$|u_1(t,x)-u_2(t,x)|=\lim_{n\to\infty}|u_1^{(n)}(t,x)-u_2^{(n)}(t,x)|$, де границя є границею збіжності м.н. Надалі ми обиратимемо для всіх n,t,x одну і ту ж модифікацію стохастичного інтеграла і матимемо виконання наступних рівностей $\forall\omega\in\Omega$.

Отже, враховуючи припущення **А1) — А4)** та умови (3), матимемо $|u_1^{(n)}(t,x)-u_2^{(n)}(t,x)|\le\delta(1+t+t^2/2)+$
$$+\frac{L_f}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}|u_1^{(n-1)}(s,y)-u_2^{(n-1)}(s,y)|dyds+\frac{1}{2a}\left|\int_{(x-at,x+at)}d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}(\sigma_1(s,t)-\sigma_2(s,t))ds\right|.$$

Розглянемо окремо інтеграл за стохастичною мірою. Покладемо $G(y)=\int_0^{t-|y-x|/a}(\sigma_1(s,y)-\sigma_2(s,y))ds,\ y\in R$. Аналогічно до міркувань доведення Леми 1, ми будуємо наближення функції $G(y)$ простими та відповідним чином представляємо стохастичний інтеграл, як границю інтегралів від простих функцій. Одержимо
$$\left|\int_{(x-at,x+at)}G(y)d\mu(y)\right|\le\sum_{j\in Z_t^x}\left|\int_{(j,j+1]}G(y)d\mu(y)\right|+\left|\int_{(x-at,[x-at]+1]}G(y)d\mu(y)\right|+\left|\int_{([x+at],x+at)}G(y)d\mu(y)\right|\le\tilde{C}\delta^{\rho},$$
де $\tilde{C}=\tilde{C}(\omega,T,K,\alpha,a)$.

Таким чином, маємо за індукцією
$$|u_1^{(n)}(t,x)-u_2^{(n)}(t,x)|\le\delta(1+t+t^2/2)+\frac{1}{2a}\tilde{C}\delta^{\rho}+\frac{L_f}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}|u_1^{(n-1)}(s,y)-u_2^{(n-1)}(s,y)|dyds\le\delta^{\rho}C(1+t+t^2/2)+$$
$$+\delta^{\rho}CL_f\left(\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}\right)+\ldots+\delta^{\rho}CL_f^{n-1}\left(\frac{t^{2(n-1)}}{(2n-2)!}+\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{t^{2n}}{(2n)!}\right)\le\delta^{\rho}C\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{L_f^k t^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{L_f^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{L_f^k t^{2k+2}}{(2k+2)!}\right)\le$$
$$\le\delta^{\rho}Ce^{T\sqrt{L_f}}\left(1+L_f^{-1/2}+L_f^{-1}\right)\le Q(\omega)\delta^{\rho}.$$

Звідси для всіх $x\in R, t\in[0,T]$ виконується: $|u_1(t,x)-u_2(t,x)|\le Q(\omega)\delta^{\rho}$ м.н.

4. Висновки

Досліджено задачу Коші для хвильового рівняння, породженого загальною стохастичною мірою. Показано існування та єдиність м'якого розв'язку, встановлено його регулярність та неперервну залежність від даних.

1. Радченко Вадим Николаевич. Интегралы по общим случайным мерам / В.Н. Радченко // Труды Института математики НАН Украины. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – Т. 27. – 196 с. – ISBN 966-02-1386-7. 2. Радченко Вадим Николаевич. Об определении интеграла от случайной функции / В.Н. Радченко // Теория вероятностей и ее применения. – Москва: "Наука", 1996. – № 3. – С. 677–682. – ISSN 0040-361X. 3. Радченко Вадим Николаевич. Уравнение теплопроводности и волновое уравнение с общими случайными мерами / В.Н. Радченко // Український математичний журнал. – К.: Ін-т математики НАН України, 2008. – Т. 60, № 12. – С. 1675–1685. – ISSN 1027-3190. 4. Barbu V. Stochastic wave equations with dissipative damping / V. Barbu, G. Da Prato, L. Tubaro // Stochastic Process. Appl. – 2007. – Vol. 117, № 8. – P. 1001–1013. – ISSN 0304-4149. 5. Kwapien S. Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple / S. Kwapien, W.A. Woyczinski. – Boston: Birkhäuser, 1992. – ISBN 0-8176-3572-6. 6. Millet A. On a non linear stochastic wave equation in the plane: existence and uniqueness of the solution / A. Millet, P. Morien // Ann. Appl. Probab. – 2001. – Vol. 11 – P. 922–951. – ISSN 1050-5164. 7. Radchenko V.M. Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure / V.M. Radchenko // Studia Math. – 2009. – Vol. 194, № 3. – P. 231–251. – ISSN 1730-6337.

Надійшла до редколегії 12.04.10

УДК 519.21

З. Вижва, канд. фіз.-мат. наук, А. Вижва, студ.

