$$\mathfrak{V}_{1+n}(t,Y_1,s+1,...,s+n)=\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t,Y_1,s+1,...,s+n)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\prod_{j=1}^{k}\sum_{n_j=1}^{n-n_1-...-n_{j-1}}\frac{n!}{(n-n_1-...-n_j)!}\times$$
$$\times\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n-n_1-...-n_j}(t,Y_1,s+1,...,s+n-n_1-...-n_j)\sum_{\mathrm{P}:\mathrm{Z}=\bigcup_k X_k}\frac{1}{|\mathrm{P}|!}\sum_{i_1\neq i_2\neq,...,\neq i_k=1}^{s+n-n_1-...-n_j}\prod_{k=1}^{|\mathrm{P}|}\frac{1}{|X_k|!}\widehat{\mathfrak{A}}_{1+|X_k|}(t,i_k,X_k), \tag{13}$$

де $\sum_{\mathrm{P}:\mathrm{Z}=\bigcup_k X_k}$ – сума за всіма можливими перетинами $\mathrm{P}$ лінійно впорядкованої множини індексів $\mathrm{Z}=(s+n-n_1-...-n_j+1,...,s+n-n_1-...-n_{j-1})$ .

Наведемо приклади еволюційних операторів $\mathfrak{V}_{1+n}(t), \quad n\geq 0,$ найнижчих порядків:

$$\mathfrak{V}_1(t,Y_1)=\widehat{\mathfrak{A}}_1(t,Y_1),$$

$$\mathfrak{V}_2(t,Y_1,s+1)=\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,Y_1,s+1)-\widehat{\mathfrak{A}}_1(t,Y_1)\sum_{j=1}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,j,s+1),$$

$$\mathfrak{V}_3(t,Y_1,s+1,s+2)=\widehat{\mathfrak{A}}_3(t,Y_1,s+1,s+2)-2!(\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,Y_1,s+1)-\widehat{\mathfrak{A}}_1(t,Y_1)\sum_{i=1}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,i,s+1))\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{s+1}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,j,s+2)-\widehat{\mathfrak{A}}_1(t,Y_1)(\sum_{i=1}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_3(t,i,s+1,s+2)+\sum_{i\neq j=1}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,i,s+1)\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,j,s+2)).$$

В термінах операторів розсіяння (11) наведені перші два приклади еволюційніх операторів (13) мають вигляд

$$\mathfrak{V}_1(t,Y_1)=\widehat{\mathcal{G}}_s(t,1,\dots,s),$$

$$\mathfrak{V}_2(t,Y_1,s+1)=\widehat{\mathcal{G}}_{s+1}(t,1,\dots,s+1)-\widehat{\mathcal{G}}_s(t,1,\dots,s)\sum_{i=1}^{s}\widehat{\mathcal{G}}_2(t,i,s+1)+(s-1)\widehat{\mathcal{G}}_s(t,1,\dots,s).$$

### 4. Висновки

В роботі встановлено умову (9), при якій маргінальні функціонали $F_s(t,1,\dots,s\,|\,F_1(t)),\ s\geq 2$, представляються збіжними по нормі простору ядерних операторів рядами (10). Сформульовано метод кінетичних кластерних розкладів (12), що дозволив встановити явний вигляд еволюційних операторів (13), якими визначаються маргінальні функціонали (10).

Зазначимо, що маргінальні функціонали описують квантові кореляції при кінетичному описі багаточастинкових систем і на основі теорії збурень були вперше побудовані в роботі Боголюбова [5-6]. Маргінальні функціонали (10) при певних додаткових умовах формально співпадають з функціоналами побудованими Боголюбовим, якщо представити еволюційні оператори (13) у формі аналогів рівнянь Дюамеля.

1. *Боголюбов М. М.* Лекції з квантової статистики. Проблеми статистичної механіки квантових систем // Київ: Рад. школа -1949. – 112-135 с. 2. *Adami R., Golse F., Teta A.* Rigorous Derivation of the Cubic NLS in Dimension One // J. Stat. Phys.-2007.-127, P. 1193-1220. 3. *Arnold A.* Mathematical properties of quantum evolution equations // Lect. Notes in Math. – 2008. – 1946, P. 45-109. 4. *Bardos C., Golse F., Gottlieb A., Mauser N.* Accuracy of the Time-Dependent Hartree Fock Approximation for Uncorrelated Initial States // J. Stat. Phys.-2004.-115, P. 1037. 5. *Cercignani C., Gerasimenko V.I., Petrina D.Ya.* Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations // Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.-1997., P. 252. 6. *Cohen E.G.D.* Bogolyubov and Kinetic Theory: the Bogolyubov Equations // Ukrainain J. Phys.-2009.- 8-9, P. 847-861. 7. *Erdos L., Schlein B., Yau H.-T.* Derivation of the cubic non-linear Schrodinger equation from quantum dynamics of many-body systems // Invent. Math.-2007.-167, P. 515-614. 8. *Gerasimenko V.I., Shtyk V.O.* Evolution of correlations of quantum many-particle system // J. Stat. Mech.-2008.- 3, P03007. 9. *Michelangeli A.* Bose-Einstein condensation: analysis of problems and rigorous results // s.i.s.s.a. preprint 70/2007/mp 2007. 10. *Petrina D.Ya.* Mathematical Foundations of Quantum Statistical Mechanics. Continuous Systems // Amsterdam: Kluwer Acad. Publ.-1995. P. 624. 11. *Petrina D.Ya.* On solutions of Bogolyubov kinetic equations.Quantum statistics // Theor. and Math. Phys.-1972.-13, P. 391-405. 12. *Spohn H.* Kinetic equations for quantum many-particle systems // arXiv:0706.0807v1, 2007.

