УДК 417.615

Д. Алєксєєнко, асп.

ПОБУДОВА ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Побудовано асимптотичні формули для періодичного розв'язку системи лінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь у некритичному випадку як за наявності простих коренів характеристичного рівняння, так і у випадку наявності кратного кореня, якому відповідають прості елементарні дільники.

The asymptotic formulas for periodical solution of linear singular perturbed differential equations system has been constructed in non-critical case. Both with the presence of simple eigenvalues and one multiple eigenvalue the latter being corresponded to the simple elementary divisors.

1. Вступ

Питанням побудови періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь було присвячено роботи багатьох вчених. Зокрема, вагомий внесок було зроблено Чезарі Л., Хейлом Дж., Гамбіллом Е. Серед вітчизняних математиків слід відзначити роботи Самойленка А.М., Штокала Й.З., Яковця В.П., Шкіля М.І., Акименка А.М. В роботі [1] використовуються методи послідовних наближень для побудови формул періодичних розв'язків. Цей підхід використано в даній роботі.

2. Постановка задачі

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = A(t,\varepsilon)x + \varepsilon f(t,\varepsilon), \tag{1}$$

де $x = x(t,\varepsilon)$ – n -вимірний вектор, $A(t,\varepsilon)$ – $(n\times n)$ -матриця, $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

Нехай виконуються умови:

1) матриця $A(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ мають розвинення $A(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A_s(t)$, $f(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s f_s(t)$, де функції $A_s(t)$, $f_s(t)$ $(s = 0,1,...)$ – диференційовні до $m+1$ $(m \ge 1)$ порядку включно на відрізку $[0;T]$ і є періодичними з періодом $T > 0$;

2) відповідна однорідна система є некритичною відносно періоду T .

3. Асимптотичне зображення нормальної фундаментальної системи розв'язків системи (3) у випадку простих коренів характеристичного рівняння

Припускатимемо, що також виконується умова

3) корені характеристичного рівняння

$$\det\left\| A_0(t) - \lambda E \right\| = 0 \tag{2}$$

$\lambda_i(t),\ i = \overline{1,n}$, є простими і мають недодатні дійсні частини на відрізку $[0;T]$.

Тоді, здійснивши у системі

$$\varepsilon\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = A(t,\varepsilon)x \tag{3}$$

підстановку

$$x = U_m(t,\varepsilon)y,\ U_m(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s U_s(t), \tag{4}$$

прийдемо до системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon U_m(t,\varepsilon)\frac{dy}{dt} = \left(A(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon) - \varepsilon U'_m(t,\varepsilon)\right)y, \tag{5}$$

де $U'_m(t,\varepsilon)$ – похідна матриці $U_m(t,\varepsilon)$.

Матрицю $U_m(t,\varepsilon)$, згідно [2], визначатимемо з тотожності $A(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon) - \varepsilon U'_m(t,\varepsilon) \equiv U_m(t,\varepsilon)\left(\Lambda_m(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}C_m(t,\varepsilon)\right)$,

де $\Lambda_m(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s\Lambda_s(t)$, $\Lambda_s(t)$, $\left(s = \overline{0,m}\right)$ – діагональні матриці, $C_m(t,\varepsilon)$ –неперервна $(n\times n)$ -матриця.

Тоді система диференціальних рівнянь (5) набуде вигляду

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = \left(\Lambda_m(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}C_m(t,\varepsilon)\right)y,\ y_0 = U_m^{-1}(0,\varepsilon)x_0, \tag{6}$$

де $U_m^{-1}(0,\varepsilon) - (n\times n)$ – матриця, обернена до матриці $U_m(0,\varepsilon)$.

Застосувавши до задачі (6) метод послідовних наближень [2], отримуємо для її розв'язку асимптотичну (за параметром ε) формулу $y(t,\varepsilon)=\left(\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau\right)+O\left(\varepsilon^m\right)\right)y_0$, $t\in[0;T]$.

