}$ і інтеграл в формулі (2) збігається та задає неперервну функцію. Також використаємо введені вище функції z_1 та J.

Зафіксуємо $t_0 \in [0,R]$ і позначимо $[b,d]$ відрізок, для якого $t_0 \in (b,d)$, і на якому функція y гельдерова з деякими показниками L,γ. Оберемо також довільну точку $c \in (b,t_0)$. Оскільки $\left\|T(T-\mu I)^{-1}\right\| = \left\|I+\mu(T-\mu I)^{-1}\right\| \le 1+M|\mu|G(|\mu|),\ \mu\in\Gamma$, то, враховуючи лему 4,

$$\left\|T(T-\mu I)^{-1}\left(z(t,\mu)-z_0(t,\mu)\right)\right\| \le L_1|\mu|^{-1-\gamma}\left(1+M|\mu|G(|\mu|)\right),\ \mu\in\Gamma,\ t\in[c,d].$$

Ця оцінка показує, що $J \in C([c,d],B)$ і цю функцію можна інтегрувати під знаком інтеграла. Тому, враховуючи означення z_1 і рівність (3), маємо:

$$\begin{aligned}
&\int_c^t J(s)\,ds = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma T(T-\mu I)^{-1}\left(\int_c^t \left(z(s,\mu)-z_0(s,\mu)\right)ds\right)d\mu = \\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma T(T-\mu I)^{-1}\left(\int_0^c \left(z(s,\mu)-z_0(s,\mu)\right)ds - \int_0^t \left(z(s,\mu)-z_0(s,\mu)\right)ds\right)d\mu = \\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma T(T-\mu I)^{-1}\left(-\mu^{-1}z(c,\mu)+z_1(c,\mu)+\mu^{-1}z(t,\mu)-z_1(t,\mu)\right)d\mu = \\
&= -x(c)-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma T(T-\mu I)^{-1}z_1(c,\mu)\,d\mu + x(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma T(T-\mu I)^{-1}z_1(t,\mu)\,d\mu,\ t\in[c,d].
\end{aligned} \tag{6}$$

Оскільки

$$\left\|T(T-\mu I)^{-1}(z_1)'_t(t,\mu)\right\| = \left\|T(T-\mu I)^{-1}\mu^{-1}e^{-\mu t}y(t)\right\| \le \left(1+M|\mu|G(|\mu|)\right)|\mu|^{-1}e^{-c\operatorname{Re}\mu}\sup_{t\in[0,R]}\|y(t)\|,\ \mu\in\Gamma,\ t\in[c,d],$$

то останній інтеграл в (6) можна диференціювати під знаком інтеграла, отримуючи неперервну функцію. Звідси

$$x'(t) = -J(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma T(T-\mu I)^{-1}\mu^{-1}e^{-\mu t}y(t)\,d\mu,\ t\in[c,d],$$

причому $x' \in C([c,d],B)$.

З довільності $t_0 \in (0,R]$ випливає, що $x \in C^1((0,R],B)$.

Теорему 2 доведено.

4. Висновки

В роботі доведено існування неперервно диференційовних на відрізку або півінтервалі розв'язків задачі Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі за деяких умов на праву частину. На відміну від вже відомих наведені умови не містять вимоги належності значень правої частини до області визначення степенів операторного коефіцієнта.

1. *Городний М.Ф., Чайковский А.В.* Об одном обобщении понятия секториального оператора // Мат. сборник. – 2006, №3. 2. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М. 1970. 3. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М., 1985. 4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М., 1972.

Надійшла до редакції 25.11.09

УДК 517.91

А. Бондаренко, О. Пришляк, д-р фіз.-мат. наук

ВІДОБРАЖЕННЯ ТРИВИМІРНИХ МНОГОВИДІВ

Розглядаються функції Морса на замкненому тривимірному многовиді в коло, для яких рід прообразу регулярної точки не перевищує 1. Для таких функцій з чотирма критичними точками дана топологічна класифікація.

We consider Morse functions on closed 3-manifolds into circle when genus of regular point's preimage less or equal to 1. The topological classification of such functions with four critical points is obtained.

1. Вступ

Топологічною класифікацією функцій Морса на поверхнях займались В.В.Шарко, О.О.Пришляк, А.Т.Фоменко, А.В.Болсінов та інші. Важливим інваріантом функцій Морса є графи, введені Рібом і Кронродом [7].