ПРО СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Розглянуто задачу статистичного моделювання реалізацій стаціонарних випадкових процесів на основі їх спектрального розкладу. Обчислено спектральні коефіцієнти для практично важливих кореляційних функцій випадкових процесів такого типу. Наведено теорему про середньоквадратичну оцінку апроксимації стаціонарних періодичних випадкових процесів частковими сумами ряду. Побудовано модель та сформульовано алгоритм статистичного моделювання реалізацій стаціонарних випадкових процесів.

The problem of statistical simulation of stationary random processes realizations has been considered, which was build on the base of it spectral decomposition. It has been calculated the spectral coefficients for the typical random fields examples. It has been give the theorem about the mean – square estimator of this random fields approximation by the partial sums. It has been constructed the model and statistical simulation of stationary random processes algorithm.

1. Вступ

Методи чисельного моделювання (методи Монте-Карло) випадкових процесів у зв'язку із стрімким розвитком комп'ютерної техніки поширили свої напрямки застосування в різних галузях природничих та соціальних наук, таких, як геологія, метеорологія, радіотехніка, статистична радіофізика, ядерна фізика, соціологія, фінансова математика та інші.

За допомогою метода Монте-Карло можна згенерувати на ком'ютері реалізації випадкових процесів, для яких отримано засобами статистичної обробки необхідну інформацію. А саме, якщо процес гауссівський, то необхідно знати його математичне сподівання та кореляційну функцію. Якщо такі статистичні характеристики відомі для негауссівської випадкової функції, то цього може бути досить при розв'язанні задач, де суттєві лише ефекти, що пов'язані з моментами не вище другого порядку. Також важливо вміти зводити нестаціонарні випадкові процеси до стаціонарних шляхом виділення детермінованої складової – так званого тренда, оскільки запропонований алгоритм розроблений тільки для такого типу процесів.

2. Постановка задачі та її розв'язання

В цій роботі розглядається задача статистичного моделювання реалізацій стаціонарних випадкових процесів, розроблена на основі спектрального розкладу таких полів [9]. Наведено обчислення спектральних коефіцієнтів для деяких практично важливих прикладів кореляційних функцій випадкових процесів, які використовуються у моделюючому алгоритмі.

Нехай $\xi(t)$ $\left(t\in-(\infty,+\infty)\right)$ – дійснозначний стаціонарний в широкому розумінні випадковий процес другого порядку. Стаціонарність в широкому розумінні означає, що:

1) $\mathrm{M}\,\xi(t)=const,\quad \forall t\in(\infty,+\infty)$ (припустимо, що $\mathrm{M}\xi(t)=0$);

2) $\mathrm{M}\ \xi(t_1)\ \xi(t_2)=B\,(t_1,t_2)=\ B\,(t_1-t_2),\quad \forall t_1,t_2\in(\infty,+\infty)$,

тобто, кореляційна функція B(t) випадкового процесу $\xi(t)$ залежить лише від зміни різниці аргументів $\rho=|t_1-t_2|$.

Введемо для випадкового процесу $\xi(t)$ припущення, що він є неперервним в середньому квадратичному. Тоді кореляційна функція $B\,(\rho)$ неперервного в середньоквадратичному стаціонарного дійснозначного процесу $\xi(t)$ допускає спектральний розклад, який випливає із теореми Хінчина [5]:

$$B(\rho)=\ 2\int_0^{\infty}\cos\rho u\ d\,\Phi(u),\tag{1}$$

де $\Phi(u)$ – монотонно неспадна функція, яка називається спектральною функцією стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$. Очевидно, що функція $\Phi(u)$ визначається формулою (1) лише з точністю до довільного постійного доданку, який можна вибрати так, щоб виконувалось співвідношення $\Phi(+\infty)=0$ [6].

Кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу ξ(t) при умові, що $\mathrm{M}\xi(t)=0$ буде збігатися до нуля при $\rho\to\infty$ [7]. Нехай B(ρ) спадає при $\rho\to\infty$ настільки швидко, що

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|B(\rho)\right|d\,\rho<\infty.\tag{2}$$

У такому випадку B(ρ) може бути виражена інтегралом :

$$B(\rho)=\ 2\int_0^{\infty}\cos\rho u\,f(u)\,d\,u.\tag{3}$$

де $f(u)$ обмежена і неперервна функція.

Формула (3), очевидно, являється частковим випадком формули (1). Вона показує, що при умові (2) виконується:

$$\Phi(u)=\int_{-\infty}^{u}f(u')\,d\,u',\tag{4}$$

де $f(u')=\Phi'(u)$.

Звідси видно, що в розглянутому випадку, $\Phi(u)$ – диференційована функція. Функцію $f(u')$ називають спектральною щільністю стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$.

Введемо для випадкового процесу $\xi(t)$ припущення, що він є періодичним. Періодичність випадкового процесу передбачає періодичність його кореляційної функції. Якщо для стаціонарного випадкового процесу його кореляційна функція – неперіодична,то її за певних умов можна періодично продовжити на всю числову вісь [1].