Тоді розв'язок системи (3), згідно (4), можна записати у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=U_m(t,\varepsilon)\left(\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right)+O\left(\varepsilon^m\right)\right)U_m^{-1}(0,\varepsilon)x_0 .$$

Отже, матриця $X(t,\varepsilon)=U_m(t,\varepsilon)\left(\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right)+O\left(\varepsilon^m\right)\right)U_m^{-1}(0,\varepsilon)$ є нормальною фундаментальною матрицею однорідної системи (3) ($X(0,\varepsilon)=E$).

4. Побудова періодичного розв'язку системи (1)

За формулою Коші [3] матрицю $X(t,\varepsilon)X^{-1}(\tau,\varepsilon)$ можна записати у вигляді:

$$X(t,\varepsilon)X^{-1}(\tau,\varepsilon)=X(t,\tau,\varepsilon),\ 0\le\tau\le t\le T .$$

Зробимо в системі (1) заміну

$$x=\tilde X(t,\varepsilon)y \text{ , де } \tilde X(t,\varepsilon)=U_m(t,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\Lambda_m(t_1,\varepsilon)dt_1\right)U_m^{-1}(0,\varepsilon) .$$

Отримаємо

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathrm{X}}(\mathrm{t},\varepsilon)}{\mathrm{dt}}y+\varepsilon\tilde{\mathrm{X}}(\mathrm{t},\varepsilon)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}}=A(t,\varepsilon)\tilde{\mathrm{X}}(\mathrm{t},\varepsilon)y+\varepsilon f(t,\varepsilon) .$$

За побудовою $A(t,\varepsilon)\tilde{\mathrm{X}}(\mathrm{t},\varepsilon)-\varepsilon\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathrm{X}}(\mathrm{t},\varepsilon)}{\mathrm{dt}}=\varepsilon^{m+1}U_m(t,\varepsilon)C_m(t,\varepsilon)U_m^{-1}(t,\varepsilon)\tilde{\mathrm{X}}(\mathrm{t},\varepsilon)$, де $C_m(t,\varepsilon)$ – неперервна матриця.

Тоді після нескладних перетворень, прийдемо до інтегрального рівняння

$$x=\tilde X(t,\varepsilon)x_0+\int\limits_0^t\tilde X(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)d\tau+\varepsilon^m\int\limits_0^t\tilde X(t,\tau,\varepsilon)U_m(\tau,\varepsilon)C_m(\tau,\varepsilon)U_m^{-1}(\tau,\varepsilon)x(\tau,\varepsilon)d\tau .$$

Запишемо послідовні наближення

$$x_0(t,\varepsilon)=\tilde X(t,\varepsilon)x_0+\int\limits_0^t\tilde X(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)d\tau,\ x_k(t,\varepsilon)=\tilde X(t,\varepsilon)x_0+\int\limits_0^t\tilde X(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)d\tau+$$

$$+\varepsilon^m\int\limits_0^t\tilde X(t,\tau,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon)C_m(t,\varepsilon)U_m^{-1}(t,\varepsilon)x_{k-1}(\tau,\varepsilon)d\tau,\quad k=1,2,\ldots .$$

Тоді, ряд $x_0(t,\varepsilon)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(x_k(t,\varepsilon)-x_{k-1}(t,\varepsilon)\right)$ рівномірно збігається при $t\in[0;T]$ і досить малих ε .

Справді, використовуючи метод математичної індукції, отримуємо

$$\left\|x_0(t,\varepsilon)\right\|\le a ,\ \left\|x_k(t,\varepsilon)-x_{k-1}(t,\varepsilon)\right\|\le\varepsilon^{mk}\frac{a(bt)^k}{k!}\le\varepsilon^{mk}\frac{a(bT)^k}{k!} \text{ , де } \left\|\tilde X(t,\tau,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon)C_m(t,\varepsilon)U_m^{-1}(t,\varepsilon)\right\|\le b .$$

Таким чином, отримане інтегральне рівняння має єдиний неперервний розв'язок, який можна записати у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=\tilde X(t,\varepsilon)x_0+\int\limits_0^t\tilde X(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)d\tau+O\left(\varepsilon^m\right) .$$

Враховуючи умову періодичності, маємо $x_0=\left(E-\tilde X(T,\varepsilon)\right)^{-1}\int\limits_0^T\tilde X(T,\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)d\tau+O\left(\varepsilon^m\right)$.

