Таким чином, ми показали,що $E_1 + E_2 \to 0, \ \ T \to \infty$.

Теорему 2 доведено.

3. Висновки

Розглянуто задачу оптимальної зупинки процесів із незалежними приростами і доведено, що в умовах безарбітражного ринку функцію вартості на скінченному інтервалі можна при виконанні певних умов наблизити функцією вартості на нескінченному інтервалі. Отримано оцінку швидкості цієї збіжності і показано, що у випадку, коли оптимальний момент зупинки є моментом першого виходу цінового процесу на деякий рівень, швидкість збіжності не менша за експоненційну.

1. *Новиков А., Ширяев А.* Об одном эффективном случае решения задачи об оптимальной остановке для случайных блужданий// Теория вероятности и применения. – 2004. – 373–382; 2. *Ширяев А.* Основы стохастической финансовой математки.– М., 2004; 3. *Шевченко Г.М., Мороз А.Г.* Задача оптимальної зупинки для процесів з незалежними приростами// Український математичний вісник. – 2009. – Том 6. – №1. – 126–134; 4. *Novikov A., Shiryaev A.* On a solution of the optimal stopping problem for processes with independent increments// An International journal of Probability and Stochastic processes.– 2007.– Vol. 79.– 393–406; 5. *Schoutens W.* Stochastic processes and orthogonal polynomials.– New–York, 2000; 6. *Darling A., Ligget T., Taylor H.* Optimal stopping for partial sums// The Annals of mathematical statistics. – 1972.– №43.– 1363–1368; 7. *Kyprianou A.* On the Novikov–Shiryaev optimal stopping problem in continuous time// Elect. Comm. In Probability. – 2005.– №10. – 146–154; *8. Protter P.E.* Stochastic integration and differential equations. – Springer. – 2004; *9. Harald Luschgy* Moment estimates for Levy processes// Elect. Comm. In Probab. – 2008. – 13. – 422–434.

Надійшла до редколегії 16.11.09

УДК 532.595

О. Лимарченко, І. Семенова

СОВМЕСТНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО РЕЗЕРВУАРА С ЖИДКОСТЬЮ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ СИЛОВОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

На основі варіаційного алгоритму розглянуто задачу динаміки сумісного руху обмеженого об'єму рідини і резервуару параболічної форми. Досліджено хвильові рухи рідини і рух резервуару. Показано необхідність включення достатньо великої кількості форм коливань рідини в модель.

On the basis of variational algorithm we consider the problem of dynamics of combined motion of liquid bounded volume and reservoir of parabolic shape. Wave motion of liquid and reservoir motion were investigated. The necessity of entraining of sufficiently great number of liquid oscillation modes into model was shown.

1. Вступ

Розглянемо задачу про перехідні процеси при сумісному русі параболічного резервуару і рідини з вільною поверхнею. Припускаємо, що рідина ідеальна однорідна, нестислива і в початковий момент часу вихрові рухи відсутні. В цьому випадку кінематика рідини може бути описана потенциалом швидкостей.

Відомо, що такі задачі є актуальними і активно досліджуються в останні роки. Насамперед слід відзначити праці Г.С. Нариманова, Б.І. Рабиновича, Л.В. Докучаєва, І.О. Луковського, Дж. Майлса, Г. Бауера та інших авторов, включених до оглядів [2, 4-6]. Основну увагу в цих працях приділялося бакам циліндричної форми. Дослідження показали високу ефективність варіаційних методів для таких задач. Вивчення динаміки рідини з вільною поверхнею в нециліндричних баках проводилося в працях Г. Бауера, І.О. Луковського, О.С. Лимарченка, де було зосереджено увагу на необхідності введення недекартової параметризації і складності виконання умов розв'язності задачі. В той же час дотепер задачі про рух резервуарів нециліндричної форми з рідиною є мало дослідженими особливо у випадку сумісного руху системи.

Метою роботи є розробка ефективної нелінійної динамічної моделі системи резервуар параболічної форми – рідина з вільною поверхнею і її апробація на прикладі задачі про хвильовий рух рідини з вільною поверхнею при її сумісному русі з резервуаром, викликаним силовим імпульсним збудженням системи.