**Надійшла до редколегії 16.11.09**

**УДК 519.21**

**І. Боднарчук, асп.**

## М'ЯКИЙ РОЗВ'ЯЗОК ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЗАГАЛЬНОЮ ВИПАДКОВОЮ МІРОЮ

***Доведено існування та єдиність розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння, керованого загальною випадковою мірою. Встановлено ліпшицевість розв'язку за часовою змінною та гельдеровість за просторовою. Показано неперервну залежність розв'язку від даних задачі.***

***Existence and uniqueness of the solution of Cauchy problem for wave equation driven by general stochastic measure are proved. Lipschitz regularity of the solution in time variable and Hölder regularity in space variable are established. Solution continuous dependence of problem data is showed.***

### 1. Вступ

Нехай $B(R)$ – борелева $\sigma$-алгебра підмножин евклідового простору $R$; $L_0(\Omega,F,\mathrm{P})$ − множина дійснозначних випадкових величин, заданих на повному ймовірнісному просторі $(\Omega,F,\mathrm{P})$; $\mu$ − це загальна випадкова міра на $B(R)$, тобто, $\sigma$-адитивне за ймовірністю відображення $\mu: B(R)\to L_0(\Omega,F,\mathrm{P})$. Для зручності надалі будемо говорити про таку міру просто випадкова або стохастична міра. Теорія інтегрування дійсних функцій за загальними випадковими мірами побудована, наприклад, у [1], [5]. Зокрема, будь-яка обмежена вимірна функція є інтегрованою за стохастичною мірою $\mu$. Крім того, має місце аналог теореми Лебега (див. [1]).

Розглянемо задачу Коші, що відповідає хвильовому рівнянню, породженому загальною стохастичною мірою $\mu$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \Delta_x u(t,x) + f(t,x,u(t,x)) + \sigma(t,x)\dot{\mu}(x), \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x), \end{cases}$$

у м'якій формі, тобто, $u:[0,T]\times R\times\Omega \to R$ — вимірна випадкова функція така, що

$$u(t,x) = \int_R S(t,x-y)v_0(y)dy + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_R S(t,x-y)u_0(y)dy\right) + \int_0^t ds \int_R S(t-s,x-y)f(s,y,u(s,y))dy +$$

$$+\int_R d\mu(y)\int_0^t S(t-s,x-y)\sigma(s,y)ds,$$ де $(t,x)\in[0,T]\times R,\ T>0,\ a>0,\ S(t,x)=\frac{1}{2a}\mathrm{I}_{\{|x|<at\}}$ – фундаментальний розв'язок.

Хвильове рівняння з узагальненою випадковою мірою розглянуто в [3], де знайдено його розв'язок на множині узагальнених випадкових функцій.

Отже, останнє рівняння можна переписати у вигляді

$$u(t,x) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_0(y)dy + \frac{1}{2}\left(u_0(x+at)+u_0(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(s,y,u(s,y))dy + \frac{1}{2a}\int_{\{y:|y-x|<at\}} d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds. \tag{1}$$

Стохастичні хвильові рівняння, керовані вінерівськими процесами, досліджено, наприклад, у статтях [4], [6].

Надалі вважатимемо, що виконуються припущення:

**А1.** функція $v_0(x)=v_0(x,\omega):R\times\Omega\to R$ вимірна і обмежена $\forall\omega\in\Omega$ сталою $C_{v_0}(\omega)>0$.

**А2.** функція $u_0(x)=u_0(x,\omega):R\times\Omega\to R$ вимірна та ліпшицева: $|u_0(x_1)-u_0(x_2)|\le L_{u_0}(\omega)|x_1-x_2|$.

**А3.** $f(t,x,v):[0,T]\times R\times R\to R$ вимірна, обмежена сталою $C_f>0$ та ліпшицева за $v\in R$ зі сталою $L_f$.

**А4.** $\sigma(t,x):[0,T]\times R\to R$ вимірна, обмежена сталою $C_\sigma>0$ та гельдерова за $t,x$ з показником $1/2<\alpha\le 1$:

$$|\sigma(t_1,x_1)-\sigma(t_2,x_2)|\le K\left(|t_1-t_2|^\alpha+|x_1-x_2|^\alpha\right).$$

Через $C$ позначатимемо довільну додатну константу, що може бути різною в різних формулах.

У даній роботі отримано існування та єдиність розв'язку задачі Коші (1), досліджено регулярність цього розв'язку та доведено його неперервну залежність від даних задачі.

## 2. Допоміжні твердження

Для доведення основного результату спочатку покажемо справедливість наступних тверджень.