Нехай $\xi(t)=\xi(\varphi)$ $\left(\varphi\in[-T,T]\right)$ – дійснозначний стаціонарний в широкому розумінні 2T-періодичний випадковий процес другого порядку. При виконанні сформульованих вище припущень справедлива теорема про спектральний розклад такого випадкового процесу [2].

Теорема 1. Стаціонарний 2T-періодичний неперервний в середньому квадратичному випадковий процес $\xi(\varphi)$ $\left(\varphi\in[-T,T]\right)$ можна подати у вигляді спектрального розкладу:

$$\xi(\varphi)\ =\ \frac{\xi_0}{2}\ +\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\xi_k\,\cos\frac{k\,\pi\varphi}{T}\ +\ \eta_k\sin\frac{k\,\pi\varphi}{T}\right),\tag{5}$$

де $\{\xi_k\},\{\eta_k\}$ $(k=0,1,2,...)$ – послідовності випадкових величин, що задовольняють умови:

1) $\mathrm{M}\xi_k=\ \mathrm{M}\eta_k=\ 0;\quad \mathrm{M}\ \xi_k\ \eta_r=0,\forall\,k=0,1,2,...;$

2) $\mathrm{M}\ \xi_k\ \xi_r=\ \mathrm{M}\ \eta_k\ \eta_r=\ \delta_k^r\ b_k\quad (k,r\ \geq\ 1),$

де δ_k^r – символ Кронекера,

$$b_k\geq0,\quad \forall k=1,2,...;\quad \sum_{k=1}^{\infty}b_k<+\infty,\tag{6}$$

Зауважимо, що ряд (5) збігається у середньому квадратичному.

Слід зазначити, що коли розглядаються гауссівські випадкові процеси $\xi(\varphi)$, то випадкові величини $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ є взаємнонезалежними і нормально розподіленими.

При цьому, кореляційну функцію $B(\varphi)$ випадкового процесу $\xi(\varphi)$ можна подати у вигляді розкладу, який є спектральним розкладом кореляційної функції:

$$B(\varphi) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\frac{k\pi\varphi}{T}, \tag{7}$$

де коефіцієнти b_k $(k = 0, 1, 2, ...)$ називаються спектральними коефіцієнтами. Такі коефіцієнти можна виразити через кореляційну функцію (враховуючи її парність) випадкового процесу $\xi(\varphi)$ формулою:

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T B(\varphi)\cos\frac{k\pi\varphi}{T}\,d\varphi. \tag{8}$$

Також можна вивести вираз для спектральних коефіцієнтів у вигляді інтегралу від спектральної щільності $f(u)$. Для цього підставимо замість $B(\varphi)$ в формулу (8) вираз (4) і отримаємо наступний кратний інтеграл:

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^T\int_0^{\infty} cos(\varphi u)\, f(u)\,du\,\cos\frac{k\pi\varphi}{T}\,d\varphi.$$

Поміняємо порядок інтегрування в цьому виразі та отримаємо:

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\infty}\left[\int_0^T cos(\varphi u)\,cos\frac{k\pi\varphi}{T}\,d\varphi\right] f(u)\,du.$$

Обчисливши інтеграл в квадратних дужках, отримаємо:

$$b_k = 2\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin(Tu-k\pi)}{(Tu-k\pi)} + \frac{\sin(Tu+k\pi)}{(Tu+k\pi)}\right] f(u)\,du, \quad u^2 \neq \left(\frac{k\pi}{T}\right)^2 (k = 0, 1, 2, ...). \tag{10}$$

Це – вираз для обчислення спектральних коефіцієнтів b_k $(k = 0, 1, 2, ...)$ стаціонарного 2T-періодичного випадкового процесу $\xi(\varphi)$, коли відома його спектральна щільність $f(u)$

Формули (8) та (10), у якій спектральні коефіцієнти виражаються через кореляційну функцію $B(\varphi)$ або спектральну щільність $f(u)$ випадкового процесу $\xi(\varphi)$, використовуються для обчислення спектральних коефіцієнтів b_k $(k = 0, 1, 2, ...)$ для конкретних прикладів кореляційних функцій випадкових процесів. Потрібно відзначити, що не завжди вдається знайти явний аналітичний вигляд цих коефіцієнтів. Тому саме в таких випадках, коли виникають наведені вище труднощі, в цій статті пропонується використовувати чисельне значення інтегралів (6) на прикладі кореляційної функції типу гауссівської кривої.

Далі розглядаються приклади кореляційних функцій періодичних стаціонарних випадкових процесів, які мають широке застосування в геофізиці та інших геологічних науках і науках про Землю. Слід відзначити, що їх перелік можна значно розширити, якщо розглядати періодичні стаціонарні випадкові процеси, як "звуження" однорідних та ізотропних випадкових полів на площині $\xi(r,\varphi)$ ($r \in R_+$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ – полярні координати точки на площині) на коло радіуса *r*. Деякі приклади випадкових полів на площині наведені в роботах [2 – 4].