2. Метод дослідження

Будемо описувати рух рідини в системі координат, незмінно пов'язаною з резервуаром. Нехай φ – потенціал швидкостей; τ – область, яку займає рідина (τ_0 – незбурена область); $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – зовнішня норрмаль до поверхні; S_0 і S – відповідно незбурена та збурена вільні поверхні рідини; Σ і Σ_0 – збурена і незбурена змочувані границі області τ ($\Delta\Sigma$ – зміна контакту рідини, зумовлена збуренням руху, $\Sigma = \Sigma_0 + \Delta\Sigma$), $\eta(x, y, z, t) = 0$ – рівняння вільної поверхні руху, U – потенціальна енергія зовнішніх сил. Припускаємо рух резервуару поступальним і опишемо його вектором переміщень $\vec{\varepsilon}$.

Для опису руху рідини аналогічно роботам [1, 2, 4, 5] вводимо недекартову параметризацію області рідини τ: $\alpha = \dfrac{r}{f(z)}$; $\beta = \dfrac{z}{H}$. Тут через $r = f(z)$ позначено рівняння твірної порожнини, яке задано в циліндричній системі координат r, θ, z; H – глибина заповнення рідини. Приймаємо що z=0 відповідає незбуреній вільній поверхні рідини S_0. Центр системи координат знаходиться в центрі незбуреної поверхні рідини, вісь *Oz* направлена вгору. Система циліндричних координат (r,θ,z) введеною параметризацією замінюється на нову недекартову (α,θ,β) ($\alpha\in[0,1]$; $\theta\in[0,2\pi]$, причому в незбуреному стані $\beta\in[-1,0]$). В прийнятій недекартовій системі координат (α,θ,β) область рідини набуває циліндричної форми і тепер можна здійснити представлення рівняння вільної поверхні рідини у роз-в'язаному відносно координати β вигляді: $\beta=\frac{1}{H}\xi(\alpha,\theta,t)$. Надалі це дозволяє ефективно застосувати метод збурень і метод Канторовича для побудови нелінійної скінченовимірної моделі динаміки резервуара з рідиною.

Постановка задачі Неймана для рівняння Лапласа про рух рідини в нових змінних набуває вигляду

$$\Delta\varphi=0\,; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}-f'\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=0 \text{ при } r=f(z)\,; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{1}{f^2}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{1}{\alpha^2 f^2}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\underline{\frac{\alpha f'}{f}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial z}}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \text{, при } \beta=\frac{1}{H}\xi(\alpha,\theta,t)\,. \tag{3}$$

Підкреслений доданок виник через нециліндричність області рідини. З точки зору аналітичної механіки математичне формулювання задачі динаміки системи резервуар–рідина з вільною поверхнею являє собою сукупність кінематичних (1)-(3) і динамічних крайових умов. Кінематичні умови повинні розглядатися як механічні в'язі, які накладають обмеження на варіації невідомих при описі механічної системи на основі принципу Гамільтона–Остроградського. При цьому динамічні крайовіі умови випливають з варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського як природні.

Рівняння (1)-(3) по відношенню до варіаційного принципу

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=0\,, \tag{4}$$

де $L=\frac{1}{2}\rho\int_{\tau}(\vec{\nabla}\varphi)^2d\tau+\frac{1}{2}M_p(\dot{\vec{\varepsilon}})^2+\frac{1}{2}\rho g\int_{S_0}\xi^2dS+(M_p+M_f)\varepsilon_z g$ (тут ρ – густина рідини, M_p і M_f маси резервуару і рідини, g – прискорення вільного падіння) предста-вляють сукупність кінематичних в'язей, які для ефективного застосування варіаційних методів слід виклю-чити до розв'язання варіаційної задачі. Для замкненого формулювання задачі треба до (1)-(3) додати ще динамічну крайову умову на вільній поверхні, яка одержується з варіаційного принципу (4),

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2-\vec{\nabla}\varphi\cdot\dot{\vec{\varepsilon}}+g\xi=0 \text{ на } S\,. \tag{5}$$