**Лема 1.** Нехай для деякого $\tau>1/2$ функція $|y|^\tau$ інтегровна за мірою $\mu$ на $R$ та виконується припущення **А4**. Тоді для будь-якого фіксованого $x\in R$ випадковий процес $\tilde{u}(t)=\int_{\{y:|y-x|<at\}}d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds\quad t\in[0,T]$ має ліпшицеву модифікацію.

***Доведення.*** Нехай $x\in R, 0\le t_1<t_2\le T$ – фіксовані. Покладемо $g(y)=\int_{t_1-|y-x|/a}^{t_2-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds,\ y\in R$. Також позначимо $\forall j\in \mathrm{Z}, n\ge 0:\ d_{kn}^{(j)}=j+k2^{-n},\ 0\le k\le 2^n$; $\Delta_{kn}^{(j)}=(d_{(k-1)n}^{(j)},d_{kn}^{(j)}],\ 1\le k\le 2^n$. Для зручності ще введемо множину $\mathrm{Z}_t^x=\left\{j\in\mathrm{Z}:[x-at]+1\le j,\ j+1<[x+at]\right\}$. Тоді для функцій

$$g_n^{(j)}(y)=\sum_{1\le k\le 2^n} g(d_{(k-1)n}^{(j)})\mathrm{I}_{\Delta_{kn}^{(j)}}(y),\quad y\in(j,j+1],\quad n\ge 0$$

в силу **А4** та теореми про мажоровану збіжність [5, Твердження 7.1.1] виконується збіжність

$$\int_{(j,j+1]} g_n^{(j)}(y)d\mu(y)\xrightarrow{\mathrm{P}}\int_{(j,j+1]} g(y)d\mu(y),\ n\to\infty.$$

Маємо

$$\tilde{u}(t_2)-\tilde{u}(t_1)=\int_{\{y:|y-x|<at_1\}}d\mu(y)\int_{t_1-|y-x|/a}^{t_2-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds+\int_{\{y:at_1\le|y-x|<at_2\}}d\mu(y)\int_0^{t_2-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds=I_1+I_2.$$

$$I_1=\sum_{j\in\mathrm{Z}_{t_1}^x}\int_{(j,j+1]}g(y)d\mu(y)+\int_{(x-at_1,[x-at_1]+1]}g(y)d\mu(y)+\int_{([x+at_1],x+at_1)}g(y)d\mu(y)=I_{11}+I_{12}+I_{13}.$$

Звідси

$$|I_{11}|\le \sum_{j\in Z_{t_1}^x}\left|\int_{(j,j+1]} g(y)d\mu(y)\right| \le \sum_{j\in Z_{t_1}^x}\left(\left|\int_{(j,j+1]} g_0^{(j)}(y)d\mu(y)\right| + \sum_{n\ge 1}\left|\int_{(j,j+1]} g_n^{(j)}(y)d\mu(y) - \int_{(j,j+1]} g_{n-1}^{(j)}(y)d\mu(y)\right|\right) \le$$

$$\le \sum_{j\in Z_{t_1}^x}|g(j)||\mu((j,j+1])| + \sum_{j\in Z_{t_1}^x}\left(\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le 2^n} 2^{n\beta}\left|g(d_{(k-1)n}^{(j)}) - g(d_{(k'-1)(n-1)}^{(j)})\right|^2\right)^{1/2} \times \left(\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le 2^n} 2^{-n\beta}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(j)}\right)\right|^2\right)^{1/2}.$$

Тут $\beta>0$ довільне, $k'$ обирається так, щоб $\Delta_{kn}^{(j)}\subset\Delta_{k'(n-1)}^{(j)}$, та використано нерівність Коші–Шварца. Далі, використовуючи **А4**, за допомогою заміни змінних прийшовши до інтегралів по одному проміжку, отримаємо $\left|g(d_{(k-1)n}^{(j)}) - g(d_{(k'-1)(n-1)}^{(j)})\right| \le C2^{-n\alpha}|t_2-t_1|$. Звідси

$$|I_{11}|\le C_\sigma|t_2-t_1|\sum_{j\in Z_{t_1}^x}|\mu((j,j+1])| + C|t_2-t_1|\left(\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le 2^n}2^{n(\beta-2\alpha)}\right)^{1/2}\times\sum_{j\in Z_{t_1}^x}\left(\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le 2^n}2^{-n\beta}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(j)}\right)\right|^2\right)^{1/2}\le$$

$$\le C|t_2-t_1|\left(\sum_{j\in Z}(|j|+1)^{2\tau}\left|\mu((j,j+1])\right|^2\right)^{1/2}\times\left(\sum_{j\in Z}(|j|+1)^{-2\tau}\right)^{1/2} + C|t_2-t_1|\left(\sum_{n\ge1}2^{n(\beta-2\alpha+1)}\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\sum_{j\in Z}\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le 2^n}(|j|+1)^{2\tau}2^{-n\beta}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(j)}\right)\right|^2\right)^{1/2}\times\left(\sum_{j\in Z}(|j|+1)^{-2\tau}\right)^{1/2}.$$