Тому, приходимо до асимптотичної (за параметром ε) формули

$$x(t,\varepsilon)=\tilde X(t,\varepsilon)\left(E-\tilde X(T,\varepsilon)\right)^{-1}\int\limits_0^T\tilde X(T,\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)d\tau+\int\limits_0^t\tilde X(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)d\tau+O\left(\varepsilon^m\right) \tag{7}$$

де $\tilde X(t,\tau,\varepsilon)=U_m(t,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^t\Lambda_m(t_1,\varepsilon)dt_1\right)U_m^{-1}(0,\varepsilon)$, $0\le\tau\le t\le T$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$.

Отриманий результат можна сформулювати у вигляді теореми.

Теорема 1. Якщо для системи диференціальних рівнянь (1) виконуються умови 1) – 3), то система (1) має єдиний T – періодичний розв'язок, для якого на відрізку $t\in[0;T]$ вірною є асимптотична за параметром ε ($0<\varepsilon\le\varepsilon_0$) формула (7).

5. Побудова асимптотичних формул періодичного розв'язку системи (1) у випадку кратного кореня характеристичного рівняння, якому відповідають прості елементарні дільники

Нехай виконуються умови 1), 2) пункту 1, а також умова

4) характеристичне рівняння (2) має p простих коренів $\lambda_i(t),\ i=\overline{1,p}$ і один $n-p$-кратний корінь $\lambda_{p+1}(t)$, якому відповідають $n-p$ простих елементарних дільників, і $\operatorname{Re}\lambda_i(t)\le 0$, $i=\overline{1,p+1}$.

З умови 4) випливає, що існує така неособлива матриця $T(t)$, що

$$T^{-1}(t)A_0(t)T(t)=J(t) \tag{8}$$

де $J(t)=diag\{J_1(t),J_2(t)\}$, $J_1(t)=diag\{\lambda_1(t),...,\lambda_p(t)\}$, $J_2(t)=\lambda_{p+1}(t)E_{n-p}$. [2]

Зробивши у матричній формі системи (3) підстановку

$$X=U_m(t,\varepsilon)Y \tag{9}$$

де $U_m(t,\varepsilon)=\sum\limits_{s=0}^{m}\varepsilon^s U_s(t)$, прийдемо до системи

$$\varepsilon\frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{dt}}=\left(\Lambda_m(t,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}C_m(t,\varepsilon)\right)Y. \tag{10}$$

де $\Lambda_m(t,\varepsilon)=\sum\limits_{s=0}^{m}\varepsilon^s\Lambda_s(t)$, $\Lambda_m(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\Lambda_{1m}(t,\varepsilon) & 0\\ 0 & \Lambda_{2m}(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$, $\Lambda_{1m}(t,\varepsilon)=\sum\limits_{s=0}^{m}\varepsilon^s\Lambda_{s1}(t)$ – діагональна матриця розмірів ($p\times p$), $\Lambda_{2m}(t,\varepsilon)=\sum\limits_{s=0}^{m}\varepsilon^s\Lambda_{s2}(t)$, а $C_m(t,\varepsilon)$ – неперервна ($n\times n$)-матриця. Невідомі матриці визначатимемо із матричної системи рівнянь [2]

$$U_0(t)\Lambda_0(t)=A_0(t)U_0(t),\ U_k(t)\Lambda_0(t)-A_0(t)U_k(t)+U_0(t)\Lambda_k(t)=H_k(t),$$
$$H_k(t)=\sum_{s=1}^{k}A_s(t)U_{k-s}(t)-\sum_{s=1}^{k-1}U_s(t)\Lambda_{k-s}(t)-U'_{k-1}(t),\ k=\overline{1,m}; \tag{11}$$

$$U_m(t,\varepsilon)C_m(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\sum_{i=0}^{m}A_{m+1+s-i}(t)U_i(t)-\sum_{s=0}^{m-1}\varepsilon^s\sum_{i=1+s}^{m}U_i(t)\Lambda_{m+1+s-i}(t)-U'_m(t). \tag{12}$$

З першого рівняння маємо $U_0(t)=T(t)$, $\Lambda_0(t)=J(t)$.