Задача Неймана має бути доповнена умовами розв'язності, які можуть бути записані у вигляді

$$\int_{\Sigma_0}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\Sigma+\int_{\Delta\Sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\Sigma+\int_{S}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS=0\,. \tag{6}$$

Фізичний зміст умов (6) полягає у збереженні об'єму рідини у її збуреному русі, які мають виконуватися для довільного закону руху. Тому з точки зору аналітичної механіки умови розв'язності слід розглядати як кінематичні в'язі, які треба задовільнити до рішення варіаційної задачі (4). Зауважимо, що перший член в умові (6) є вимогою слабкого задовільнення умови неперетікання на змоченій в незбуреному стані стінки бака, другий член (6) є вимогою неперетікання рідини на певному продовжені стінки бака над вільною поверхнею, куди можуть досягати гребені хвиль, а третій член – вимога збереження об'єму рідини в її збуреному русі. З точки зору аналітичної механіки ці умови повинні виконуватися незалежно, оскільки варіації на різних поверхнях незалежні. Причому задовільнити ці умови слід на етапі побудови розкладів змінних до реалізації варіаційного принципу.

Для успішної побудови нелінійної скінченовимірної моделі динаміки рідини з вільною поверхнею в порожнині обертання слід визначити набір координатних функцій для представлення потенціалу швидкостей рідини. Класична задача про визначення частот і форм коливань рідини має вигляд

$$\Delta\varphi=0 \text{ в } \tau;\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}=0 \text{ на } \Sigma_0;\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\lambda\varphi \text{ на } S_0 \text{, або } \delta I=0 \text{, де } I=\int_{\tau_0}(\vec{\nabla}\varphi)^2d\tau-\lambda\int_{S_0}\varphi^2ds\,. \tag{7}$$

Розв'язок цієї задачі лише частково задовільняє вимогам збереження об'єму рідини (6) і має аналітичну особливість на контурі контракту рідина-газ-резервуар L_0, що в значний мірі суперечить механічному змісту задачі. Зауважимо також, що розв'язок задачі (7) є єдиним з точністю до множника, а тому жодні додаткові обмеження на розв'язок не можна накладати. Тому для рішення нелінійної задачі доцільно відмовитися від класичного формулювання задачі (7) і побудувати наближено систему координатних функцій $\overline{\psi}_i$, близьких до розв'язків задачі (7) ψ_i з відповідними параметрами $\overline{\lambda}_i$ і λ_i. При цьому в силу (7) ці функції додатково мають уточнено задовільняти умові неперетікання на $\Delta\Sigma$.

Для реалізації цієї задачі використовуємо два прийоми: ітераційне уточнення розв'язку задачі на власні значення для покращення точності розв'язку і метод допоміжної області для послаблення впливу особливої точки на контурі і виконання умов неперетікання на продовженні стінок резервуару [1-3]. Для різних форм баку використовуються розклади по гармонічним поліномам, які враховують геометрію порожнини. Застосування цих методів [1-3] дозволило одержати розв'язок задачі про визначення координатних функцій $\overline{\psi}_i$, які з точністю до $10^{-6}-10^{-5}$ задовільняють умовам неперетікання на межі Σ_0, проте, що найважливіше, ці розв'язки з точністю до 10^{-3} задовільняють умови неперетікання на стінках резервуара вище рівня незбуреної вільної поверхні $\Delta\Sigma$, що в 500–1000 разів точніше, ніж розв'язки класичної задачі ψ_i [3].

Розклади шуканих змінних збурення вільної поверхні рідини ξ і потенціалу швидкостей φ аналогічно роботам [1, 2] подамо у вигляді

$$\xi = \overline{\xi}(t) + \sum_i a_i \overline{\psi}_i(\alpha) T_i(\theta);\ \varphi_0 = \sum_i b_i \psi_i(\alpha,\beta) T_i(\theta),\ \text{де}\ \overline{\psi}_i(\alpha) = \left.\frac{\partial \psi_i}{\partial z}\right|_{\beta=0}, \tag{8}$$

$T_i(\theta)$ – тригонометричні функції. Координатні функції для зображення потенціалу швидкостей рідини $\psi_i(\alpha,\beta)$ є гармонічними і згідно вимог умов розв'язності (1)–(4), уточнено задовільняють вимогу неперетікання на змоченій границі Σ, яка складається з незбуреної межі Σ_0 і її певного продовження $\Delta\Sigma$, до якого піднімаються гребені хвиль.