Розглядається деякий замкнений орієнтований многовид M^3 і функція Морса $f: M^3 \to S^1$ на ньому за умови $genus(f^{-1}(s)) \leq 1, s \in S^1$, де точка s регулярна. Згідно цієї умови шаром може бути об'єднання не більше, ніж одного тора T^2 і скінченої кількості сфер S^2. На такому многовиді функція може мати критичні точки двох типів: в них може змінюватись рід поверхні або кількість компонент зв'язності. В критичних точках графа Ріба функції Морса, в яких від тору відділяється сфера, треба дописати матрицю з простору $SL(2,\mathbb{Z})$. До ланок графу, на яких сфера переходить в тор і назад в сферу, треба приписати пару цілих чисел, як до лінзового простору $L(p,q)$, де q можна вважати елементом простору $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Мета роботи – дати пошарову класифікацію таких функцій Морса $f: M^3 \to S^1$, які мають чотири критичні точки.

2. Про число критичних значень функцій Морса

Теорема 1. *Нехай маємо деякий замкнений орієнтований многовид M^3 і функцію Морса $f: M^3 \to S^1$ на ньому. Крім того, $genus(f^{-1}(s)) \leq 1, s \in S^1$, де точка s регулярна. Тоді число критичних точок функції f парне.*

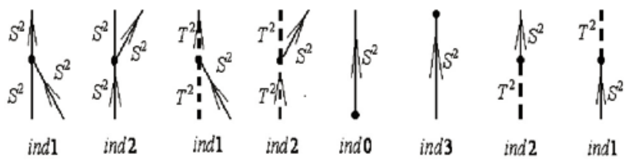
Доведення. Критичні точки поділяються на два типи: при проходженні одних точок змінюється рід поверхні, при проходженні інших – кількість компонент зв'язності. Якщо рухатися по графу, починаючи з деякої фіксованої точки, то після проходження всіх критичних точок ми маємо повернутись до тієї самої точки. Тому для кожної критичної точки, яка змінює рід поверхні, існує точка, яка знову його змінює на початковий, так само як і для кожної критичної точки, яка змінює кількість компонент зв'язності, існує відповідна їй. Отже, кількість критичних точок є парною.

3. Топологічна еквівалентність функцій Морса

Теорема 2. *Функції еквівалентні тоді і лише тоді, коли існує ізоморфізм їх графів, що зберігає типи ребер і їх орієнтацію.*

Доведення. Якщо функції еквівалентні, то графи, що їм відповідають, ізоморфні за побудовою.

Доведемо теорему в зворотному напрямку. Фіксуємо деякий регулярний переріз, з якого починатимемо. Фіксуємо на ньому гомеоморфізм. Ввівши поле градієнта, можемо продовжити цей гомеоморфізм на циліндр. В критичних точках маємо можливості:



де умовно зображено ——— ланки графа, яким відповідають сфери, – — — — ланки графа, яким відповідають тори.

Отже, в критичних точках гомеоморфізм можна визначити однозначно.

Пройшовши всі критичні точки, ми знову повернемось до початкового перерізу. Оскільки матриці, що приписані до графів, однакові, то, повернувшись до початкової точки, зможемо також продовжити гомеоморфізм.

4. Функції Морса з чотирма критичними точками

Для довільного перетину кількість компонент зв'язності на перевищує 4-х. Якщо кількість компонент зв'язності графу перевищує 4, то або він має мати більше, ніж 4 критичні точки, або існує граф, кількість компонент зв'язності довільного перетину якого не перевищує 4, який з ним співпадає. Тому перетин може набувати лише вигляду:

S^2 – перетином є сфера;

$2S^2$ – перетином є дві сфери;

$3S^2$ – перетином є три сфери;

$4S^2$ – перетином є чотири сфери;

T^2 – перетином є тор;

T^2S^2 – перетином є тор і сфера;

$T^2 2S^2$ – перетином є тор і дві сфери;

$T^2 3S^2$ – перетином є тор і три сфери;

При проходженні критичної точки може або змінитися рід поверхні, або змінитися кількість компонент зв'язності перетину. В результаті отримаємо такі можливості переходу:

$S^2 \to T^2, 2S^2;$

$2S^2 \to S^2, 3S^2, T^2S^2;$

$3S^2 \to 2S^2, 4S^2, T^2 2S^2;$

$4S^2 \to 3S^2, T^2 3S^2;$

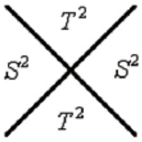
$T^2 \to S^2, T^2S^2;$

$T^2S^2 \to T^2, 2S^2, T^22S^2;$

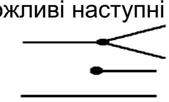
$T^22S^2 \to T^2S^2, T^23S^2, 3S^2;$

$T^23S^2 \to 4S^2, T^22S^2;$

Можна виписати всі можливі варіанти послідовностей перетинів при чотирьох критичних точках, враховуючи, що закінчити треба тим самим перерізом, з якого починали. Запишемо їх умовно наступним чином:



