

Нарешті, на рис. 6-8 представлено розподіли нормального зсуву u_z (вісь z – спрямована перпендикулярно до поверхні напівплощини), нормального σ_z й дотичного τ_{xz} напружень (тут $\omega^* = 72$). З цих рисунків видно, що на відміну від ситуації розтягування матеріалу, де матеріал би вже давно втратив суцільність і зруйнувався, в умовах контактного стискання реальні напруження значною мірою перевершують границю текучості й інші критичні для матеріалу параметри.

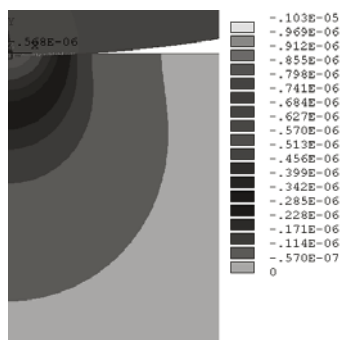


Рис. 6

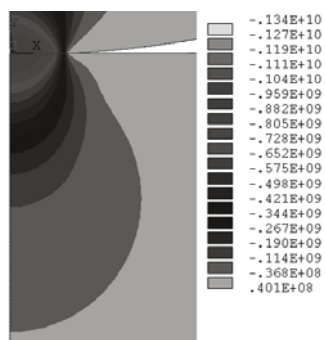


Рис. 7

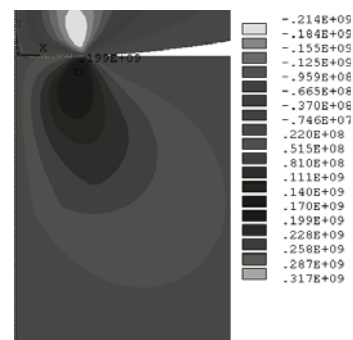


Рис. 8

4. Висновки

У роботі викладені результати 2-вимірною осесиметричного скінченно-елементного аналізу напружено-деформованого стану при вдавлюванні твердої сфери в пружно-пластичну основу. Вивчено розвиток зони пластичної деформації. Із указаною точністю встановлені параметри її ключових станів. Досліджено рівень механічних напружень під індентором.

1. Головин Ю.И., Наноиндентирование и механические свойства твердых тел в субмикромрамах, тонких приповерхностных слоях и пленках // ФТТ. – 2008. – Т. 50. № 12. – С. 2113-2142. 2. Головин Ю.И. и др., Неустойчивое пластическое течение в сплаве Al-3% Mg в процессе непрерывного наноиндентирования // ФТТ. – 2002. – Т. 44. № 7. – С. 1254-1259. 3. Sinclair G.B. et al., Quasi-static normal indentation of an elasto-plastic half-space by a rigid sphere – II. Results // Intern. J. Solids and Structures. – 1985. – Vol. 21. N 8. – P. 865-888. 4. Mata M., O. Casals, J. Alcalá, The plastic zone size in indentation experiments: The analogy with the expansion of a spherical cavity // Intern. J. Solids and Structures. – 2006. – Volume 43, N 20. – P. 5994-6013. 5. Kral E.R.I., Komvopoulos K., Bogy D.B., Elastic-Plastic Finite Element Analysis of Repeated Indentation of a Half-Space by a Rigid Sphere // J. of Appl. Mechanics. – 1993. – Vol. 60. – P. 829-841. 6. Ye N., Komvopoulos K., Effect of Residual Stress in Surface Layer on Contact Deformation of Elastic-Plastic Layered Media // ASME J. Tribol. – 2003. – Vol.125. – P. 692-699.

Надійшла до редколегії 11.26.09

УДК 532.5

О. Хорошилов, канд. фіз.-мат. наук

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЛІВ ТИСКУ У ЗАДАЧАХ АЕРОДИНАМІКИ КОНІЧНИХ ТІЛ ПРИ НАЯВНОСТІ НА ЇХ ПОВЕРХНІ ІНТЕНСИВНОГО ПОВЕРХНЕВОГО МАСОПЕРЕНОСУ

Проведено теоретичне дослідження характеру полів тиску при надзвуковому вісесиметричному обтіканні конічного тіла, з поверхні якого здійснюється інтенсивний рівномірно розподілений вдув маси газу. Доведено, що тиск досягає свого абсолютного максимального значення всередині збуреної області течії на поверхні розподілу двох потоків.