Далі наводиться для такого типу функцій спектральні коефіцієнти у явному вигляді, які можна використати з метою статистичного моделювання випадкових процесів, що розглядаються, запропонованим методом. Виведення аналітичних формул для спектральних коефіцієнтів b_k $(k = 0, 1, 2, ...)$ трикутної кореляційної функції, яку періодично продовжено на всю числову вісь, експоненціальної кореляційної функції та експоненціально затухаючої косинусоїди наведено в [5]. Результати обчислень подано в табл. 1.

Розглянемо наступний приклад.

Приклад 1."Білий шум в скінченній смузі частот" [8]. Дуже часто в застосуваннях можна вважати, що процес $\xi(t)$, який розглядається, має постійну спектральну щільність $f(u)$ на деякому відрізку, тобто:

$$f(u) = \begin{cases} f_0, & |u| \le \Omega, \\ 0, & |u| > \Omega. \end{cases} \tag{11}$$

Відповідна їй кореляційна функция $B(\varphi)$, очевидно, має вигляд

$$B(\rho) = \int_{-\Omega}^{\Omega} f_0 \exp(i\rho u)\,du = 2 f_0 \frac{\sin\Omega\rho}{\rho} \quad \Omega > 0, \quad f_0 > 0. \tag{12}$$

В практичних застосуваннях до геологічних задач часто зустрічається у модель стаціонарних випадкових процесів, яка має назву "кардинальний синус" [10]. Наведена вище кореляційна функція (12) відноситься до сімейства Бесселя (при значенні параметра n= 1) вигляду:

$$B(\rho) = \frac{J_{n/2}(\alpha\rho)}{(\alpha\rho)^{n/2}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

де $J_\nu(x)$ – функція Бесселя першого роду порядка ν. Це видно із рівності:

$$B(\rho) = \frac{\sin c\rho}{c\rho} = \frac{J_{1/2}(c\rho)}{(c\rho)^{1/2}}, \quad c > 0. \tag{13}$$

За формулою (10) можна обчислити спектральні коефіцієнти для цього прикладу з використанням інтегрального сінуса:

$$si(x) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{\sin u}{u}\, du. \tag{14}$$

Отже, підставимо вираз (11) в формулу (10) і отримаємо вираз: $b_k = 2 f_0 \int_0^{\Omega} \left[\frac{\sin(uT - k\pi)}{uT - k\pi} + \frac{\sin(uT + k\pi)}{uT + k\pi} \right] du,$

звідки, обчисливши інтеграли, отримаємо формулу для спектральних коефіцієнтів кореляційної функції бесселевого типу (12):

$$b_k = \frac{2 f_0}{T} \left[si\,(\Omega T - k\pi) + si(\Omega T + k\pi) + \pi \right] \ \left(k = 0, 1,\ 2, ... \right). \tag{15}$$

Приклад 2. В геології часто знаходять використання кореляційні функції, які називаються Гауссівськими кривими. Вони задаються формулою:

$$B(\rho) = C \exp\{-a\rho^2\}, \quad a > 0. \tag{16}$$

Відповідна спектральна щільність f(u) для цих кореляційних функцій випадкових процесів має вигляд:

$$f(u) \ = \ \frac{C}{2\sqrt{\pi\, a}} \ \exp\left\{ -\frac{u^2}{4a} \right\}, \quad u \in R^1.$$

Цікавою особливістю такої функції є те, що така кореляційна функція $B(\rho)$ та відповідна їй спектральна щільність $f(u)$ мають однакову форму, тобто їх графіки відрізняються лише вибором масштабів вздовж осей координат.

Для Гауссівської кривої спектральні коефіцієнти в явному аналітичному вигляді не вдається знайти. Тому в якості спектральних коефіцієнтів b_k $(k = 0, 1, 2, ...)$ пропонується використовувати чисельне значення інтеграла:

$$b_k = f(a,k) = \frac{2}{T} C \int_0^T exp(-a\varphi^2)\cos\frac{k\pi\varphi}{T}\, d\varphi.$$

Було проведено аналітичне дослідження засобами пакета програм MathCad залежності значень спектральних коефіцієнтів $b_1, b_2, \ldots, b_5$, які відповідають кореляційній функції $B(\rho)$ експоненціального типу- Гауссівської кривої (16) від величини параметра $a. > 0$. На наступному рис. 1 зображено графіки такої залежності, що свідчить про спадання значень спектральних коефіцієнтів до нульового рівня із ростом їх номера к та зменшення їх різниці із збільшенням значення параметра *a.*