Такий запис означає, що ми починаємо з точки, в якій переріз є сферою, при проходженні першої точки отримаємо тор, після проходження другої знову повертаємось до сфери і т.д. Зрозуміло, що виписуючи всі варіанти, необхідно враховувати, що поворот не змінює вигляду графу. Якщо при проходженні критичної точки змінюється рід поверхні, а отже кількість компонент зв'язності залишається незмінною, то для цієї точки є єдиний варіант зміни графу. Якщо ж ми мали в перерізі одну сферу, яка після проходження критичної точки перетворюється на дві сфери, то можливі наступні варіанти:

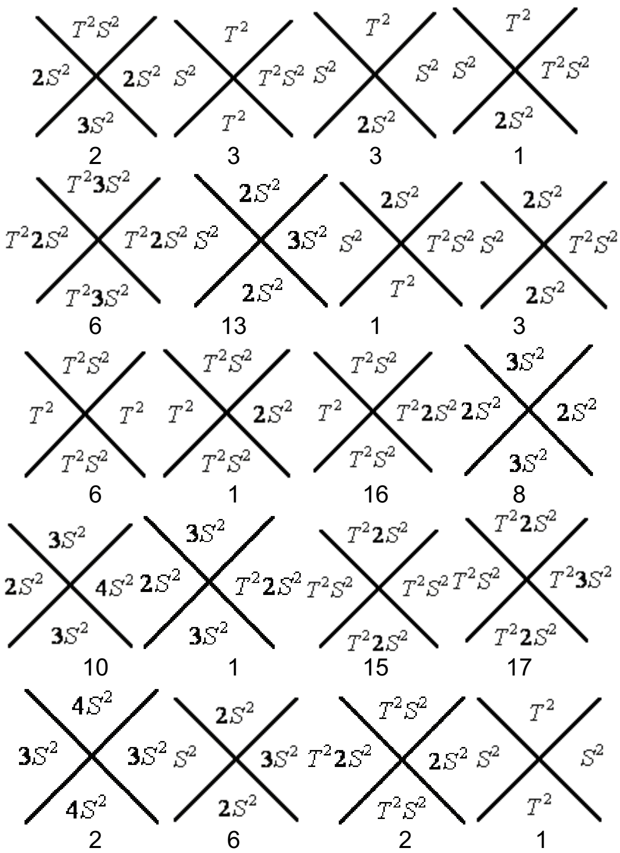

критична точка валентності 3;

критична точка валентності 1.

Важливо не забувати, що отриманий граф має бути зв'язним.

Крім цього треба враховувати, що треба виключити ще і наступні повторення, коли послідовності перерізів різні, а отримані графи будуть однаковими. Наприклад:

З міркувань зв'язності і врахувавши всі можливі повторення, в результаті отримаємо лише наступні варіанти схем, для яких вказано кількість різних графів, що їм відповідають за умови, що графи, утворені один з одного дзеркальним перетворенням вважаються різними.



Під кожною зі схем зазначено кількість різних графів Ріба, що їй відповідає.

Теорема 3. *Якщо $f : M^3 \to S^1$ – функція Морса з чотирма критичними точками, то граф Ріба цієї функції буде ізоморфний графу, якому відповідає одна з виписаних схем.*

5. Висновки

В роботі розглянуті графи Ріба функцій Морса з тривимірного многовиду на коло з чотирма критичними точками. Доведені теореми класифікації таких функцій. Результати, наведені в роботі, можуть бути застосовані до дослідження різних задач фізики, математики, економіки та інших наук, де виникають функції від трьох змінних.

1. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновые системы. Геометрия, топология, классификация. Том. 1. – Ижевск: Изд. Дом "Удмурский университет", 1999. – 444 с. 2. *Борисенко О.А.* Диференціальна геометрія і топологія. Навч. посібник для студ. мех.-мат. фак. ун-тів, що вивч. дисципліну "Диференціальна геометрія і топологія". – Х.:Основа, 1995. – 304 с. 3. *Пришляк О.О.* Теорія Морса: Навч. посібник. – К.: Київський університет, 2002. – 65 с. 4. *Пришляк А.О.* Сопряженность функций Морса на 4-мерных многообразиях // Успехи мат. наук. – 2001. – Т.56, №1. – С. 173-174. 5. *Хирш М.* Дифференциальная топология. Пер. с англ. Д.Б.Фукса. – М.:Мир, 1979. – 280 с. 6. *Шарко В.В.* Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты). – К.: Наук. думка, 1980. – 196 с. 7. *G. Reeb.* Sur les points singuliers d'une forme de Pfa_ compl_ement int_egrable ou d'une fonction num_erique. Comptes Rendus de L'Acad_emie ses Seances, Paris 222 (1946), 847-849.