The analytical investigation of character of fields of pressure is conducted at supersonic axial flow over of conical body, through which surface the intensive distributed injection of mass of gas is made. It is proved, that the pressure reaches the absolute maximum rating inside perturbed area of flow on a surface of separation of two flows

1. Вступ

Дослідження інтенсивного масопереносу на поверхні тіл, що знаходяться у високошвидкісному потоці газу, мають значний інтерес як для вдосконалення систем теплозахисту літальних апаратів, так і для розробки засобів керування їх аеродинамічними характеристиками. Одним з підходів до вирішення таких задач є математичне моделювання реальних фізичних явищ за допомогою примусового вдуву маси газу скрізь пористу поверхню тіл. З практичної точки зору найбільший інтерес мають моделі, які описують інтенсивний вдув, коли прикордонний шар відтискується від поверхні тіла, поблизу якої локалізується область течії газу, що вдувається.

2. Постановка задачі

Скрізь оболонку круглого конуса, що знаходиться у надзвуковому потоці, вдувається газ рівномірно вдовж всієї поверхні тіла під деяким довільним кутом β ($0 < \beta < \pi/2$) до неї. Стрибок ущільнення Ω приєднаний до миска конуса, а швидкість газу, який вдувається, є такою, що відповідає режиму сильного вдуву [2], коли газ, що вдувається, відтискує прикордонний шар від пористої поверхні і локалізується поблизу тіла. Прикордонний шар трансформується в тонку зону взаємодії двох потоків газу й у першому наближенні замінюється конічною поверхнею контактного розриву. Схема обтікання наведена на рис. 1, де I – область течії зовнішнього потоку між поверхнею стрибка ущільнення Ω та поверхнею контактної розриву Θ , II – область течії газу, що вдувається, яка обмежена поверхнями контактної розриву Θ і пористого конуса Δ . У випадку надзвукової швидкості газу, що вдувається,

область II буде поділена на дві зони конічною поверхнею σ внутрішнього стрибка ущільнення. У разі вдуву горючої суміші газів і наявності реакції горіння картина течії може бути доповнена конічною поверхнею фронту згорання f , в якому й протікає хімічна реакція.

Введемо циліндричну систему координат (x, r) , яка пов'язана з конусом таким чином, що вісь x спрямована вздовж осі симетрії тіла, а вісь r – по нормалі до неї (рис.1).

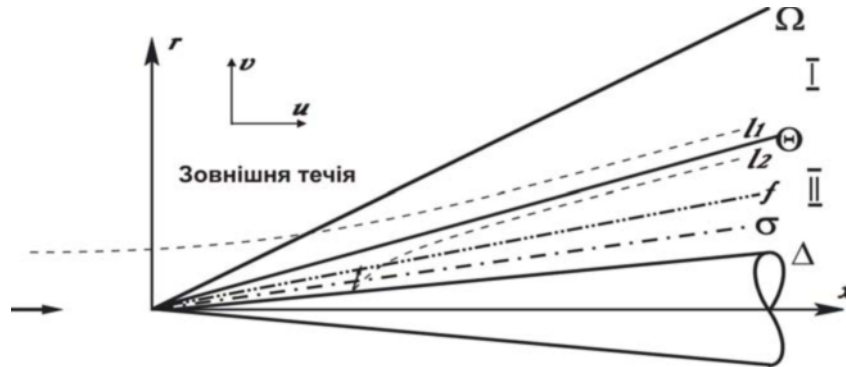


Рис. 1. Загальна схема течії

Течія, як у зовнішній I, так і у внутрішній II областях описується повною системою рівнянь Ейлера:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rpv)}{\partial r} &= 0, \\ u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial r} &= 0, \\ u^2 + v^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} &= C, \end{aligned} \tag{1}$$

де $C = \frac{\kappa(\gamma-1)}{\gamma(\kappa-1)} \frac{R_k T_k}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_\infty^2} = \text{const}$, u, v – складові вектору швидкості потоку у циліндричній системі координат

(x, r) , p – розподіл тиску, ρ – густина, які віднесено до критичної швидкості звуку C_{kp} , подвоєному швидкісному напору $\rho_\infty C_{kp}^2$ та густині ρ_∞ незбуреного потоку відповідно; γ та κ – відношення питомих теплоємностей зовнішнього та внутрішнього потоків, M_∞ – число Маха у зовнішньому потоці.