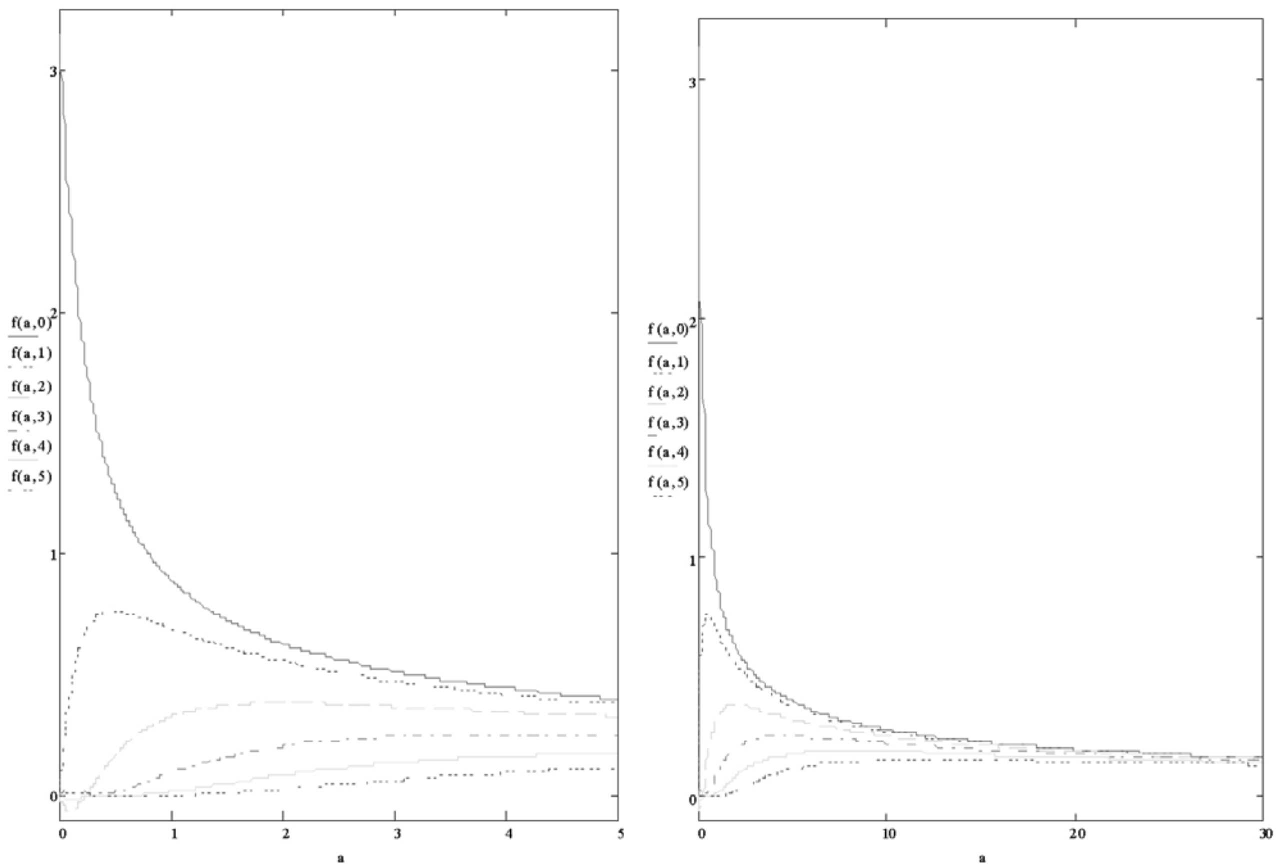

Рис. 1. Графіки залежності k-тих спектральних коефіцієнтів f(a,k) гауссівської кореляційної функції від параметра *a*
(ліворуч – параметр а змінюється від 0 до 5, праворуч – параметр а змінюється від 0 до 30)

Таке дослідження можна використовувати для застосування до вирішення практичних задач, що пов'язані із необхідністю генерування комп'ютерними засобами реалізацій стаціонарних гауссівських випадкових процесів, які задаються своїми статистичними характеристиками: математичним сподіванням та кореляційною функцією типу Гауссівської кривої. Продемонстрована на рис. 1 збіжність значень спектральних коефіцієнтів $b_k = f(a,k)$ $(k = 0,1,2,...5)$ до нуля із ростом їх номера к дає можливість використовувати наведений нижче алгоритм та модель із достатньо високою адекватністю та точністю.

Приклад 3. На практиці [7] зустрічається модель стаціонарних випадкових процесів, яка має вигляд косинусоїди, а саме:

$$B(\rho) = c\cos\omega\rho, \quad c>0, \quad \omega>0. \tag{17}$$

Відповідна їй спектральна щільність $f(u)$ зображується наступною формулою:

$$f(u) = \frac{c}{2}\left\{\delta(u+\omega) + \delta(u-\omega)\right\}, \quad u \in R^1,$$

де $\delta(u)$ – δ-функція, поява якої пов'язана з тією обставиною, що кореляційна функція (17) не затухає на нескінченності.