Обираємо $0<\beta<2\alpha-1$. В силу [7, Лема 3.1] суми зі стохастичними мірами з останньої нерівності будуть м.н. скінченними, бо мають вигляд $\sum_{l=1}^{\infty}\left(\int_X f_l d\mu\right)^2$, де $\{f_l(y), l\ge1\}=\{(|j|+1)^{\tau}\mathrm{I}_{(j,j+1]}(y), j\in Z\}$ та $\{f_l(y), l\ge1\}=\{2^{-n\beta/2}(|j|+1)^{\tau}\mathrm{I}_{\Delta_{kn}^{(j)}}(y), j\in Z, n\ge1, 1\le k\le 2^n\}$ у першому та другому доданках відповідно, а $\sum f_l$ інтегровні за $\mu$. Отже, на множині $y\in Z_{t_1}^x$ існує модифікація випадкового процесу $\tilde{u}(t)$, яка на $(j,j+1]$ має вигляд

$$\tilde{\tilde{u}}^{(j)}(t)=\int_{(j,j+1]}\tilde{g}_0^{(j)}(y)d\mu(y)+\sum_{n\ge1}\int_{(j,j+1]}\left(\tilde{g}_n^{(j)}(y)-\tilde{g}_{n-1}^{(j)}(y)\right)d\mu(y),$$

де $\tilde{g}_n^{(j)}(y)=\sum_{1\le k\le 2^n}\mathrm{I}_{\Delta_{kn}^{(j)}}(y)\int_0^{t-|d_{(k-1)n}^{(j)}-x|/a}\sigma(s,d_{(k-1)n}^{(j)})ds,\ y\in(j,j+1]$.

На множині $Z_{t_1}^x$ потрібну модифікацію будуємо у вигляді $\tilde{\tilde{u}}_{Z_{t_1}^x}(t)=\sum_{j\in Z_{t_1}^x}\tilde{\tilde{u}}^{(j)}(t)$. Таким чином, $\forall\omega\in\Omega$: $|I_{11}|\le C(\omega)|t_2-t_1|$. Зауважимо, що вибір такої модифікації не залежить від величин $t_1,t_2$.

Ліпшицевість $I_{12}$ та $I_{13}$ показується аналогічно, тільки замість розбиття $\sum_{j\in Z_{t_1}^x}$ одиничних проміжків виконується розбиття одного інтервалу довжини $\le 1$, а шукана модифікація процесу $\tilde{u}(t)$ будується аналогічним чином на множинах $(x-at_1,[x-at_1]+1]$ та $([x+at_1],x+at_1)$ відповідно.

Розглянемо тепер доданок $I_2$: $I_2=\int_{(x-at_2,x-at_1]}d\mu(y)\int_0^{t_2-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds+\int_{[x+at_1,x+at_2)}d\mu(y)\int_0^{t_2-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds=I_{21}+I_{22}$.

Також розбиватимемо кожен з інтервалів $(x-at_2,x-at_1],[x+at_1,x+at_2)$ на відрізки довжини $2^{-n}(t_2-t_1)$ та використовуватимемо представлення функції $\int_0^{t_2-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds$ за допомогою простих, побудованих на відповідних відрізках. Отже, враховуючи, що тут $0\le t_2-|y-x|/a\le|t_2-t_1|$, одержимо ліпшицевість $I_2$.

Таким чином, ми отримали, що $\exists C=C(\omega)>0$ та модифікація процесу $\tilde{u}(t)$ такі, що $\forall t_1,t_2\in[0,T]$: $|\tilde{\tilde{u}}(t_2)-\tilde{\tilde{u}}(t_1)|\le C(\omega)|t_2-t_1|\quad\forall\omega\in\Omega$.

**Лема 2.** Нехай для деякого $\tau>1/2$ функція $|y|^{\tau}$ інтегровна за загальною стохастичною мірою $\mu$ на $R$ та виконується припущення **А4**. Тоді для довільного $B>0$, довільних $\lambda\in(0,1-1/2\alpha)$ та фіксованого $t\in[0,T]$ випадковий процес $\hat{u}(x)=\int_{\{y:|y-x|<at\}}d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds,\ |x|\le B$ має гельдерову з показником $\lambda$ модифікацію.

***Доведення.*** Зафіксуємо довільні $t\in[0,T],\ x_1,x_2\in\{x\in R:|x|\le B\},\ x_1\ne x_2$. Нехай $q(y)=\int_{t-|y-x_1|/a}^{t-|y-x_2|/a}\sigma(s,y)ds,\ y\in R$.

Застосовуючи аналогічні міркування і позначення, що й при доведенні першої леми ( $\gamma > 0$ − довільне), одержимо

$$|\hat{u}(x_2)-\hat{u}(x_1)| = \left|\int_R d\mu(y)\int_{t-|y-x_1|/a}^{t-|y-x_2|/a}\sigma(s,y)ds\right| \le \sum_{j\in Z}|q(j)|\left|\mu\left((j,j+1]\right)\right| + \sum_{j\in Z}\left(\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le 2^n}2^{n\gamma}\left(q(d^{(j)}_{(k-1)n}) - q(d^{(j)}_{(k'-1)(n-1)})\right)^2\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left(\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le 2^n}2^{-n\gamma}\left|\mu\left(\Delta^{(j)}_{kn}\right)\right|^2\right)^{1/2}.$$