На поверхні стрибка ущільнення $r = r_\Omega(x)$ мають виконуватися закони збереження маси, імпульсу та енергії, які можна записати у формі умов Ренкіна-Гюгоніо [1].

На поверхні контактної розриву $r = r_\Theta(x)$ виконується умова непротікання та неперервності тиску

$$v_{\Theta,i} = u_{\Theta,i} \frac{dr_\Theta}{dx}, \quad p_{\Theta,I} = p_{\Theta,II}, \tag{2}$$

де індексом $i = I, II$ позначені відповідно зовнішня та внутрішня області течії.

З поверхні конусу $r = r_\Delta(x)$ здійснюється вдув газу із швидкістю $U_\Delta(u_\Delta, v_\Delta)$, для компонентів якої мають місце такі умови:

$$\frac{v_\Delta}{u_\Delta} = \text{tg}\beta; \quad \text{tg}\beta \geq \text{tg}\Delta = \frac{dr_\Delta}{dx}. \tag{3}$$

У випадку надзвукової швидкості вдуву до системи граничних умов мають бути додані співвідношення Ренкіна-Гюгоніо на внутрішньому стрибку ущільнення σ .

Розглянемо задачу у новій системі координат (η, Φ) :

$$\eta = \frac{r}{r_\Theta}, \quad (\eta_\Delta < \eta \leq 1), \quad \Phi = \frac{U_\Theta}{C_{kp}}, \tag{4}$$

де $U_\Theta(u_\Theta, v_\Theta)$ – модуль вектора швидкості на поверхні розподілу.

Зробимо в системі (1) граничний перехід $\frac{d\Phi}{dx} \rightarrow 0$, який обумовлений припущенням про конічність течії, продиференціюємо її та замінимо похідну від u похідними від v, p, ρ .

Тоді система рівнянь набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \rho \left(u + v\eta \frac{dr_\Theta}{dx} \right) \frac{dv}{d\eta} + \left[uv - \left(u^2 + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} \right) \eta \frac{dr_\Theta}{dx} \right] \frac{d\rho}{d\eta} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \eta \frac{dr_\Theta}{dx} \frac{d\rho}{d\eta} + \frac{\rho uv}{\eta} &= 0, \\ \left(v - \eta u \frac{dr_\Theta}{dx} \right) \frac{dv}{d\eta} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\eta} &= 0, \\ \left(v - \eta u \frac{dr_\Theta}{dx} \right) \frac{dS}{d\eta} &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Гранична умова на поверхні розподілу $r = r_\Theta(x)$ матиме вигляд:

$$v_\Theta = u_\Theta \frac{dr_\Theta}{dx}. \tag{6}$$

Використаємо виведені співвідношення для доказу деяких тверджень щодо властивостей полів тиску, які є справедливими для класу конічних течій, що досліджуються.

3. Твердження I про лінії току

Розглянемо закон змінення величини η вздовж довільної лінії току $\eta = \eta(x)$ у області внутрішнього потоку. Тут треба підкреслити, що у випадку дозвукового вдуву уся область течії від поверхні конуса $\eta = \eta_\Delta$ до поверхні розподілу $\eta = 1$ (рис. 2, 3) є зоною, яка містить збурення. Для випадку надзвукового вдуву ми будемо розглядати лише область течії від внутрішнього скачка ущільнення $\eta = \eta_\sigma$ до поверхні розподілу $\eta = 1$.