На відміну від випадку циліндричної області розклади змінних включають член $\overline{\xi} = \overline{\xi}(t, a_j)$, який визначається з вимоги збереження об'єму рідини в її збуреному русі. Згідно [2], приймаємо амплітудні параметри a_i розкладів збурень вільної поверхні рідини в якості незалежних, а параметри розкладу потенціалу швидкостей будемо розглядати як залежні від a_i: $b_i = b_i(\dot{a}_i, a_k)$.

Подамо $\overline{\xi}$ і b_j у вигляді $\overline{\xi} = \overline{\xi}_1 + \overline{\xi}_2 + \overline{\xi}_3$; $b_j = b^{(1)}{}_j + b_j^{(2)} + b_j^{(3)} + b_j^{(4)}$. Тут цифрові індекси відповідають порядку малості величин. З вимоги збереження об'єму одержимо

$$\overline{\xi}_1 = 0;\ \overline{\xi}_2 = -\frac{f'(0)}{\pi f(0)} \sum_{i,j} a_i a_j \beta_{ij}^{v};\ \overline{\xi}_3 = -\frac{f'(0)^2 + f(0) f''(0)}{3\pi f(0)^2} \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \gamma_{ijk}^{v}. \tag{9}$$

Згідно принципів аналітичної механіки задача вимагає виключення кінематичної крайової умови на вільній поверхні, що зумовлено наявністю вільної поверхні рідини. Виключення кінематичної граничної умови на вільній поверхні проводиться на основі методу Гальоркіна [1, 2]. Залежності $b_i = b_i(\dot{a}_i, a_k)$ є неголономними в'язями

$$b_p^{(1)} = \dot{a}_p;\ b_p^{(2)} = \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \gamma_{ijp}^{o};\ b_p^{(3)} = \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \delta_{ijkp}^{o};\ b_p^{(4)} = \sum_{i,j,k,l} \dot{a}_i a_j a_k a_l h_{ijklp}^{o}. \tag{10}$$

Таким чином параметри $\overline{\xi}$ і b_i як залежні змінні виключаються з розгляду. Це дозволяє перейти до застосування варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського для вільної системи, рух якої визначається незалежними параметрами a_i і $\vec{\varepsilon}$. Дискретна модель будується на основі методу Канторовича аналогічно випадку циліндричного резервуару [2]. На відміну від інших методів дослідження нелінійних задач динаміки тіл з рідиною з вільною поверхнею [4-6] нелінійна дискретна модель (10) має минімальну розмірність. Тепер рівняння руху системи тіло-рідина в амплітудних параметрах a_i і параметрах поступального руху резервуару ε_i можна записати у вигляді [2]

$$\sum_{n=1}^{N} p_{rn}(a_k, t)\ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn}(a_k, t)\ddot{\varepsilon}_{n-N} = q_r(a_k, \dot{a}_l, t),\ \ r = \overline{1, N+3}, \tag{11}$$

p_{rn} і q_r виражаються через алгебраїчні форми від нульового до третього порядків від a_i и $\dot{a}_j$.