Підставивши ці значення у рівності для $k=1$, позначивши $Q_1(t)=T^{-1}(t)U_1(t)$, $H_1(t)=T^{-1}(t)\left(A_1(t)T(t)-T'(t)\right)$ і врахувавши (8), отримаємо: $Q_1(t)J(t)-J(t)Q_1(t)+\Lambda_1(t)=H_1(t)$.

Розіб'ємо кожну з матриць Q_1, H_1 на блоки згідно структури матриці $J(t)$

$$Q_1=\begin{pmatrix}Q_{111} & Q_{112}\\ Q_{121} & Q_{122}\end{pmatrix},\quad H_1=\begin{pmatrix}H_{111} & H_{112}\\ H_{121} & H_{122}\end{pmatrix}.$$

Тоді, використовуючи правила множення блочних матриць, отримаємо

$$Q_{1ij}(t)J_j(t)-J_i(t)Q_{1ij}(t)=H_{1ij}(t)-\delta_{ij}\Lambda_{1j},\ i,j=1,2, \tag{13}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Поклавши у (13) $i=j=1$, прийдемо до рівняння $Q_{111}(t)J_1(t)-J_1(t)Q_{111}(t)=H_{111}(t)-\Lambda_{11}(t)$.

Нехай $Q_{111}(t)=\overline{Q}_{111}(t)+\tilde{Q}_{111}(t), H_{111}(t)=\overline{H}_{111}(t)+\tilde{H}_{111}(t)$, де тільдою відмічені матриці з нульовими діагональними елементами. Тоді $\overline{Q}_{111}(t)J_1(t)-J_1(t)\overline{Q}_{111}(t)=\overline{H}_{111}(t)-\Lambda_{11}(t)$, $\tilde{Q}_{111}(t)J_1(t)-J_1(t)\tilde{Q}_{111}(t)=\tilde{H}_{111}(t)$.

Поклавши $\overline{Q}_{111}(t)\equiv 0$, отримаємо $\Lambda_{11}=\overline{H}_{111}(t)$.

Враховуючи структуру матриці $J_1(t)$ визначаємо елементи матриць $\tilde{Q}_{111}(t)$: $\tilde{q}_{111ij}(t)=\dfrac{h_{111ij}(t)}{\lambda_i(t)-\lambda_j(t)},\ i\ne j;\ \ i,j=\overline{1,p}$.

Отже, блоки $Q_{111}(t)$ і $\Lambda_{11}(t)$ визначені.

Поклавши у (13) $i=j=2$ отримаємо рівняння $Q_{122}(t)J_2(t)-J_2(t)Q_{122}(t)=H_{122}(t)-\Lambda_{12}(t)$.

Нехай $Q_{122}(t)\equiv 0$. Тоді знаходимо $\Lambda_{12}(t)\equiv H_{122}(t)$. Отже матриця $\Lambda_1(t)$ визначена.

Нарешті, з (13) при $i\ne j$ $Q_{1ij}(t)J_j(t)-J_i(t)Q_{1ij}(t)=H_{1ij}(t)$, враховуючи, що матриці $J_1(t)$ і $J_2(t)$ не мають спільних власних значень, однозначно визначаємо прямокутні матриці $Q_{1ij}(t)$ при $i,j=1,2$, $i\ne j$, а саме

$$Q_{112}(t)=\left(\lambda_{p+1}(t)E_p-J_1(t)\right)^{-1}H_{112}(t),\ Q_{121}(t)=H_{121}(t)\left(J_1(t)-\lambda_{p+1}(t)E_p\right)^{-1}.$$

Таким чином визначено матрицю $Q_1(t)$, а тому і $U_1(t)=T(t)Q_1(t)$.