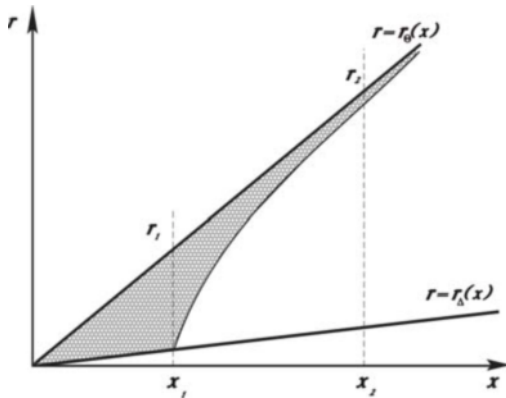


Рис. 2. Трубка току у системі координат (x, r) .

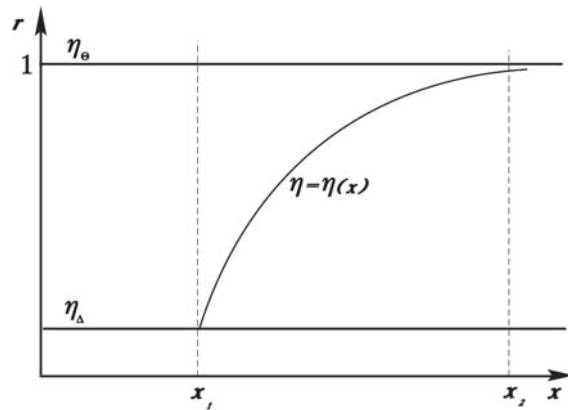


Рис. 3. Трубка току у системі координат (η, Φ) .

Запишемо диференційне рівняння лінії току:

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{r_\Theta} \left(\frac{v}{u} - \eta \frac{dr_\Theta}{dx} \right) \tag{7}$$

Права частина (7) є різницею між кутами нахилу дотичних до лінії току й променів, що виходять з початку координат і розташовані у межах області, що розглядається. Вочевидь, що ця різниця завжди додатна з чого витікає, що η монотонно зростає вздовж лінії току.

Використавши першу умову з (3) та співвідношення (6) і (7) можна показати, що при $x \rightarrow \infty$ величина η асимптотично наближається до деякого граничного значення $\eta_{ГР}$.

Розглянемо трубку току, межами якої є поверхня розподілу з одного боку й довільна лінія току $\eta = \eta(x)$ з іншого (рис. 2, 3). Введемо два поперечних перетини: перший – через точку перетину лінії току, що розглядається, з поверхнею конуса (точка x_1), а другий – на достатньо великій відстані від початку координат (точка x_2).

Застосувавши закон збереження мас до вибраних перетинів, запишемо:

$$r_\Theta^2(x_1) \int_{\eta_\Delta}^1 \rho(\eta) u(\eta) \eta d\eta = r_\Theta^2(x_2) \int_{\eta_{ГР}}^1 \rho(\eta) u(\eta) \eta d\eta. \tag{8}$$

Після деяких перетворень, використавши теорему про середнє, отримаємо:

$$1 - \eta_{ГР} = \frac{r_\Theta^2(x_1) (1 - \eta_\Theta) \rho(\zeta) u(\zeta) \zeta}{r_{ГР}^2(x_2) \rho(\xi) u(\xi) \xi}, \tag{9}$$

де $\eta_{ГР} \leq \xi \leq 1$, $\eta_\Delta \leq \zeta \leq 1$.

З (9) видно, що при фіксованому x_1 і при $x_2 \rightarrow \infty$ величина $\eta_{ГР} \rightarrow 1$. Таким чином, вздовж будь-якої лінії току $\eta = \eta(x)$ у області внутрішньої течії, що збурена, величина η монотонно зростає від η_Δ до 1 із збільшенням x .