Далі, оцінюючи величину $J = \left|q(d^{(j)}_{(k-1)n}) - q(d^{(j)}_{(k'-1)(n-1)})\right|$, робимо заміну змінної в інтегралі $q(d^{(j)}{}_{(k'-1)(n-1)})$ так, щоб верхні межі співпадали, при цьому, нижні можуть не співпадати. У такому разі матимемо, що нижня межа другого інтеграла дорівнює: $t-|d^{(j)}_{(k'-1)(n-1)} - x_1|/a \pm 2^{-n}/a$. Звідси, враховуючи **A4** та обмеженість множини значень змінної $x$, матимемо

$$J = \left|\int_{t-|d^{(j)}_{(k-1)n}-x_1|/a}^{t-|d^{(j)}_{(k'-1)(n-1)}-x_1|/a\pm 2^{-n}/a}\sigma(s,d^{(j)}_{(k-1)n})ds + \int_{t-|d^{(j)}_{(k'-1)(n-1)}-x_1|/a\pm2^{-n}/a}^{t-|d^{(j)}_{(k-1)n}-x_2|/a}\sigma(s,d^{(j)}_{(k-1)n})ds - \int_{t-|d^{(j)}_{(k'-1)(n-1)}-x_1|/a\pm2^{-n}/a}^{t-|d^{(j)}_{(k-1)n}-x_2|/a}\sigma(s',d^{(j)}_{(k'-1)(n-1)})ds'\right| \le$$
$$\le C_\sigma 2\cdot 2^{-n}/a + K\left((2^{-n}/a)^\alpha + 2^{-n\alpha}\right)|x_2-x_1|/a \le 2^{-n\alpha}\left(C_\sigma 2/a + 2BK(1+a^\alpha)/a^{\alpha+1}\right) = C2^{-n\alpha}.$$

З іншого боку, $J \le C_\sigma 2|x_2 - x_1|/a$. Тому, перемноживши ці нерівності у степенях $1-\lambda$ та $\lambda$, де $\lambda\in(0,1)$ – довільне, одержимо, що виконується оцінка: $J \le C2^{-n\alpha(1-\lambda)}|x_2-x_1|^\lambda$.

Зауважимо, що можлива ситуація, коли верхня і нижня межі інтегрування в одному з інтегралів $q(d^{(j)}_{(k-1)n})$, $q(d^{(j)}_{(k'-1)(n-1)})$ співпадають. У такому випадку відповідний інтеграл рівний нулю. Нехай, наприклад, це буде $q(d^{(j)}_{(k-1)n})$, тоді $d^{(j)}_{(k-1)n} = (x_1+x_2)/2$, а для $J$ матимемо

$$J = \left|\int_{t-|d^{(j)}_{(k'-1)(n-1)}-2d^{(j)}_{(k-1)n}+x_2|/a}^{t-|d^{(j)}_{(k'-1)(n-1)}-x_2|/a}\sigma(s,d^{(j)}_{(k'-1)(n-1)})ds\right| \le C_\sigma 2\cdot 2^{-n}/a \le C2^{-n\alpha}.$$

Також справедлива і оцінка: $J \le C_\sigma|x_2-x_1|/a$. Отже, $J\le C2^{-n\alpha(1-\lambda)}|x_2-x_1|^\lambda$.

Таким чином, враховуючи зроблені вище оцінки, одержимо

$$\left|\hat{u}(x_2)-\hat{u}(x_1)\right| \le C|x_2-x_1|\sum_{j\in Z}|\mu((j,j+1])| + C|x_2-x_1|^\lambda\sum_{j\in Z}\left(\sum_{n\ge1}2^{n(\gamma-2\alpha(1-\lambda)+1)}\right)^{1/2}\times\left(\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le n}2^{-n\gamma}\left|\mu\left(\Delta^{(j)}_{kn}\right)\right|^2\right)^{1/2}\le$$
$$\le C|x_2-x_1|^\lambda\left(\sum_{j\in Z}(|j|+1)^{2\tau}\left|\mu\left((j,j+1]\right)\right|^2\right)^{1/2}\times\left(\sum_{j\in Z}(|j|+1)^{-2\tau}\right)^{1/2} + C|x_2-x_1|^\lambda\left(\sum_{n\ge1}2^{n(\gamma-2\alpha(1-\lambda)+1)}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left(\sum_{j\in Z}\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le 2^n}(|j|+1)^{2\tau}2^{-n\gamma}\left|\mu\left(\Delta^{(j)}_{kn}\right)\right|^2\right)^{1/2}\times\left(\sum_{j\in Z}(|j|+1)^{-2\tau}\right)^{1/2}.$$

Обравши $\lambda\in(0,1)$ та $\gamma>0$ так, щоб $\gamma-2\alpha(1-\lambda)+1<0$ (при цьому $0<\lambda<1-\frac{\gamma+1}{2\alpha}$), та застосувавши [7, Лема 3.1] до сум зі стохастичними мірами, які мають вигляд $\sum_{l=1}^\infty(\int_X f_l d\mu)^2$, де $\{f_l(y), l\ge1\} = \{(|j|+1)^\tau \mathrm{I}_{[j,j+1]}(y), j\in Z\}$ та $\{f_l(y), l\ge1\} = \{2^{-n\gamma/2}(|j|+1)^\tau \mathrm{I}_{\Delta^{(j)}_{kn}}(y), j\in Z, n\ge1, 1\le k\le 2^n\}$ у першому та другому доданках відповідно, а $\sum f_l$ інтегровні за $\mu$, ми отримаємо твердження леми.