Обчислимо спектральні коефіцієнти b_k $(k = 0,1,2,...)$ для кореляційної функції $B(\varphi)$ типу косинусоїди. Для цього скористаємось виразом (8) при Т=π/2, звідки маємо:

$$b_k = \frac{4}{\pi}C\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\omega\varphi\cos 2k\varphi\, d\varphi.$$

Обчисливши цей інтеграл, отримаємо наступний вираз для спектральних коефіцієнтів b_k :

$$b_k = \frac{2}{\pi}C\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}(\omega-2k)}{(\omega-2k)} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}(\omega+2k)}{(\omega+2k)}\right], \omega^2 \ne 4k^2 (k = 0,1,2,...). \tag{18}$$

Таблиця 1. **Кореляційні функції, спектральні щільності та відповідні спектральні коефіцієнти стаціонарних випадкових процесів**

N	$\boldsymbol{B}(\rho)$	$\Phi(\lambda)$	$\boldsymbol{b_k(r)}$
1	Трикутна двопарамет- рична (T≥a>0) $\begin{cases} 1 - \dfrac{\lvert t-2kT\rvert}{a}, & \lvert t-2kT\rvert \le a, \\ 0, & \lvert t-2kT\rvert > a, \end{cases}$	$\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin^2(Tau/2)}{au^2}$, $u \in R^1$.	$b_0 = \dfrac{a}{T}\left(1 - \dfrac{a}{2}\right)$, $b_k = \dfrac{1}{k\pi}\left[\sin\dfrac{k\pi a}{T}(1-a) + \dfrac{l}{k\pi}\left(1-\cos\dfrac{k\pi a}{T}\right)\right]$ $k = 1, 2,...$
1а	Трикутна двопараметрична (T=1, a=1)	$\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin^2(u/2)}{u^2}$, $u \in R^1$.	$b_0 = \dfrac{1}{2}$, $b_k = \begin{cases} \dfrac{4}{(k\pi)^2}, & k = 2m-1, (m \in N) \\ 0, & k = 2m. \end{cases}$
1б	Трикутна двопараметрична (T=2, a=1)	$\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin^2(u)}{u^2}$, $u \in R^1$.	$b_0 = \dfrac{1}{4}$, $b_k = \begin{cases} \dfrac{2}{(k\pi)^2}, & k = 2m-1, (m \in N) \\ \dfrac{4}{(k\pi)^2}, & k = 2(2m+1), \\ 0, & k = 4m. \end{cases}$
1в	Трикутна двопараметрична (T=3, a=1)	$\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin^2(3u/2)}{u^2}$, $u \in R^1$.	$b_0 = \dfrac{1}{6}$, $b_k = \begin{cases} \dfrac{1}{(k\pi)^2}, & k = 2m-1, (m \in N), \\ \dfrac{3}{(k\pi)^2}, & k = (2+6m)\vee(4+6m), \\ \dfrac{4}{(k\pi)^2}, & k = 3+6m, \\ 0, & k = 6m. \end{cases}$

Закінчення табл. 1

N	$B(\rho)$	$\Phi(\lambda)$	$b_k(r)$
1г	Трикутна двопараметрична (T=2π, a=1)	$\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2(\pi u)}{u^2}$, $u \in R^1$.	$b_0 = \frac{1}{2\pi}$, $b_k = \frac{1-\cos k}{(k\pi)^2}$, $k=1,2,...$
2	На S2 (одиничне коло) $\frac{c}{2}\;\frac{1-q^2}{1-2q\cos\frac{\varphi\pi}{T}+q^2}$.		$b_k = c q^k$, $q \in (0,1)$, $c>0$.
3	Експоненціальна $\exp\{-c\rho\}, c>0, n\ge 1$	$\frac{c}{\pi}\;\frac{1}{u^2+c^2}$, $n=1$	$\frac{c\,[(-1)^{k+1}\;e^{-c\pi}+1]}{c^2+k^2}$
4	Експоненціально затухаюча косинусоїда $c\,e^{-a\rho}\cos T\rho, c>0, a>0,$ $T>0,\quad \rho\in[0,1]$	$\frac{ca}{2\pi}\left\{\frac{1}{(\lambda+T)^2+a^2}+\frac{1}{(\lambda-T)^2+a^2}\right\}$	$\frac{a}{2}\left(1-e^{-a\pi}(-1)^{k+1}\right)\left[\frac{1}{a^2+(k+1)^2}+\frac{1}{a^2+(1-k)^2}\right]$ $c=1,\quad \rho=1,\quad T=\pi$
5	Косинусоїда $C\cos T\rho$, $C, T>0,\ \rho\in[0,+\infty]$	$\begin{cases} 0, & \lambda\le -T,\\ C/2, & -T<\lambda\le T,\\ C, & \lambda>T\end{cases}$	$\frac{C}{4}\left(\frac{\sin(T-2k)\pi}{(T-2k)}+\frac{\sin(T+2k)\pi}{(T+2k)}\right)$
6	Бесселевого типу $\frac{J_{1/2}(c\rho)}{(c\rho)^{1/2}}, c>0.$	$f(u) = \begin{cases} f_0, & \lvert u\rvert\le\Omega,\\ 0, & \lvert u\rvert>\Omega.\end{cases}$	$\frac{2f_0}{T}\left[si(\Omega T-k\pi)+si(\Omega T+k\pi)+\pi\right]$ де si(x) – інтегральний синус

Отримані спектральні коефіцієнти можна використовувати для статистичного моделювання випадкових стаціонарних гауссівських випадкових процесів, які задаються своїми статистичними характеристиками: математичним сподіванням та кореляційною функцією (або спектральною щільністю) за алгоритмом, сформульованим у роботі [3]. Наведемо його.