4. Твердження II про локальний максимум тиску

Доведемо, що при $\eta = 1$ тиск досягає значення p_m , яке є максимальним. Збуреною областю внутрішньої течії є весь простір, що обмежений поверхнею конуса й поверхнею розподілу. Через відсутність поверхонь розриву лінія току є гладкою кривою, внаслідок чого кут ϑ нахилу дотичної до неї безперервно змінюється у межах від ϑ_Δ до

$\vartheta = \arctg \frac{v_\Theta}{u_\Theta}$, тобто має місце нерівність:

$$0 < \vartheta_\Theta \leq \vartheta \leq \vartheta_\Delta. \tag{10}$$

З рівнянь (5) знаходимо вираз для похідної $\frac{dp}{d\eta}$:

$$\frac{dp}{d\eta} = \frac{\kappa \nu \rho \rho \left(v - \eta u \frac{dr_\Theta}{dx} \right)}{\eta \left\{ p \left[1 + \eta^2 \left(\frac{dr_\Theta}{dx} \right)^2 \right] - \rho \left(v - \eta u \frac{dr_\Theta}{dx} \right)^2 \right\}}. \tag{11}$$

З фізичних міркувань витікає, що права частина (5.11) може дорівнювати нулеві лише у двох випадках: коли

$$v = 0 \tag{12}$$

або

$$v - \eta u \frac{dr_\Theta}{dx} = 0. \tag{13}$$

Але, співвідношення (13) може мати місце лише на поверхні розподілу, де буде умовою непротікання, що ідентична виразу (3).

З співвідношення (12) витікає, що кут ϑ дотичної до лінії $\vartheta = \arctg \frac{v}{u}$ току дорівнює нулеві, а це суперечить

умові (10). Таким чином, похідна $\frac{dp}{d\eta}$ дорівнює нулеві лише на межі області, коли $\eta = 1$, з чого можна зробити висновок, що тиск досягає локального максимального значення на поверхні розподілу.

Доведемо тепер твердження для випадку надзвукового вдуву. При цьому внутрішній потік буде поділений конічним стрибком ущільнення σ на дві зони [3]: незбуреної надзвукової течії між поверхнею конуса Δ і поверхнею σ та дозвукової течії між поверхнями стрибка ущільнення σ і поверхнею розподілу Θ (рис. 1). В сферичній системі координат (рис. 4) це поверхні $r_\Delta(x)$, $r_\sigma(x)$, $r_\Theta(x)$ відповідно.

Як й для випадку дозвукового вдуву, похідна $\frac{dp}{d\eta}$ визначається співвідношенням (11) і може обернутися в нуль лише за умов (12) або (13).

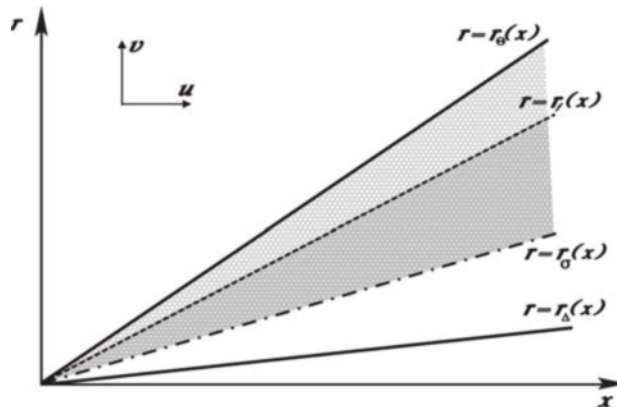


Рис. 4. Схема течії при надзвуковому вдуві

Рівність (13), як й раніш, є умовою непротікання, що виконується на поверхні розподілу.

Розглянемо співвідношення (12). Припустимо, що ця умова виконується десь всередині області збуреної течії, наприклад на поверхні $r = r_f(x)$ (рис. 4), тобто $v = 0$ при $\eta = \eta_f$, причому

$$\eta_{\sigma} < \eta_f = \frac{r_f}{r_{\Theta}} < \eta_{\Theta}. \quad (14)$$

Тоді

$$\left(\frac{dp}{d\eta} \right)_f = \left(\frac{dv}{d\eta} \right)_f = 0. \quad (15)$$

Шляхом перетворень співвідношень (5) можна показати, що рівняння, які містять похідні $\frac{d^2 p}{d\eta^2}$ і $\frac{d^2 v}{d\eta^2}$, при $\eta = \eta_0$ є однорідними. Аналогічне твердження є справедливим відносно рівнянь, які містять похідні n -го порядку $\frac{d^n p}{d\eta^n}$ і

$\frac{d^n v}{d\eta^n}$, якщо $\eta = \eta_f$, а v , $\frac{d^k p}{d\eta^k}$ і $\frac{d^k v}{d\eta^k}$ ($k=1,2,\dots,n-1$) дорівнюють нулеві. У цьому випадку умову існування нетривіального розв'язку для $\left(\frac{d^n p}{d\eta^n} \right)_f$ і $\left(\frac{d^n v}{d\eta^n} \right)_f$ запишемо з допомогою (11) у вигляді

$$p \left[1 + \eta^2 \left(\frac{dr_{\Theta}}{dx} \right)^2 \right] - \rho \left(v - \eta u \frac{dr_{\Theta}}{dx} \right)^2 = 0. \quad (16)$$

Звідки, використавши співвідношення, які пов'язують параметри у сферичній та циліндричній системах координат, отримаємо

$$W^2 = \frac{P}{\rho}, \quad (17)$$

де W – нормальна до конічної поверхні $r = r_f(x)$ складова вектора швидкості. З (17) видно, що W дорівнює локальній швидкості звуку, тобто поверхня $r = r_f(x)$ є характеристичною. Внаслідок цього, беручи до уваги введене раніш припущення $u \geq 0$, можна стверджувати, що усі збурення зносяться від поверхні $r = r_f(x)$ вниз по потоку. Поверхня ця є обгинаючою збурень, тобто – слабким стрибком ущільнень. Таким чином, картина внутрішньої течії така, що збурений потік газу є обмежений з двох боків зонами незбуреної течії (рис. 4), а це суперечить постановці задачі. З цього витікає, що припущення про справедливість умови $v = 0$ всередині внутрішнього потоку не вірно, і тиск, таким чином, досягає локального максимального значення на поверхні розподілу й для випадку надзвукового вдуву.

Далі можна сформулювати два важливих твердження.

5. Твердження III про абсолютний максимум тиску у внутрішньому потоці

Вище було показано, що вздовж довільної лінії току $\eta = \eta(x)$ всередині збуреної області внутрішнього потоку величина η монотонно зростає від значення η_{Δ} до 1 (твердження I) і що тиск у цій же області монотонно збільшується до свого максимального значення при зростанні величини η від η_{Δ} до 1 (твердження II). Це дозволяє зробити висновок про існування абсолютного максимуму тиску у внутрішньому потоці, згідно якому тиск у збуреній області течії завжди досягає абсолютного максимального значення на поверхні розподілу.

6. Твердження про абсолютний максимум тиску

Використовуючи твердження III та приймаючи до уваги, що й у зовнішньому потоці тиск досягає свого абсолютного максимуму на поверхні розподілу [4], можна сформулювати таке твердження:

При надзвуковому віссиметричному обтіканні конічного тіла, з поверхні якого здійснюється рівномірно розподілений вдув маси газу, тиск досягає свого абсолютного максимального значення всередині збуреної області течії на поверхні розподілу двох потоків.

7. Висновки

Проведено теоретичне дослідження характеру полів тиску при надзвуковому віссиметричному обтіканні конічного тіла, з поверхні якого здійснюється інтенсивний (дозвуковий і надзвуковий) рівномірно розподілений вдув маси газу. За допомогою твердження про лінії току доведено твердження про локальний максимум тиску, про абсолютний максимум тиску у внутрішньому потоці газу, що вдувається, і твердження про абсолютний максимум тиску всередині збуреної області течії.

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа, М., 1970, 904с 2.Матвеева Н.С., Нейланд В.Я. Сильный вдув на теле конечной длины в сверхзвуковом потоке// Ученые записки ЦАГИ, 1970, т.1, №5, С.13-22. 3.Эмануель Д. Вдув на пористом конусе с образованием внутренней ударной волны // Ракетная техника и космонавтика. 1970, №10. 4.Fan D., Kapur J. Some Theorems on Taylor-Maccoll Flows// Transactions of the ASME, 1972, series E, v.39, №2, p.287-288.