### 3. Основний результат

**Теорема.** Нехай виконуються припущення **A1 − A4**. Тоді

1) задача (1) має розв'язок $u(t,x)$. Якщо $v(t,x)$ − інший розв'язок задачі (1), то для всіх $t,x$ $u(t,x)=v(t,x)$ м.н.;

2) якщо функція $|y|^\tau$ інтегровна за $\mu$ на $R$ для деякого $\tau>1/2$, то $\forall B>0, \lambda<1-1/2\alpha$ випадковий процес $u(t,x)$ має ліпшицеву за змінною $t\in[0,T]$ та гельдерову за $x\in\{x\in R: |x|\le B\}$ з показником $\lambda$ модифікацію.

3) якщо функція $|y|^\tau$ інтегровна за $\mu$ на $R$ для деякого $\tau>1/2$, то випадковий процес $u(t,x)$ має неперервно залежну від даних задачі модифікацію.

***Доведення.*** 1) Існування та єдиність розв'язку. Покажемо, що рівняння (1) має розв'язок. Для цього побудуємо його за допомогою процесу ітерації. Покладемо $u^{(0)}(t,x)=0$ та $\forall n\ge0$:

$$u^{(n+1)}(t,x)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}v_0(y)dy+\frac{1}{2}\left(u_0(x+at)+u_0(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}f(s,y,u^{(n)}(s,y))dy+\frac{1}{2a}\int_{\{y:|y-x|<at\}}d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds.$$

Вимірність такого процесу випливає з вимірності процесів $v_0, u_0$, теореми Фубіні (для першого і третього доданків) та [2, Лема 2] і представлення інтеграла за випадковою мірою у вигляді границі за ймовірністю інтегралів від простих функцій. Надалі ми беремо $\forall n,t,x$ одну і ту саму модифікацію стохастичного інтеграла і тому наступні оцінки виконуватимуться $\forall\omega\in\Omega$. За припущенням **А3** маємо

$$\left|u^{(n+1)}(t,x)-u^{(n)}(t,x)\right|\le\frac{L_f}{2a}\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\left|u^{(n)}(s,y)-u^{(n-1)}(s,y)\right|dy\,;\ \left|u^{(2)}(t,x)-u^{(1)}(t,x)\right|\le C_f t^2\,.$$

Позначимо $U_n(t)=\sup_{x\in R}\left|u^{(n+1)}(t,x)-u^{(n)}(t,x)\right|,\ n\ge1$. Використовуючи попередні оцінки, за індукцією одержимо:

$$U_n(t)\le L_f\int_0^t(t-s)U_{n-1}(s)ds\le 2C_f(L_f)^{n-1}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\,.$$

А, отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t)$ збігається рівномірно на $[0,T]$. Тому, поклавши $u(t,x)=\lim_{n\to\infty}u^{(n)}(t,x)$, де границя є границею збіжності м.н., отримаємо шуканий розв'язок.

Тепер покажемо єдиність. Нехай маємо два розв'язки рівняння (1) — $u(t,x), v(t,x)$. Тоді

$$u(t,x)-v(t,x)=(2a)^{-1}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\left(f(s,y,u(s,y))-f(s,y,v(s,y))\right)dyds\,.$$

Застосувавши аналогічні проведеним вище міркування, матимемо, що $|u(t,x)-v(t,x)|=0$ м.н.

2) Спочатку доведемо ліпшицевість. Нехай $x\in R,\ t_1,t_2\in[0,T],t_1<t_2$ − фіксовані, тоді за **А1 — А4** та Лемою 1:

$$|u(t_2,x)-u(t_1,x)|\le\frac{1}{2a}\left|\int_{x+at_1}^{x+at_2}v_0(y)dy-\int_{x-at_1}^{x-at_2}v_0(y)dy\right|+\frac{1}{2}\left(\left|u_0(x+at_2)-u_0(x+at_1)\right|+\left|u_0(x-at_2)-u_0(x-at_1)\right|\right)+$$

$$+\frac{1}{2a}\left|\int_{t_1}^{t_2}ds\int_{x-a(t_2-s)}^{x+a(t_2-s)}f(s,y,u(s,y))dy+\int_0^{t_1}ds\int_{x+a(t_1-s)}^{x+a(t_2-s)}f(s,y,u(s,y))dy-\int_0^{t_1}ds\int_{x-a(t_1-s)}^{x-a(t_2-s)}f(s,y,u(s,y))dy\right|+\frac{1}{2a}\left|\int_R d\mu(y)\int_{t_1-|y-x|/a}^{t_2-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds\right|\le$$

$$\le|t_2-t_1|\left(C_{v_0}(\omega)+aL_{u_0}(\omega)+\frac{3}{2}TL_f+C(\omega)\right)=L(\omega)|t_2-t_1|\ \text{(м.н.)}$$