Чисельними методами було вивчено приклади руху системи параболічний резервуар–рідина в площині *xOy* з метою підтвердження достовірності одержаною моделлю реально спостережуваних явищ поверхневого хвилеутворення і силової взаємодії резервуара з рідиною. Для обчислень приймалось $M_p = 0{,}2 M_f$; *R*=1м; значення ρ і σ обиралися для води. Розглядалася задача силового збудження коливань в рухомому параболічному баці $r = \sqrt{z+H}$. На рухомий параболічний резервуар діяла в горизонтальному напрямку сила у вигляді прямокутного імпульсу $F_y = 1, \tau = 0{,}5$. На рис. 1 подано картини хвиль на вільній поверхні для різних мометів часу. Профіль хвиль має несиметричний характер, проте властивість перевищення горба хвилі над впадиною проявляється не так сильно, як у випадку циліндра. Рис. 1 ілюструє значний вплив вищих форм коливань. Так, наприклад, в момент часу $t = 3{,}8c$ в процес хвилеутворення значний внесок дає друга антисиметрична форма. Це ще раз підтверджує необхідність при дослідженні перехідних процесів включати до розгляду вищі гармоніки, що відповідають $m = 1$. Розглядалася також задача просторового хвилеутворення, коли на рухомий параболічний бак форми $r = \sqrt{z+H}$ діяв прямокутний імпульс сили в напрямку вісі Oy $F_y = 1, \tau = 0.5$, а в перпендикулярному напрямку рух збурювався початковим відхиленням вільної поверхні за першою антисиметричною формою $a_2 = 0{,}1R$. На Рис. 2 подано картину хвиль на вільній поверхні рідини для однакових моментів часу в перпендикулярних напрямках. Помітно, що збурення вільної поверхні в перпендикулярному напрямку приводить через певний час до росту амплітуд в головному напрямку. Це ще раз підтверджує взаємозалежність всіх форм коливань, які розглядаються в моделі. З графічних результатів помітні головні властивості нелінійного хвилеутворення на вільній поверхні. Зокрема, помітний внесок вищих гармонік спектру, перерозподіл енергії між формами коливань, збудження вісесиметричних форм коливань, які зумовлюють відсутність вузлових ліній і перевищення висоти горба хвилі над глибиною впадини. На горбі хвилі рідина з високою точністю не перетинає стінку резервуару.

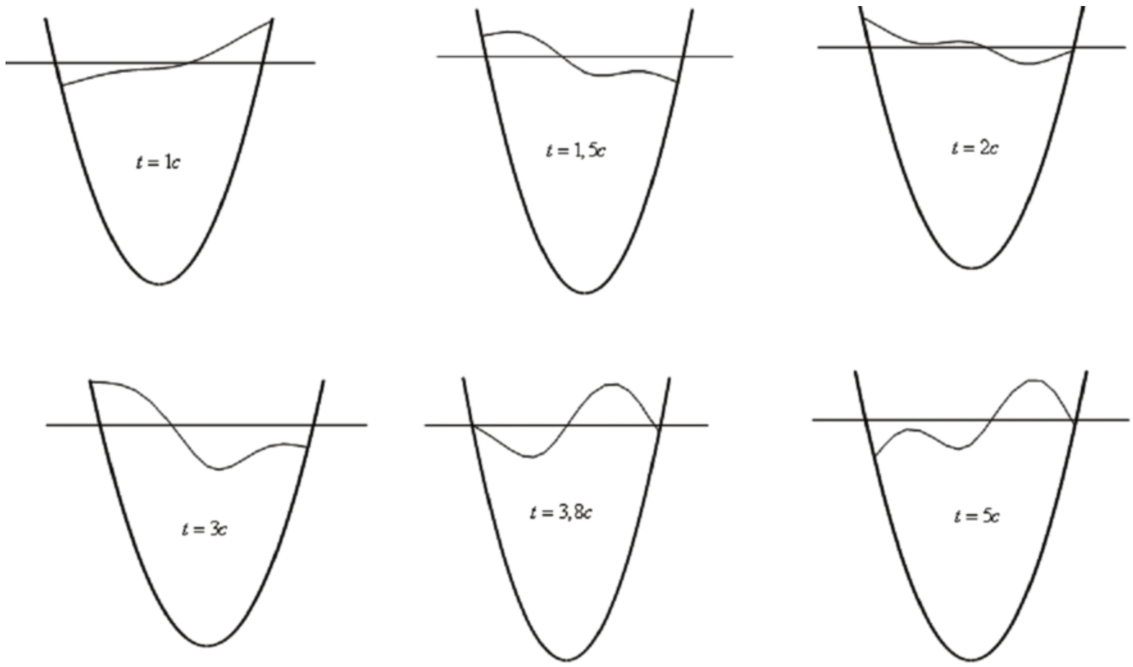

Рис. 1. Картини хвиль при силовому збудженні коливань в рухомому параболічному резервуарі