Оскільки в (11) кожна матриця $H_k(t)$ виражається через $A_j(t), U_i(t), \Lambda_i(t),\ j=\overline{1,k},\ i=\overline{0,k-1}$, то вище вказаним способом можна визначити усі матриці $U_k(t), \Lambda_k(t),\ k=\overline{2,m}$, причому матриця $U_m(t,\varepsilon)$ на відрізку $[0;T]$ і для досить малих $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ є невиродженою.

Тоді з рівняння (12) знаходимо $C_m(t,\varepsilon) = U_m^{-1}(t,\varepsilon)\left(\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s \sum_{i=0}^{m} A_{m+1+s-i}(t)U_i(t) - \sum_{s=0}^{m-1}\varepsilon^s \sum_{i=1+s}^{m} U_i(t)\Lambda_{m+1+s-i}(t) - U'_m(t)\right)$.

Усі визначені матриці $U_i(t)$, $\Lambda_i(t)$, $i=\overline{1,m}$, $C_m(t,\varepsilon)$ є T-періодичні.

Введемо позначення $S(t,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{m}\varepsilon^{s-1}\Lambda_{s2}(t)$, $R(t,\varepsilon) = diag\left\{\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \Lambda_{1m}(t,\varepsilon)dt\right), \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{p+1}(t)dt\right)\Phi(t,\varepsilon)\right\}$, де $\Phi(t,\varepsilon)$ – матрицант системи [3]

$$\frac{d\xi}{dt} = S(t,\varepsilon)\xi\ . \tag{14}$$

Оскільки система (14) регулярна, то згідно [4] матрицант цієї системи можна подати у вигляді рівномірно збіжного ряду $\Phi(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k \Phi_k(t)$, $\Phi_0(0) = E$, $\Phi_i(0) \equiv 0,\ i=1,2,...$, при $t\in[0;T]$, $\varepsilon\in[0;\varepsilon_0]$. Причому $\Phi_0(t)$ – матрицант системи $\frac{d\eta}{dt} = \Lambda_{12}(t)\eta$.

Нехай власні значення матриці $\Phi(T,\varepsilon)$ $\rho_1(\varepsilon),...,\ \rho_{n-p}(\varepsilon)$ такі, що виконуються нерівності

$$|\rho_k(\varepsilon)| < 1,\quad k=\overline{1,n-p}\ . \tag{15}$$

Тоді (10) заміною

$$Y(t,\varepsilon) = R(t,\varepsilon)Z(t,\varepsilon) \tag{16}$$

зводиться до системи

$$\frac{\mathrm{dZ}}{\mathrm{dt}} = \varepsilon^m R^{-1}(t,\varepsilon)C(t,\varepsilon)R(t,\varepsilon)Z\ . \tag{17}$$

Перейдемо від системи (17) до відповідної інтегральної системи $Z(t,\varepsilon) = Z(0,\varepsilon) + \varepsilon^m\int_0^t R^{-1}(\tau,\varepsilon)C(\tau,\varepsilon)R(\tau,\varepsilon)Z(\tau,\varepsilon)d\tau$, або, враховуючи (9),

$$\mathrm{Y}(t,\varepsilon) = R(t,\varepsilon)Y(0,\varepsilon) + \varepsilon^m\int_0^t R(t,\varepsilon)R^{-1}(\tau,\varepsilon)C(\tau,\varepsilon)Y(\tau,\varepsilon)d\tau\ . \tag{18}$$

Побудуємо послідовні наближення

$$\mathrm{Y}_0(t,\varepsilon) = R(t,\varepsilon)Y(0,\varepsilon), \mathrm{Y}_k(t,\varepsilon) = R(t,\varepsilon)Y(0,\varepsilon) + \varepsilon^m\int_0^t R(t,\varepsilon)R^{-1}(\tau,\varepsilon)C(\tau,\varepsilon)Y_{k-1}(\tau,\varepsilon)d\tau,\ k=1,2,...\ .$$

