УДК 517.9

Ю. Самойленко, канд. фіз.-мат. наук

ПРО ПОБУДОВУ ГОЛОВНОГО ЧЛЕНА АСИМПТОТИЧНОГО РОЗКЛАДУ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

***Розглядається задача про побудову головного члена асимптотичного розкладу розв'язку задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами. Показано, що вираз для головного члена такого розкладу залежить від значення кривої розриву лише в точці t* = 0.**

***Problem of constructing main term of asymptotic series of solution for Cauchy problem to singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients is studied. There is proved that constructing main term depends on value of function of discontinuity only at the point t* = 0.**

1. Вступ

Одним з фундаментальних рівнянь сучасної теоретичної та математичної фізики є рівняння Кортевега-де Фріза, яке служить моделлю найрізноманітніших хвильових явищ [3]. Протягом останніх 20-ти років значна увага приділяється розгляду сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами, для дослідження якого ефективно використовувались асимптотичні методи [1, 2, 5].

В даній статті розглядається питання про побудову головного члена асимптотичного розв'язку задачі Коші рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду:

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x,\varepsilon)u_t + b(x,\varepsilon)uu_x \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0,\varepsilon) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{2}$$

де

$$a(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\varepsilon^k, \quad b(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)\varepsilon^k,$$

функції $a_k(x),\ b_k(x) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R})$, $k = 0,1,\dots$; функція $f(\eta),\ \eta \in \mathbf{R}$, належить простору Шварца швидко спадних функцій; $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

2. Основні означення та припущення

Сформулюємо основні припущення та дамо означення, які необхідні для подальшого викладу.

Нехай $G_1 = G_1(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ – лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau) \in \mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}$, що для довільних невід'ємних цілих чисел *n, m, q, p* рівномірно щодо (x,t) на кожній компактній множині $K \subset \mathbf{R}\times[0;T]$ виконуються такі дві умови [4]:

1. Справджується співвідношення:

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x,t,\tau) = 0, \quad (x,t)\in K; \tag{3}$$

2. Існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau\to-\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p}\Big(f(x,t,\tau) - f^-(x,t)\Big) = 0, \quad (x,t)\in K. \tag{4}$$

Нехай $G_1^0 = G_1^0(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}) \subset G_1$ – лінійний простір $G_1 = G_1(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau)\in(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$, що для довільних невід'ємних цілих чисел *n, m, q, p* рівномірно щодо змінних (x,t) на кожному компакті $K \subset \mathbf{R}\times[0;T]$ додатково до умов (3), (4) виконується умова:

$$\lim_{\tau\to-\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x,t,\tau) = 0. \tag{5}$$

Простір G_1^0 є простором нескінченно диференційовних функцій, залежних від змінних $(x,t,\tau)\in(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$, які за змінною τ належать простору Шварца швидко спадних функцій.

Позначимо через $G_2^+ = G_2^+(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}\times[0;\Theta])$, де Θ – деяке дійсне додатне число, – лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $(\tau_1,\tau_2)\in\mathbf{R}\times[0;\Theta]$, $(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]$, що для довільних невід'ємних цілих чисел p, q, r, q_1, q_2 рівномірно щодо змінних (x,t) на кожній компактній множині $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$ виконується співвідношення

$$\lim_{\tau_1\to\pm\infty}\tau_1^r\frac{\partial^{q_1}}{\partial\tau_1^{q_1}}\frac{\partial^{q_2}}{\partial\tau_2^{q_2}}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p}f(x,t,\tau_1,\tau_2)=0,\quad (x,t)\in K,\quad \tau_2\in[0;\Theta]. \tag{6}$$

Розв'язок задачі Коші (1), (2) шукається у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=Y_0(x,t,\varepsilon)+O(\varepsilon), \tag{7}$$

де

$$Y_0(t,\tau_1,\tau_2)=V_0(t,\tau_1)+W_0(t,\tau_1,\tau_2),\quad \tau_1=\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon},\quad \tau_2=\frac{t}{\varepsilon}. \tag{8}$$

Тут $\varphi(t)$ – така нескінченно диференційовна функція, що $\varphi(0)=0$. Функція $V_0(t,\tau_1)\in G_0$, $W_0(\tau_1,\tau_2)\in G_2^+$, при цьому функція $V_0(t,\tau_1)$ визначена в деякому околі кривої $\Gamma=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T],\,x=\varphi(t)\}$, а функція $W_0(\tau_1,\tau_2)$ – в деякому околі зв'язної множини $\{(x,t):t=0,x\in\mathbf{R}\}\cup\{(x,t):x=\varphi(t),\quad t\in[0;T]\}$.

Для визначення функцій $V_0(t,\tau_1)$ та $W_0(\tau_1,\tau_2)$ підставимо (7) в рівняння (1) та домножимо на ε. Тоді матимемо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3V_0}{\partial\tau_1^3}+\frac{\partial^3W_0}{\partial\tau_1^3}&=a_0(x)\left(\varepsilon\frac{\partial V_0}{\partial t}-\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}\varphi'(t)-\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}\varphi'(t)+\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}+\frac{\partial W_0}{\partial\tau_2}\right)+\\&+b_0(x)\left(V_0\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+V_0\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}+W_0\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+W_0\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}\right)+\varepsilon g_0(x,t,\varepsilon),\end{aligned} \tag{9}$$

де $g_0(x,t,\varepsilon)$ – деяка обмежена нескінченно диференційовна функція своїх аргументів, тобто $|g(x,t,\varepsilon)|\le C_K$, $(x,t)\in K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$, для деякої сталої C_K, що залежить лише від компакта K.

4. Визначення сингулярної частини $V_0(t,\tau_1)$

Запишемо рівняння для визначення функції $V_0(t,\tau_1)$ на кривій Γ. Позначимо

$$v_0=v_0(t,\tau_1)=V_0(x,t,\tau_1)|_{x=\varphi(t)}.$$

З (9) знаходимо, що функція $v_0=v_0(t,\tau_1)$ є розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними вигляду:

$$\frac{\partial^3v_0}{\partial\tau_1^3}+a_0(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{\partial v_0}{\partial\tau_1}-b_0(\varphi(t))v_0\frac{\partial v_0}{\partial\tau_1}=0. \tag{10}$$

Розв'язок рівняння (10) в просторі G_1^0 можна подати у вигляді [1]

$$v_0(t,\tau_1)=-3\frac{A(\varphi(t),t)}{b_0(\varphi(t))}ch^{-2}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{2}(\tau_1+C_0)\right),$$

де $A(\varphi(t),t)=-a_0(\varphi(t))\varphi'(t)>0,\quad C_0-\mathrm{const}.$

Продовжимо функцію $v_0(t,\tau_1)$ з кривої $x=\varphi(t)$ таким чином, щоб $V_0(x,t,\tau_1)=v_0(t,\tau_1).$

5. Визначення сингулярної частини $W_0(x,t,\varepsilon)$

З (8), (9) для визначення функції $W_0(\tau_1,\tau_2)$ в околі зв'язної множини M такої, що $M=\{(x,t):t=0,x\in\mathbf{R}\}\cup\{(x,t):x=\varphi(t),\quad t\in[0;T]\}$, знаходимо квазілінійне диференціальне рівняння третього порядку

$$\frac{\partial^3W_0}{\partial\tau_1^3}=-a_0(0)\left[\varphi'(0)\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}-\frac{\partial W_0}{\partial\tau_2}\right]+b_0(0)\left[V_0(0,\tau_1)\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_0(0,\tau_1)}{\partial\tau_1}W_0+W_0\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}\right]. \tag{11}$$

Використовуючи початкову умову (2), знаходимо співвідношення вигляду:

$$V_0(x,t,\varepsilon)+W_0(x,t,\varepsilon)|_{t=0}=f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

звідки, отримуємо початкову умову для функції $W_0(\tau_1,\tau_2)$ при $\tau_2=0$:

$$W_0(\tau_1,0)=f(\tau_1)-V_0(0,\tau_1). \tag{12}$$

Питання про існування розв'язку задач (10), (11) в просторі G_2^+ з'ясовує така лема.

Лема. *Задача (11), (12) має розв'язок $W_0(\tau_1,\tau_2)$, що належить простору G_2^+.*

Твердження леми випливає [4] з умови $W_0(\tau_1,0)\in G_1^0$.

Таким чином, грунтуючись на викладених вище міркуваннях, можна сформулювати таке твердження.

Теорема. Для довільної нескінченно диференційовної функції $\varphi(t)$, $t \in [0;T]$, такої, що $\varphi(0)=0$, функція вигляду (7), (8) задовольняє співвідношення (9) та початкову умову з точністю $O(\varepsilon)$.

6. Висновки

Побудовано нульовий член асимптотичного розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевеге-де Фріза зі змінними коефіцієнтами і показано, що нульовий член асимптотики залежить від кривої розриву лише в початковій точці.

1. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розвинення солітоноподібних розв'язків збуреного рівняння Кортевега-де Фріза // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, N. 1. – С. 111 – 124. 2. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, N. 1. – С. 122 – 132. 3. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. – М.: Советское радио, 1977. – 368 с. 4. *Фаминский А.В.* Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза и его обобщений // Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 1988. – Том.13. – ¹.56 – 105. 5. *Maslov V.P., Omel'yanov G.A.* Geometric asymptotics for PDE. I. – Providence: AMS. – 2001. – 243 p.

Надійшла до редколегії 30.06.10

УДК 519.925

О. Чичурін, д-р фіз.-мат. наук

ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ РІВНЯНЬ ШАЗІ

Подано детальне виведення 22 умов для системи Шазі, що виникають при розв'язанні задачі про належність рівняння Шазі з шістьма особливими точками до рівнянь Р-типу. Дано метод побудови рівняння Шазі з шістьма особливими точками, коефіцієнти якого задовольняють систему Шазі. Розглянуто процедуру чисельного і аналітичного інтегрування рівнянь Шазі зі сталими коефіцієнтами.

There is given a detailed deduction of twenty two conditions of Chazy system. These conditions arise during the solving the problem of belonging the Chazy equation with six singular points to P-type. The method of building Chazy equation with six singular points, which coefficients satisfy Chazy system, is given. The procedure of numerical and analytical integration Chazy equation with constant coefficients is considered.

1. Вступ

При вивченні рівнянь вигляду

$$w''' = P(w'', w', w, z), \tag{1}$$

де P – поліном стосовно w'', w', w з аналітичними коефіцієнтами за z, Шазі [8] сподівався отримати нові рівняння достатньо простого вигляду, розв'язки яких не були би класичними функціями і які б не приводилися до канонічних рівнянь Пенлеве. Як відзначено в монографії В.А. Добровольського [1], результати цих досліджень виявилися мало обнадійними. Тоді Шазі почав розглядати рівняння вигляду

$$w''' = R(w'', w', w, z), \tag{2}$$

де $R-$ раціональна стосовно w'', w', w функція з аналітичними коефіцієнтами за z, розв'язки яких не мають рухомих критичних особливих точок. Згідно методу Пенлеве, потрібно було знайти спрощене рівняння для (2) з нерухомими критичними точками. Шазі отримав рівняння вигляду [8]

$$w''' = \frac{PQ''-QP''}{PQ'-QP'} w' w'' - \frac{P'Q''-Q'P''}{PQ'-QP'} \frac{w'^3}{2}, \tag{3}$$

де P, Q – поліноми четвертого ступеня стосовно *w* зі сталими коефіцієнтами, P', P'', Q', Q'' – похідні поліномів P, Q за w. Він показав [8], що рівняння (3) має не більше шести полюсів, а рівняння *Р*-типу, яке допускає рівняння (3) в якості свого спрощуючого рівняння, коли стосовно змінної w всі корені рівняння $PQ' - QP' = 0$ є простими, повинно записуватися у вигляді

$$w''' = \sum_{k=1}^{6} \frac{(w' - a_k{}')(w'' - a_k{}'') + A_k (w' - a_k{}')^3 + B_k (w' - a_k{}')^2 + C_k (w' - a_k{}')}{w - a_k} + D\, w'' + E\, w' + \prod_{i=1}^{6} (w - a_i) \sum_{k=1}^{6} \frac{F_k}{w - a_k}. \tag{4}$$

Рівняння (4) містить 32 функції змінної $z: a_k, A_k, B_k, C_k, F_k \ \ (k = \overline{1,6}), \ \ D, E$.

Розвиваючи метод Пенлеве [9] для рівняння (4), Шазі отримав систему з 31 алгебраїчних і диференціальних рівнянь, в яких як невідомі фігурують 32 функції – коефіцієнти рівняння (4). Система перших дев'яти рівнянь, що пов'язує між собою функції A_k, a_k $(k = \overline{1,6})$, згідно [8], має вигляд

$$\sum_{k=1}^{6} A_k = 0, \ \ \sum_{k=1}^{6} a_k A_k = -6, \ \ \sum_{k=1}^{6} a_k{}^2 A_k = -2 \sum_{k=1}^{6} a_k, \tag{5}$$

$$2A_k^2 + \sum_j \frac{A_k - A_j}{a_k - a_j} = 0 \ \ (k, j = \overline{1,6};\ j \neq k). \tag{6}$$

Невідомими тут є функції A_k $(k = \overline{1,6})$. Детальний аналіз цієї системи було проведено М.О. Лукашевичем в [2]. Грунтуючись на його методі, в [3] отримано розв'язок цієї системи у вигляді