Аналогічно покажемо, що існує неперервна за Гельдером за змінною $x$, $|x|\le B$ модифікація випадкового процесу, який є розв'язком рівняння (1). Так, застосувавши Лему 2 та використавши припущення **А1 — А4** і обмеженість $x$, матимемо для довільного $0<\lambda<1-1/2\alpha$, для довільних фіксованих $t\in[0,T],B>0,\ x_1,x_2\in\{x\in R:|x|\le B\},x_1<x_2$:

$$|u(t,x_2)-u(t,x_1)|\le\frac{1}{2a}\left|\int_{x_1+at}^{x_2+at}v_0(y)dy-\int_{x_1-at}^{x_2-at}v_0(y)dy\right|+\frac{1}{2}\left(\left|u_0(x_2+at)-u_0(x_1+at)\right|+\left|u_0(x_2-at)-u_0(x_1-at)\right|\right)+$$

$$+\frac{1}{2a}\left|\int_0^t ds\left(\int_{x_1+a(t-s)}^{x_2+a(t-s)}f(s,y,u(s,y))dy-\int_{x_1-a(t-s)}^{x_2-a(t-s)}f(s,y,u(s,y))dy\right)\right|+\frac{1}{2a}\left|\int_R d\mu(y)\int_{t-|y-x_1|/a}^{t-|y-x_2|/a}\sigma(s,y)ds\right|\le\frac{C_{v_0}(\omega)}{a}|x_2-x_1|+$$

$$+L_{u_0}(\omega)|x_2-x_1|+\frac{TC_f}{a}|x_2-x_1|+\frac{C_1(\omega)}{2a}|x_2-x_1|^{\lambda}\le H(\omega)|x_2-x_1|^{\lambda}\ \text{(м.н.)},$$

де $C_1(\omega)>0$ — стала гельдеровості процесу $\hat{u}(t,x)$.

3) Під неперервною залежністю розв'язку задачі (1) від даних розуміється наступне. Нехай маємо такі задачі Коші для хвильового рівняння:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u_i(t,x)}{\partial t^2}=a^2\Delta_x u_i(t,x)+f_i(t,x,u_i(t,x))+\sigma_i(t,x)\dot{\mu}(x),\\ u_i(0,x)=u_{0i}(x),\qquad \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(t,x)=v_{0i}(x),\ i=1,2;\end{cases}\tag{2}$$

де $(t,x)\in[0,T]\times R,\ T>0,\ a>0$, а розв'язок розглядається у м'якому сенсі. Нехай функції $v_{0i},u_{0i},f_i,\sigma_i, i=1,2$ задовольняють умови **А1) — А4)** відповідно та $\exists\delta>0$ таке, що $\forall(t,x)\in[0,T]\times R,\forall v\in R$:

$$|u_{01}(x)-u_{02}(x)|<\delta\ \text{м.н.},\ |v_{01}(x)-v_{02}(x)|<\delta\ \text{м.н.},\ |\sigma_1(t,x)-\sigma_2(t,x)|<\delta,\ \ |f_1(t,x,v)-f_2(t,x,v)|<\delta\,.\tag{3}$$

Тоді $\forall\rho\in(0,1/2)\ \ \exists Q=Q(\omega)>0,$ що $\forall(t,x)\in[0,T]\times R:\ |u_1(t,x)-u_2(t,x)|<Q(\omega)\delta^{\rho}$ м.н.

Покажемо це. За доведеним вище, існує єдиний розв'язок кожної з задач (2), який можна побудувати за допомогою процесу ітерації. Нехай $u_i^{(n)}(t,x), n\ge0$ — відповідне $n$-те наближення розв'язку $u_i(t,x)$ таким процесом. Тоді

$|u_1(t,x)-u_2(t,x)|=\lim_{n\to\infty}|u_1^{(n)}(t,x)-u_2^{(n)}(t,x)|$, де границя є границею збіжності м.н. Надалі ми обиратимемо для всіх $n,t,x$ одну і ту ж модифікацію стохастичного інтеграла і матимемо виконання наступних рівностей $\forall\omega\in\Omega$.

Отже, враховуючи припущення **A1) — A4)** та умови (3), матимемо $|u_1^{(n)}(t,x)-u_2^{(n)}(t,x)|\le\delta(1+t+t^2/2)+$ $+\frac{L_f}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}|u_1^{(n-1)}(s,y)-u_2^{(n-1)}(s,y)|dyds+\frac{1}{2a}\left|\int_{(x-at,x+at)}d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}(\sigma_1(s,t)-\sigma_2(s,t))ds\right|$.

Розглянемо окремо інтеграл за стохастичною мірою. Покладемо $G(y)=\int_0^{t-|y-x|/a}(\sigma_1(s,y)-\sigma_2(s,y))ds,\ y\in R$. Аналогічно до міркувань доведення Леми 1, ми будуємо наближення функції $G(y)$ простими та відповідним чином представляємо стохастичний інтеграл, як границю інтегралів від простих функцій. Одержимо

$$\left|\int_{(x-at,x+at)}G(y)d\mu(y)\right|\le\sum_{j\in Z_t^x}\left|\int_{(j,j+1]}G(y)d\mu(y)\right|+\left|\int_{(x-at,[x-at]+1]}G(y)d\mu(y)\right|+\left|\int_{([x+at],x+at)}G(y)d\mu(y)\right|\le\tilde{C}\delta^{\rho},$$

де $\tilde{C}=\tilde{C}(\omega,T,K,\alpha,a)$.