Враховуючи умову 4), неперервність матриць $\Lambda_{i1}(t), i=\overline{1,m}$, $C_m(t,\varepsilon)$, $\Phi(t,\varepsilon)$, $t\in[0;T]$, маємо

$$\|\Phi(t,\varepsilon)\| \le K\ ,\ \|R(t,\varepsilon)R^{-1}(\tau,\varepsilon)\| \le M\ ,\ \|C_m(t,\varepsilon)\| \le C\ ,\ \|\mathrm{Y}_0(t,\varepsilon)\| \le a\ ,$$

$$\|\mathrm{Y}_1(t,\varepsilon) - \mathrm{Y}_0(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon^m\int_0^t \|R(t,\varepsilon)R^{-1}(\tau,\varepsilon)C(\tau,\varepsilon)Y_0(\tau,\varepsilon)\|d\tau \le \varepsilon^m MCat\ ,$$

$$\|\mathrm{Y_k}(t,\varepsilon) - \mathrm{Y_{k\text{-}1}}(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon^m\int_0^t \|R(t,\varepsilon)R^{-1}(\tau,\varepsilon)\|\|C(\tau,\varepsilon)\|\|Y_{k-1}(\tau,\varepsilon)\|d\tau \le \varepsilon^{km}a(MC)^k\frac{t^k}{k!}, k=1,2,...\ .$$

Тобто послідовність матриць $\{Y_k(t,\varepsilon)\}$ збігається до матриці-розв'язку $Y^*(t,\varepsilon)$ рівняння (8) рівномірно на відрізку $[0;T]$, причому $Y^*(t,\varepsilon) = \left(R(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^m)\right)Y(0,\varepsilon)$, $Y^*(0,\varepsilon) = U_m^{-1}(0,\varepsilon)$.

Враховуючи (9), остаточно маємо $X(t,\varepsilon) = U_m(t,\varepsilon)\left(R(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^m)\right)U_m^{-1}(0,\varepsilon)$.

Аналогічно тому, як було зроблено вище, можна показати, що для періодичного розв'язку системи (1) справедлива асимптотична (за параметром ε) формула

$$x(t,\varepsilon) = \tilde{X}(t,\varepsilon)\left(E - \tilde{X}(T,\varepsilon)\right)^{-1}\int_0^T \tilde{X}(T,\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)d\tau + \int_0^t \tilde{X}(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)d\tau + O(\varepsilon^m) \tag{19}$$

де $\tilde{X}(t,\varepsilon) = U_m(t,\varepsilon)R(t,\varepsilon)U_m^{-1}(0,\varepsilon)$, $\tilde{X}(t,\tau,\varepsilon) = \tilde{X}(t,\varepsilon)\tilde{X}^{-1}(\tau,\varepsilon) = U_m(t,\varepsilon)R(t,\tau,\varepsilon)U_m^{-1}(0,\varepsilon)$.

Таким чином справедлива теорема 2.

Теорема 2. Якщо виконуються умови 1), 2), 4), (15), то система (1) має єдиний T -періодичний розв'язок, для якого на відрізку $[0;T]$ вірною є асимптотична за параметром ε ($0<\varepsilon\le\varepsilon_0$) формула (19).

6. Висновки

Таким чином здобуті результати дають змогу будувати асимптотичні наближення періодичних розв'язків у некритичному випадку як за наявності простих коренів характеристичного рівняння так і у випадку наявності кратного кореня, якому відповідають прості елементарні дільники.

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 576с. 2. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин, И.З. Штокало, П.С. Бондаренко и др., за ред. И.З. Штокало. – К.: Вища школа, 472с. 3. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. – М.: Мир, 232 с. 4. *Шкіль М.І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – К.: Вища школа, 228с. 5. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 720с.

Надійшла до редколегії 18.02.10

УДК 517.9

І. Романенко, канд. фіз.-мат. наук, доц.