Надійшла до редколегії 16.11.09

УДК 517.91

А. Котляр, асп.

PPO-ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ФУНКЦІЙ НА БУКЕТІ З *n* КІЛ

Описується один із шляхів класифікації неперервних функцій із скінченою кількістю критичних точок, що задані на букеті з n кіл. Вона здійснюється за допомогою топологічного інваріанту для таких функцій, який був побудований у даній статті.

There describes one of the ways of classification of continuous functions with a finite number of local extremes that are given on the bunch of n circles. This classification of such functions is solvable with the aid of the topological invariant, that was built up in this paper.

1. Вступ

Останнім часом досить часто вивчаються функції на графах, зокрема, топологічні властивості функцій на колах. В даній роботі розглядаються неперервні функції, що задані на букеті з *n* кіл. Задача полягає в тому, щоб знайти умову еквівалентності двох таких функцій.

Букетом з n кіл називається топологічний простір, що складається із n кіл, які дотикаються лише в одній точці і більше спільних точок не мають. У даній статті, в якості прикладу, також наведено більш узагальнений випадок, а саме, коли з'являються сингулярні точки.

Аби функція *f* на даному топологічному просторі була гладкою, необхідно, щоб її звуження на кожне коло простору було гладким. На рис.1 приведено приклад букету з трьох кіл S_1, S_2 та S_3 із єдиною спільною точкою a_0.

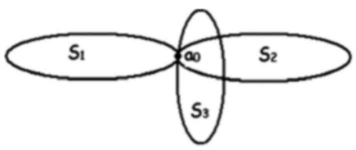


Рис. 1

Задано *n* кіл із відміченими точками (S^1,x_1), (S^1,x_2) ,…, (S^1,x_n) , де $S^1=\{(x,y)\in \mathrm{R}^n : x^2+y^2=1\}$. Розглядається топологічний простір із відміченою точкою $S^1\vee S^1\vee\ldots\vee S^1=(S^1\cup S^1\cup\ldots\cup S^1)/\sim;x_1\sim x_2\sim\ldots\sim x_n$ (позначимо його через S , відмічену точку через a_0). Для даного простору розрізняються кола (S_1^1,a_0) , (S_2^1,a_0) ,…, (S_n^1,a_0) . Зафіксуємо на S деяку орієнтацію. Нехай $f:S\to\mathrm{R}$ деяка неперервна функція із скінченим числом локальних екстремумів. Зауважимо, що точка a_0 буде точкою локального екстремуму функції f на топологічному просторі S лише тоді, коли вона є локальним екстремумом для кожного звуження функції f на кола $S_r^1, r=\overline{1,n}$.

Означення 1. Неперервні відображення $f,g:S\to\mathrm{R}$ називаються *PPO-еквівалентними*, якщо існують гомеоморфізми $h_1:S\to S$ та $h_2:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, які зберігають орієнтацію і для яких $f=h_2^{-1}\circ g\circ h_1$ та $S_r^1=h_1^{-1}[g^{-1}(h_2(f(S_r^1)))], r=\overline{1,n}$.

Виникає необхідність ввести поняття *порядку обходу* кіл, оскільки букети із різними обходами кіл не є еквівалентними, а отже, виникає некоректність при порівнюванні функцій на еквівалентність на різних топологічних просторах. Тільки якщо порядок обходу кіл у букеті співпадає, задача про еквівалентність функцій є коректною і можна будувати інваріанти для заданих на букеті функцій. Цим інваріантом для функції *f*, заданої на букеті з n кіл буде узагальнена змія $G(n_1,m_1)$, який позначається $Sp^n(f)$. Змія $G(n_1,m_1)$ відповідає значенню *f* у локальних екстремумах на колах S_r^1 , де $r=\overline{1,n}$. Оперуючи таким поняттям як порядок обходу, можемо описати яким чином нумеруємо кола. Через S_1^1 позначимо коло, з якого починає рухатись *f*. Через S_i^1 , наступне коло, на якому приймає значення *f* після S_{i-1}^1 , $i=\overline{1,n-1}$ і т.д. Отже, колом S_n^1 буде коло, на якому функція *f* закінчує рух. Побудуємо інваріант $Sp^n(f)$.