За статистичну модель випадкового поля, що розглядається, приймається часткова сума ряду (5) вигляду:

$$\xi_N(\varphi) = \frac{\xi_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(\xi_k\cos\frac{k\pi\varphi}{T} + \eta_k\sin\frac{k\pi\varphi}{T}\right),\quad (N\in\mathrm{N}) \tag{19}$$

де $\{\xi_k,\ k=0,1,2,...,N\}$ та $\{\eta_k,\ k=0,1,2,...,N\}$ – послідовності некорельованих гауссівських випадкових величин з нульовим математичним сподіванням та дисперсіями :

$$D\xi_0 = b_0,\quad D\xi_k = D\eta_k = b_k,\quad k=0,1,2,...\,\mathrm{N}, \tag{20}$$

де N – деяке натуральне число.

При цьому значення числа N визначається за допомогою нерівності, яка є оцінкою наближення випадкового процесу $\xi(\varphi)$ частковими сумами $\xi_N(\varphi)$ в середньому квадратичному. Таке число має відповідати наперед заданому як завгодно малому числу ε – точності наближення. Згадана нерівність отримана в роботі [3] (твердження наведено далі).

Теорема 2. Нехай D_m – клас функцій, які мають наступні властивості: для них існують похідні до порядку m–1 включно і похідна m–1 порядку абсолютно неперервна, а m – та похідна інтегровна та обмежена. Припустимо, що кореляційна функція $B(\varphi)$ – 2T- періодичного стаціонарного випадкового процесу $\xi(\varphi)$ належить до класу D_m. Тоді справедлива наступна оцінка середньоквадратичного наближення випадкового процесу $\xi(\varphi)$ частковими сумами (19):

$$\mathrm{M}\left[\xi(\varphi)-\xi_N(\varphi)\right]^2 \le K_m\left(\frac{l}{\pi}\right)^m\frac{N+2(m+1)}{N^m(m-1)},\quad (N\in\mathrm{N},\ m\ge 2), \tag{21}$$

де m – індекс класу функцій D_m, $K_m = \max\limits_{0\le\varphi\le 2T}\left|B^{(m)}(\varphi)\right|$ – максимум m-ї похідної від $B(\varphi)$.

На основі моделі (19) та оцінки (21) можна побудувано алгоритм статистичного моделювання гауссівського стаціонарного випадкового процесу $\xi(\varphi)$.

Алгоритм

1. Визначається значення числа N, відповідно наперед заданому числу ε**,** за допомогою нерівності (21) :

$$K_m\left(\frac{l}{\pi}\right)^m\frac{N+2(m+1)}{N^m(m-1)}\le\varepsilon,\quad (N\in\mathrm{N},\ m\ge 2),$$

де m – індекс класу кореляційної функцій D_m.

2. Обчислюються спектральні коефіцієнти $b_k \quad (k = 0, 1, 2, ..., N)$ для кореляційної функції, що моделюється за відповідною аналітичною формулою з таблиці, або за виразом для інтеграла (8) від кореляційної функції.

Генеруються набори незалежних стандартних гауссівських випадкових величин $\{ \zeta_k, \quad k = 0, 1, 2, ..., N \}$ та $\{ \eta_k, \quad k = 0, 1, 2, ..., N \}$.

3. Обчислюються значення реалізації у вигляді суми при підстановці в неї знайдених за попередніми пунктами величин:

$$\xi_N(\varphi) = \sum_{k=0}^{N} \sqrt{\nu_k \, b_k} \; [\, \zeta_k \cos k\varphi + \eta_k \sin k\varphi \,].$$

4. Знаходиться статистична оцінка для кореляційної функції $B_N(\varphi)$ по отриманій реалізації випадкового процесу $\xi(\varphi)$ (наприклад, за допомогою пакета Statistica) і порівнюється із заданою кореляційною функцією $B(\varphi)$), а також проводиться статистичний аналіз цієї реалізації на адекватність.

Слід відзначити, що наведений алгоритм можна застосувати і до випадкових полів з іншим типом розподілу, а не лише з гауссівським.

За допомогою методів статистичного моделювання реалізацій випадкових процесів вирішена проблема з генерування адекватних даних аеромагнітної зйомки в геофізиці засобами коп'ютера, коли їх неможливо отримати на практиці із заданою детальністю в деяких ділянках. Наведений спосіб моделювання дозволяє із вказаною точністю генерувати значення даних, яких не вистачає, при умові, що результати вимірювань мають властивість стаціонарності, або коли їх можна звести до стаціонарної та детермінованої складових.

3. Висновки

Отримано спектральні коефіцієнти у вигляді аналітичних формул для деяких основних практично важливих кореляційних функцій стаціонарних випадкових процесів, а також наведено спосіб їх обчислення засобами пакета програм MathCad у випадку, коли такі аналітичні формули знайти не вдається. Наведено модель та сформульовано алгоритм статистичного моделювання реалізацій стаціонарних випадкових процесів з використанням цих коефіцієнтів. За допомогою розробленого методу вирішена проблема генерування адекватних даних аеромагнітної зйомки в геофізиці засобами коп'ютера.Це дає можливість із значною економією затрат отримати карти високої кондиційності та проводити дослідження на виявлення магнітних аномалій.

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Физматиз, 1961, 936 с 2. Вижва З.О. Про статистичне моделювання стаціонарних періодичних випадкових процесів (ч. 1) // Вісн. Київ. ун-ту. Математика, Механіка. – 2003. – Вип.10. – С.85-91. 3. Вижва З.О. Про статистичне моделювання стаціонарних періодичних випадкових процесів (ч. 2) // Вісн. Київ. ун-ту. Математика, Механіка.- 2004. – Вип. 11-12. – С.20-24. 4. Вижва З.О. Математичні моделі в природознавстві. Розділ: Статистичне моделювання випадкових процесів та полів у науках про Землю. Навчальний посібник з дисципліни "Математичні моделі в природознавстві" для студентів мех.-мат. ф.-ту/ К.: ВГЛ "Обрії", 2007, 160 с. 5. Вижва З.О., Зражевський О.Г. Про статистичне моделювання випадкових полів на площині //Вісн. Київ. ун-ту. Математика, Механіка. – 2008. – Вип.19-20. – С. 43 – 47. 44. 6. Вижва З.О., Вижва А. С., Демидов В.К. Статистичне моделювання випадкових процесів та двовимірних полів в аеромагнітометрії // Вісн. Київ. ун-ту. Геологія. – 2010. – Вип.17. – С.57-59. 7. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1979 – 408 с.. 7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М., 1971. 8. Яглом А. М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981, 280 с. 9. Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей. – К., 1980. 10. Chiles J.P., Delfiner P. Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty. John Wiley & Sons, Inc. New York, Toronto, 1999, 695 p.

Надійшла до редколегії 24.11.09

УДК 519.21

А. Мороз, асп., Г. Шевченко, канд. фіз.-мат. наук

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ФУНКЦІЇ ВАРТОСТІ АМЕРИКАНСЬКОГО ОПЦІОНУ У МОДЕЛІ ЛЕВІ ПРИ НЕОБМЕЖЕНОМУ РОЗШИРЕННІ ЧАСОВОГО ІНТЕРВАЛУ

У роботі розглянуто функцію вартості $V_T(x)$ Американського опціону у моделі Леві на обмеженому інтервалі, і доведено, що вона збігається до функції вартості $V(x)$ на необмеженому інтервалі. Досліджено швидкість цієї збіжності, і показано, що у випадку, коли момент оптимальної зупинки платіжного зобов'язання є першим моментом досягнення ціновим процесом деякого рівня, швидкість збіжності $V_T(x) \to V(x)$, $T \to \infty$ не менша за експоненційну.

The value function $V_T(x)$ for an American type perpetual contingent claim is considered in a finite interval Lévy model, and it is shown that it converges to the corresponding value function $V(x)$ in the infinite interval model. We consider the rate of this convergence and show that in the case when the optimal stopping time is the first time of crossing a certain level, the rate of convergence $V_T(x) \to V(x)$ is not worse than exponential.

1. Вступ

У даній роботі досліджуються функції вартості для задачі оптимальної зупинки платіжного зобов'язання американського типу на скінченному часовому інтервалі. Для випадку нескінченного горизонту часто вдається повністю описати структуру цін опціонів американського типу і відповідних областей зупинки та продовження спостережень. Ситуація ускладнюється, коли часовий параметр належить обмеженому часовому інтервалу.

Ми розглядаємо безарбітражний ринок з єдиним безризиковим активом та сталою безризиковою відсотковою ставкою, яка дорівнює $q \geq 0$, у випадку дискретного або непервного часу. Нехай $\{X_t, t \in T\}$ – процес з незалежними приростами, що моделює ціновий процес цього активу, $T = \mathbf{Z}^+ = \{0,1,2,...\}$ або $T = \mathbf{R}^+ = [0, \infty)$, $X_0 = x \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$, $\{X_t, t \in T\}$ визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, P)$ з натуральною фільтрацією $\Im_t = \sigma\{X_s, s \leq t\}$, $\Im_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.