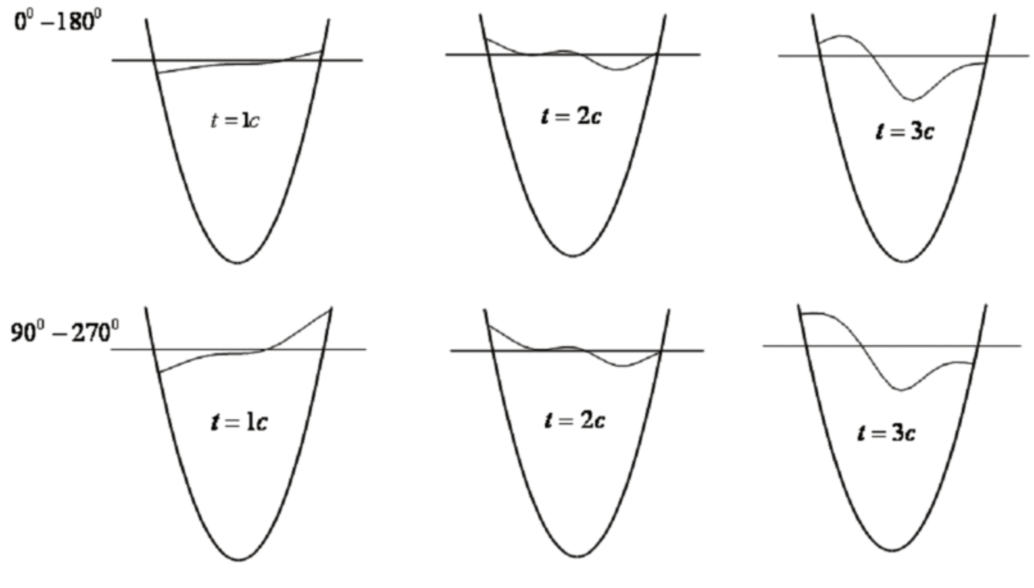

Рис. 2. Просторове хвилеутворення в рухомому параболічному резервуарі в перпендикулярних перерізах

3. Висновки

Розвинуто ефективний метод побудови дискретної нелінійної моделі динаміки резервуарів з рідиною, орієнтовані на дослідження перехідних процесів. Суттєвою особливістю даного методу є аналітичне виключення всіх залежних змінних до розв'язання задачі на етапі задовільнення кінематичних обмежень задачі, включаючи умови розв'язності задачі Неймана для рівняння Лапласа, для довільного числа координатних функцій. Побудовано нелінійну дискретну модель сумісного руху системи резервуар – рідина з вільною поверхнею. Розвинений підхід реалізован на прикладі резевуарів параболічної форми. Вивчено характеристики просторового поверхневого хвилеутворення при силовому імпульсному збудженні руху системи параболоїд – рідина. Встановлено нелінійну взаємозалежність всіх форм коливань, які враховуються в розрахунковій моделі. Показано необхідність включення великого числа координатних функцій в розрахункову модель для достовірного відображення реальних властивостей хвилеутворення.

1. *Лимарченко О.С.* Моделирование динамики конструкций, несущих жидкость со свободной поверхно-стью, Киев, 1991. – 57 с. – (Препринт / АН УССР, Институт математики, 91.16). *2. Лимарченко О.С., В.В. Ясинский* Нелинейная динамика конструкций с жидкостью, Киев: Национальный технический университет Украины "КПИ", 1997. – 348 с. *3. Лимарченко О.С., Семенова И.Ю.* Построение координатных функций для решения нелинейной задачи о колебании жидкости в параболоиде вращения, Комплексний аналіз і течії з вільними границями. Збірник праць Інститут у математики НАН України. – Київ, Інститут математики НАН України, 2006. – Т.3. – № 4. – С. 374 – 388. *4. Луковский И.А.* Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы, Киев, Наукова думка 1975. –135 с. *5. Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью, М., Машиностроение, 1977. – 208 с. *6. Ibrahim R. A.* Liquid sloshing dynamics: theory and applications/ Ibrahim R. A. – Cambridge University Press. – 2005. – 950 p.

Надійшла до редколегії 30.06.10