Таким чином, маємо за індукцією

$$|u_1^{(n)}(t,x)-u_2^{(n)}(t,x)|\le\delta(1+t+t^2/2)+\frac{1}{2a}\tilde{C}\delta^{\rho}+\frac{L_f}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}|u_1^{(n-1)}(s,y)-u_2^{(n-1)}(s,y)|dyds\le\delta^{\rho}C(1+t+t^2/2)+$$

$$+\delta^{\rho}CL_f\left(\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}\right)+\ldots+\delta^{\rho}CL_f^{n-1}\left(\frac{t^{2(n-1)}}{(2n-2)!}+\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{t^{2n}}{(2n)!}\right)\le\delta^{\rho}C\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{L_f^k t^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{L_f^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{L_f^k t^{2k+2}}{(2k+2)!}\right)\le$$

$$\le\delta^{\rho}Ce^{T\sqrt{L_f}}\left(1+L_f^{-1/2}+L_f^{-1}\right)\le Q(\omega)\delta^{\rho}.$$

Звідси для всіх $x\in R,t\in[0,T]$ виконується: $|u_1(t,x)-u_2(t,x)|\le Q(\omega)\delta^{\rho}$ м.н.

### 4. Висновки

Досліджено задачу Коші для хвильового рівняння, породженого загальною стохастичною мірою. Показано існування та єдиність м'якого розв'язку, встановлено його регулярність та неперервну залежність від даних.

1. Радченко Вадим Николаевич. Интегралы по общим случайным мерам / В.Н. Радченко // Труды Института математики НАН Украины. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – Т. 27. – 196 с. – ISBN 966-02-1386-7. 2. Радченко Вадим Николаевич. Об определении интеграла от случайной функции / В.Н. Радченко // Теория вероятностей и ее применения. – Москва: "Наука", 1996. – № 3. – С. 677–682. – ISSN 0040-361X. 3. Радченко Вадим Николаевич. Уравнение теплопроводности и волновое уравнение с общими случайными мерами / В.Н. Радченко // Український математичний журнал. – К.: Ін-т математики НАН України, 2008. – Т. 60, № 12. – С. 1675–1685. – ISSN 1027-3190. 4. Barbu V. Stochastic wave equations with dissipative damping / V. Barbu, G. Da Prato, L. Tubaro // Stochastic Process. Appl. – 2007. – Vol. 117, № 8. – P. 1001–1013. – ISSN 0304-4149. 5. Kwapien S. Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple / S. Kwapien, W.A. Woyczinski. – Boston: Birkhäuser, 1992. – ISBN 0-8176-3572-6. 6. Millet A. On a non linear stochastic wave equation in the plane: existence and uniqueness of the solution / A. Millet, P. Morien // Ann. Appl. Probab. – 2001. – Vol. 11 – P. 922–951. – ISSN 1050-5164. 7. Radchenko V.M. Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure / V.M. Radchenko // Studia Math. – 2009. – Vol. 194, № 3. – P. 231–251. – ISSN 1730-6337.

Надійшла до редколегії 12.04.10

УДК 519.21

З. Вижва, канд. фіз.-мат. наук, А. Вижва, студ.

## ПРО СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

***Розглянуто задачу статистичного моделювання реалізацій стаціонарних випадкових процесів на основі їх спектрального розкладу. Обчислено спектральні коефіцієнти для практично важливих кореляційних функцій випадкових процесів такого типу. Наведено теорему про середньоквадратичну оцінку апроксимації стаціонарних періодичних випадкових процесів частковими сумами ряду. Побудовано модель та сформульовано алгоритм статистичного моделювання реалізацій стаціонарних випадкових процесів.***

***The problem of statistical simulation of stationary random processes realizations has been considered, which was build on the base of it spectral decomposition. It has been calculated the spectral coefficients for the typical random fields examples. It has been give the theorem about the mean – square estimator of this random fields approximation by the partial sums. It has been constructed the model and statistical simulation of stationary random processes algorithm.***

### 1. Вступ

Методи чисельного моделювання (методи Монте-Карло) випадкових процесів у зв'язку із стрімким розвитком комп'ютерної техніки поширили свої напрямки застосування в різних галузях природничих та соціальних наук, таких, як геологія, метеорологія, радіотехніка, статистична радіофізика, ядерна фізика, соціологія, фінансова математика та інші.

За допомогою метода Монте-Карло можна згенерувати на ком'ютері реалізації випадкових процесів, для яких отримано засобами статистичної обробки необхідну інформацію. А саме, якщо процес гауссівський, то необхідно знати його математичне сподівання та кореляційну функцію. Якщо такі статистичні характеристики відомі для негауссівської випадкової функції, то цього може бути досить при розв'язанні задач, де суттєві лише ефекти, що пов'язані з моментами не вище другого порядку. Також важливо вміти зводити нестаціонарні випадкові процеси до стаціонарних шляхом виділення детермінованої складової – так званого тренда, оскільки запропонований алгоритм розроблений тільки для такого типу процесів.