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ОБЛАСТІ З КУТОВОЮ ТОЧКОЮ

Досліджено існування та єдиність розв'язку лінійної еліптичної крайової задачі з неперервними коефіцієнтами у двовимірній нескінченній кутовій області. Уточнено апріорну оцінку розв'язку такої задачі та характер залежності сталої в апріорній оцінці від даних задачі.

The existence and uniqueness of solution of linear elliptic boundary value problem with continuous coefficients in 2-dimentional unbounded angular domain are investigated. An a priori estimate for such a problem solution is obtained and the character of a priori constant dependence of the problem data has been investigated.

1. Короткий огляд літератури та визначення основного напрямку досліджень

Крайові задачі з кутовими точками протягом тривалого часу є об'єктом дослідження ряду фахівців. Фундаментальною у цьому напрямку є, безумовно, робота [3], в якій отримано фундаментальні результати, важливі для дослідження задач з конічними та кутовими точками. Важливі результати отримано і в роботах інших дослідників, наприклад, [1,4,5].

Для подальшого застосування отриманих в працях інших дослідників результатів до випадку нелінійних задач потрібно знати залежність сталих в апріорних оцінках розв'язків задач від даних задачі. На жаль, в попередніх роботах характер такої залежності не було досліджено. Крім того, у більшості робіт розв'язність досліджуваних задач формулюють у термінах особливих точок похідної еліптичної задачі з комплексним параметром. Це суттєво звужує діапазон застосування таких результатів. Таку ваду має, наприклад, робота [2].

Саме тому основним напрямком дослідження у даній роботі стало уточнення характеру залежності сталих в апріорних оцінках розв'язку від даних еліптичної крайової задачі в області з кутовою точкою, а також отримання теорем про розв'язність у термінах лише даних вихідної задачі для випадку задач зі змінними коефіцієнтами.

2. Постановка задачі

Нехай $\alpha,\gamma\in[0,2\pi)$, $\gamma\ne 0,\pi$. Позначимо $K_{\alpha,\gamma}=\{(x,y)\in R^2:\alpha<\arg(x,y)<\alpha+\gamma\}$. Будемо розглядати простір Соболєва з вагою $V_{2,\delta}^{(m)}(K_{\alpha,\gamma})$, що складається з функцій, які мають узагальнені похідні до порядку m, та скінченну норму

$$\|u\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{(m)}=\left(\sum_{|\beta|\le m}\int_{K_{\alpha,\gamma}} r^{\delta-2(m-|\beta|)}\,|D^\beta u|^2\,dxdy\right)^{1/2}.$$

Позначимо за допомогою $V_{2,\delta}^{m-\frac{1}{2}}(\partial K_{\alpha,\gamma})$ простір граничних значень на $\partial K_{\alpha,\gamma}$ функцій з $V_{2,\delta}^{(m)}(K_{\alpha,\gamma})$ з нормою $\|v\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{\left(m-\frac{1}{2}\right)}=\inf\left\{\|u\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{(m)}:u\in V_{2,\delta}^{(m)}(K_{\alpha,\gamma}),u\big|_{\partial K_{\alpha,\gamma}}=v\right\}$. Простори $V_{2,\delta}^{(m)}(K_{\alpha,\gamma})$, $V_{2,\delta}^{m-\frac{1}{2}}(\partial K_{\alpha,\gamma})$ введено, зокрема, у роботі [3].

Розглянемо крайову задачу

$$Lu=a(x,y)u_{xx}+b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}=f(x,y),\ (x,y)\in K_{\alpha,\gamma} \tag{1}$$

$$Bu=\begin{cases}u\big|_{\arg(x,y)=\alpha}=g_\alpha(x,y)\\ u\big|_{\arg(x,y)=\alpha+\gamma}=g_{\alpha+\gamma}(x,y).\end{cases} \tag{2}$$

Розв'язок задачі (1), (2) будемо розглядати у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K_{\alpha,\gamma})$, де k – невід'ємне ціле. Припустимо, що коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови диференційованості та еліптичності: