5. Висновки

У статті отримано формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної лінійної оцінки функціоналу $A\zeta$ від невідомих значень періодично корельованої послідовності за спостереженнями, які забруднені шумом. Задача розв'язана для двох випадків: матриці спектральних щільностей послідовності та шуму – відомі, та матриці спектральних щільностей точно невідомі, але задана множина допустимих спектральних щільностей.

1. *Гладышев Е. Г.* О периодически коррелированных случайных последовательностях // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 137, № 5. – С. 1024–1030. 2. *Колмогоров А. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник статей. – М.: Наука, 1986. 3. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. – М.: Наука, 1990. – 272 с. 4. *Grenander U.* A prediction problem in game theory // Ark. Mat. – 1957. – № 3. – P. 371–379. 5. *Hurd H. L., Miamee A.* Periodically correlated random sequences. – John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2007. 6. *Moklyachuk M. P., Masyutka O. Yu.* Extrapolation of multidimensional stationary processes // Random Operators and Stochastic Equations. – 2006. – № 14. – P. 233–244. 7. *Moklyachuk M. P.* Robust prediction problem for periodically correlated stochastic sequences // 5th Conference in Actuarial Science and Finance on Samos, Proceedings. – 2009. – P. 51–65. 8. *Wiener N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary line series. Whis engineering applications. – Cambridge, Mass.: The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, 1966. 9. *Yaglom A. M.* Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results. – Springer Series in Statistics. – New York etc.: Springer-Verlag, 1987. 10. *Yaglom A. M.* Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 2: Suplementary notes and references. – Springer Series in Statistics. – New York etc.: Springer-Verlag, 1987.

Надійшла до редколегії 20.12.2010 р.

УДК 519.21

М. Луз, студ.

ФІЛЬТРИ ВІНЕРА-КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ

Отримано оптимальні в середньоквадратичному сенсі лінійні оцінки значення стаціонарного випадкового процесу та інтегрального функціонала від значень за спостереженнями стаціонарного випадкового процесу з шумом у дискретні моменти часу.

We propose the mean-square optimal linear estimate of values of stationary stochastic process and integral functional from values based on the sample of stationary stochastic process with noise at discrete moments of time.

1. Вступ

Задача оцінювання стаціонарних у широкому сенсі випадкових процесів вперше поставлена та досліджена у працях Н. Вінера та А. М. Колмогорова в першій половині минулого століття. Основні результати теорії прогнозування стосуються процесів з неперервним або дискретним часом. Такі процеси мають широке застосування у промисловості, економетриці, радіофізиці. Проте часто на практиці отримати спостереження деякого процесу можливо лише через великі проміжки часу, натомість необхідно знаходити оптимальні прогнози у довідльні моменти часу.

У даній статті розв'язано задачу знаходження оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного прогнозу значення стаціонарного в широкому сенсі випадкового процесу, а також лінійного функціоналу від нього, за спостереженнями з шумом через дискретні проміжки часу.

2. Прогноз значення процесу за спостереженнями з шумом

Розглянемо незалежні стаціонарні в широкому сенсі випадкові процеси $\{X_t : t\in\mathbb{R}\}$ та $\{Y_t : t\in\mathbb{R}\}$ з середніми 0 та коваріаційними функціями $R_X(t)$, $R_Y(t)$, які допускать спектральні розклади

$$R_X(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}F(d\lambda)=\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}f(\lambda)d\lambda,\quad R_Y(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}G(d\lambda)=\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}g(\lambda)d\lambda .$$

Припустимо, що відомі значення процесу $\{X_t+Y_t : t\in\mathbb{R}\}$ в точках $t=-1,-2,\dots$, за якими необхідно побудувати оптимальний в середньоквадратичному сенсі лінійний прогноз значення X_t, $t>0$.

Спектральну щільність послідовності $\{X_n : n\in\mathbb{Z}\}$ можна отримати наступним чином

$$R(n)=\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda n}f(\lambda)d\lambda=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k} e^{i\lambda n}f(\lambda)d\lambda=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\mu n}f(\mu+2\pi k)d\mu=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\mu n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(\mu+2\pi k)d\mu=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\mu n}\tilde f(\mu)d\mu ,$$

тобто $\tilde f(\mu)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\mu+2\pi k)$, де $\mu\in(-\pi,\pi]$, – спектральна щільність випадкової послідовності $\{X_n : n\in\mathbb{Z}\}$.

Випадкові процеси $\{X_t\}$, $\{Y_t\}$ допускають спектральні розклади $X_t=\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}Z_X(d\lambda)$, $Y_t=\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}Z_Y(d\lambda)$. Тому шуканий прогноз можна подати у вигляді $\hat X_t=\int_{\mathbb{R}}\hat\varphi_t(\lambda)(Z_X+Z_Y)(d\lambda)$.

Нехай $H_-(X+Y)=L_2^-(X+Y)$ – замкнутий в середньоквадратичному сенсі лінійний підпростір, породжений $X^-=(\dots,X_{-2}+Y_{-2},X_{-1}+Y_{-1})$, а $H_-(F+G)=L_2^-(F+G)$ – замкнений в середньоквадратичному сенсі лінійний підпростір, породжений елементами $(\dots,e^{-2\lambda},e^{-i\lambda})$.

Треба мінімізувати величину $\mathbf{E}|X_t-\tilde X_t|^2$, $\tilde X_t\in H_-(X+Y)$. Оскільки $H(X+Y)$ – гільбертів простір [2], то даний мінімум досягається на елементі $\hat X_t$, який задовольняє наступні умови:

1) $\hat X_t\in H_-(X+Y)$;

2) $(\hat X_t-X_t)\perp H_-(X+Y)$.

За другою умовою при кожному $n \le -1$ маємо

$$0 = \mathbf{E}(X_t - \hat{X}_t)(\overline{X}_n + \overline{Y}_n) = \int_{\mathbb{R}} (e^{i\lambda t} - \hat{\varphi}_t(\lambda))e^{-i\lambda n} f(\lambda)d\lambda - \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}_t(\lambda)e^{-i\lambda n} g(\lambda)d\lambda =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{i(\mu+2\pi k)t} - \hat{\varphi}_t(\mu)\right) e^{-i\mu n} f(\mu + 2\pi k)d\mu - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\varphi}_t(\mu)e^{-i\lambda n} g(\mu + 2\pi k)d\mu.$$

Позначимо

$$F(\mu,t) = e^{i\mu t} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ikt} f(\mu + 2\pi k), \quad G(\mu,t) = e^{i\mu t} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ikt} g(\mu + 2\pi k), \quad \mu \in (-\pi, \pi]. \tag{1}$$

Тоді маємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} (F(\mu,t) - \hat{\varphi}_t(\mu)F(\mu,0))e^{-i\mu n}d\mu - \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\varphi}_t(\mu)e^{-i\mu n}G(\mu,0)d\mu =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (F(\mu,t) - \hat{\varphi}_t(\mu)(F(\mu,0) + G(\mu,0)))\overline{e^{i\lambda n}}d\mu = 0, \quad n \le -1.$$

Оскільки набір функцій $\{e^{i\mu t} / \sqrt{2\pi} : n \in \mathbb{Z}\}$ в просторі $L_2(-\pi, \pi]$ утворює ортонормовану систему, маємо наступний розклад в ряд Фур'є: $F(\mu,t) - \hat{\varphi}_t(\mu)(F(\mu,0) + G(\mu,0)) = \sum_{m=0}^{+\infty} r_m e^{i\mu m}$, тобто

$$\hat{\varphi}_t(\mu) = \frac{F(\mu,t) - \sum_{m=0}^{+\infty} r_m e^{i\mu m}}{F(\mu,0) + G(\mu,0)}, \quad \mu \in (-\pi, \pi].$$

За умовою 1) $\hat{X}_t \in H_-(X+Y)$, $\hat{\varphi}_t(\mu) \in H_-(F+G)$, тобто при кожному $n \ge 0$ виконуються рівності

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(\mu,t) - \sum_{m=0}^{+\infty} r_m e^{i\mu m}}{F(\mu,0) + G(\mu,0)} \overline{e^{i\mu n}} (F(\mu,0) + G(\mu,0))d\mu = 0$, а отже $\int_{-\pi}^{\pi} F(\mu,t)e^{-i\mu n}d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} r_m e^{i\mu(m-n)}d\mu.$

Нехай $F(\mu,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k e^{i\mu k}$. Тоді $r_m = f_m$, $m \ge 0$. Звідси

$$\hat{\varphi}_t(\mu) = \frac{\sum_{k=-\infty}^{-1} f_k e^{i\mu k}}{F(\mu,0) + G(\mu,0)} = \frac{[F(\mu,t)]_-}{F(\mu,0) + G(\mu,0)}, \quad \mu \in (-\pi, \pi].$$

Обчислимо середньоквадратичну похибку прогнозу. Маємо

$$\sigma^2 = \mathbf{E}|X_t - \hat{X}_t|^2 = \mathbf{E}(X_t - \hat{X}_t)(\overline{X_t} - \overline{\hat{X}_t}) = \mathsf{E}(X_t - \hat{X}_t)\overline{X}_t =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\lambda t} - \frac{[F(\mu,t)]_-}{F(\mu,0) + G(\mu,0)} \right) e^{-i\lambda t} f(\lambda)d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \left(F(\mu,0) - \frac{F(\mu,-t)[F(\mu,t)]_-}{F(\mu,0) + G(\mu,0)} \right) d\mu. \tag{2}$$

Таким чином, доведено теорему.

Теорема 1. *Нехай стаціонарні послідовності* $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ *є регулярними. Тоді оптимальна у середньому квадратичному сенсі лінійна оцінка* $\hat{X}_t$ *значення* X_t *у момент часу* $t > 0$ *стаціонарного процесу* $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ *за спостереженнями* $\{\ldots, X_{-2} + Y_{-2}, X_{-1} + Y_{-1}\}$ *задається у вигляді*

$$\hat{X}_t = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\varphi}_t(\mu)(Z_x + Z_Y)(d\mu), \quad \hat{\varphi}_t(\mu) = \frac{[F(\mu,t)]_-}{F(\mu,0) + G(\mu,0)},$$

де функції $F(\mu,t)$, $F(\mu,0)$, $G(\mu,0)$ *визначені в (1).*

Середньоквадратична похибка прогнозу визначається з (2).

Приклад 1. Розглянемо спектральну щільність $f(\lambda) = e^{-|\lambda|}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Для неї маємо

$$F(\mu,t) = e^{i\mu t} \left(e^{-|\mu|} + \frac{2\mathrm{ch}(2\pi it - \mu) - 2e^{-2\pi}\mathrm{ch}(\mu)}{2\mathrm{ch}(2\pi) - \cos 2\pi t} \right).$$

Припустимо, що $G(\mu,0) = \frac{1}{2\pi}$. Тоді спектральна характеристика прогнозу обчислюється згідно формули

$$\hat{\varphi}_t(\mu) = \left[e^{i\mu t} \left(e^{-|\mu|} + \frac{2\mathrm{ch}(2\pi it - \mu) - 2e^{-2\pi}\mathrm{ch}(\mu)}{2\mathrm{ch}(2\pi) - \cos 2\pi t} \right) \right]_- \left(e^{-|\mu|} + 2\mathrm{ch}(\mu)\frac{1 - e^{-2\pi}}{2\mathrm{ch}(2\pi) - 1} + \frac{1}{2\pi} \right)^{-1}.$$

3. Оцінювання інтеграла від стаціонарного процесу за спостереженнями з шумом

Розглянемо задачу оцінювання функціонала

$$A(t,h)=\int_t^{t+h} X_s a(s-t)ds, \quad h>0, t>0, \quad \int_0^h |a(s)|\,ds<\infty,$$

за спостереженнями $\{\dots, X_{-2}+Y_{-2}, X_{-1}+Y_{-1}\}$.

Будемо шукати оцінку у вигляді $\hat{A}(t,h)=\int_{\mathbb{R}}\hat{\varphi}_{t,h}(\lambda)(Z_X+Z_Y)(d\lambda)$.

Позначимо $\varphi_{t,h}(\lambda)=\int_t^{t+h} e^{i\lambda s}a(s-t)ds, \quad \lambda\in\mathbb{R}$. Тоді $A(t,h)=\int_{\mathbb{R}}\varphi_{t,h}(\lambda)Z_X(d\lambda)$. Необхідно мінімізувати значення $\sigma^2=\mathbf{E}|A(t,h)-\hat{A}(t,h)|^2$. Нехай мінімум досягається на елементі $\hat{A}(t,h)\in H_-(X+Y)$. При цьому виконується умова ортогональності $(A(t,h)-\hat{A}(t,h))\perp H_-(X+Y)$, тобто при кожному $n\le -1$ маємо

$$0=\mathbf{E}(A(t,h)-\hat{A}(t,h))(\overline{X}_n+\overline{Y}_n)=\int_{\mathbb{R}}(\varphi_{t,h}(\lambda)-\hat{\varphi}_{t,h}(\lambda))e^{-i\lambda n}f(\lambda)d\lambda-\int_{-\pi}^{\pi}\hat{\varphi}_{t,h}(\lambda)e^{-i\lambda n}g(\lambda)d\lambda.$$

Позначимо $S(t,h,\mu)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_{t,h}(\mu+2\pi k)f(\mu+2\pi k)=\int_t^{t+h}F(\mu,s)a(s-t)ds, \quad \mu\in(-\pi,\pi]$.

Нехай $F(\mu,t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}f_k(t)e^{i\mu k}$, тоді маємо наступне співвідношення:

$$S(t,h,\mu)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\int_t^{t+h}f_k(s)a(s-t)ds\right)e^{i\mu k}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}s_k e^{i\mu k}.$$

Використовуючи умову ортогональності, аналогічно попередньому пункту отримаємо

$$\hat{\varphi}_{t,h}(\lambda)=\frac{S(t,h,\mu)-\sum_{m\ge 0}q_m e^{i\mu m}}{F(\mu,0)+G(\mu,0)}, \quad \mu\in(-\pi,\pi].$$

Оскільки $\hat{A}(t,h)\in H_-(X+Y)$, то $\hat{\varphi}_{t,h}(\mu)\in H_-(F+G)$, звідки при кожному $n\ge 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\hat{\varphi}_{t,h}(\mu)e^{-i\mu n}(F(\mu,0)+G(\mu,0))=0, \quad \hat{\varphi}_{t,h}(\mu)=\frac{[S(t,h,\mu)]_-}{F(\mu,0)+G(\mu,0)}, \quad [S(t,h,\mu)]_-=\sum_{k=-\infty}^{-1}s_k e^{i\mu k}.$$

Зауважимо, що

$$[S(t,h,\mu)]_-=\int_t^{t+h}[F(\mu,s)]_- a(s-t)ds. \tag{3}$$

Обчислимо середньоквадратичну похибку прогнозу. Маємо

$$\sigma^2=\mathbf{E}|A(t,h)-\hat{A}(t,h)|^2=\mathbf{E}(A(t,h)-\hat{A}(t,h))\overline{A(t,h)}=$$

$$=\int_{\mathbb{R}}(\varphi_{t,h}(\lambda)-\hat{\varphi}_{t,h}(\lambda))\overline{\varphi_{t,h}(\lambda)}f(\lambda)d\lambda=\int_{\mathbb{R}}(|\varphi_{t,h}(\lambda)|^2 f(\lambda)-\hat{\varphi}_{t,h}(\lambda)\overline{\varphi_{t,h}(\lambda)}f(\lambda))d\lambda.$$

$$|\varphi_{t,h}(\lambda)|^2=\int_{[t,t+h]^2}e^{i\lambda(s-y)}a(s-t)a(y-t)dyds.$$

Позначимо $B(t,h,\mu)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\varphi_{t,h}(\mu+2\pi k)|^2 f(\mu+2\pi k)=\int_{[t,t+h]^2}F(\mu,s-y)a(s-t)a(y-t)dyds, \mu\in(-\pi,\pi]$.

Таким чином, отримали наступні співвідношення

$$\sigma^2=\int_{-\pi}^{\pi}(B(t,h,\mu)-\hat{\varphi}_{t,h}(\mu)\,\overline{S(t,h,\mu)})d\mu=\int_{-\pi}^{\pi}B(t,h,\mu)d\mu-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[S(t,h,\mu)]_0\overline{S(t,h,\mu)}}{F(\mu,0)+G(\mu,0)}d\mu,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}B(t,h,\mu)d\mu=\int_{[t,t+h]^2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}F(\mu,s-y)d\mu\right)a(s-t)a(y-t)dyds=\int_{[t,t+h]^2}f_0(s-y)a(s-t)a(y-t)dyds,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[S(t,h,\mu)]_0\overline{S(t,h,\mu)}}{F(\mu,0)+G(\mu,0))}d\mu=\int_{[t,t+h]^2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[F(\mu,s)]_0F(\mu,-y)}{F(\mu,0)+G(\mu,0)}d\mu\right)a(s-t)a(y-t)dyds.$$

Остаточна формула для обчислення середньоквадратичної похибки має вигляд

$$\sigma^2=\int_{[t,t+h]^2}\left(f_0(s-y)-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[F(\mu,s)]_0F(\mu,-y)}{F(\mu,0)+g(\mu)}d\mu\right)a(s-t)a(y-t)dyds. \tag{4}$$

Теорема 2. *Нехай стаціонарні послідовності* $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ *є регулярними,* $\int_0^h |a(s)|\,ds < \infty$. *Тоді оптимальна у середньому квадратичному сенсі лінійна оцінка* $\hat{A}(t,h)$ *значення функціонала* $A(t,h)$ *у момент часу* $t > 0$ *від стаціонарного процесу* $\{X_t : t \in R\}$ *за спостереженнями* $\{\ldots, X_{-2} + Y_{-2}, X_{-1} + Y_{-1}\}$ *задається у вигляді*

$$\hat{A}(t,h) = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\varphi}_{t,h}(\mu)(Z_X + Z_Y)(d\mu), \quad \hat{\varphi}_{t,h}(\mu) = \frac{[S(t,h,\mu)]_-}{F(\mu,0) + G(\mu,0)}.$$

Середньоквадратична похибка прогнозу визначається з (4).

Приклад 2. Розглянемо спектральну щільність з прикладу 1. Знайдемо прогноз значення функціоналів

$$A_1(t,h) = \int_t^{t+h} X_s ds, \quad h > 0, t > 0, \quad A_2(t,h) = \int_t^{t+h} X_s e^{-(s-t)} ds, \quad h > 0, t > 0.$$

Зі співвідношення (3) отримаємо $[S_1(t,h,\mu)]_- = \int_t^{t+h} [F(\mu,s)]_- ds$, $[S_2(t,h,\mu)]_- = \int_t^{t+h} [F(\mu,s)]_- e^{-(t-s)} ds$,

$$\hat{A}_1(t,h) = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\varphi}^1_{t,h}(\mu)(Z_X + Z_Y)(d\mu), \quad \hat{\varphi}^1_{t,h}(\mu) = \frac{\int_t^{t+h} [F(\mu,s)]_- ds}{F(\mu,0) + G(\mu,0)},$$

$$\hat{A}_2(t,h) = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\varphi}^2_{t,h}(\mu)(Z_X + Z_Y)(d\mu), \quad \hat{\varphi}^2_{t,h}(\mu) = \frac{\int_t^{t+h} [F(\mu,s)]_- e^{t-s} ds}{F(\mu,0) + G(\mu,0)},$$

Тут використано функції $F(\mu,t)$, $F(\mu,0)$, що знайдені в прикладі 1, $G(\mu,0) = \frac{1}{2\pi}$.

4. Висновки

Отримано оптимальні в середньоквадратичному сенсі лінійні прогнози значенння X_t, $t > 0$, стаціонарного в широкому сенсі випадкового процесу та функціонала

$$A(t,h) = \int_t^{t+h} X_s a(s-t) ds, \quad h > 0, t > 0.$$

за спостереженнями з забрудненням у дискретні моменти часу.

1. *Карташов М. В.* Імовірність, процеси, статистика: Посібник. – К.: ВПЦ "Київський ун-тет", 2008. – 494 с. 2. *Ширяев А. Н.* Вероятность: В 2-х кн. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: МЦНМО, 2004. – 520 с.

Надійшла до редколегії 22.12.2010 р.

УДК 519.21

В. Радченко, д-р фіз.-мат. наук, Д. Городня, асп.

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ КОШІ ДЛЯ ХВИЛЬОВИХ РІВНЯНЬ ІЗ СТОХАСТИЧНИМИ МІРАМИ

Розглядаються хвильові рівняння, що мають постійні коефіцієнти і містять доданок, заданий інтегралом із стохастичною мірою. Наведено розв'язки цих рівнянь.

We consider wave equations having constant coefficients and also a term given by integral with respect to a stochastic measure. Solutions of the considered equations are presented.

1. Вступ

У [3] досліджено питання про існування та єдиність розв'язків задачі Коші для хвильового рівняння, яке містить доданок, заданий інтегралом із стохастичною мірою, у випадку однієї просторової змінної (при $d = 1$). Мета цієї статті – довести існування розв'язків задач Коші для таких хвильових рівнянь при $d = 2,3$. Про застосування таких рівнянь також див. [3] та наведені там посилання.

2. Необхідні теоретичні відомості

Нехай (Ω, F, P) – повний імовірнісний простір; L_0 – множина всіх випадкових величин на (Ω, F, P), які розглядаються з точністю до P-еквівалентності; збіжність в L_0 – це збіжність за ймовірністю. Нехай $D = D(R^d)$ – простір основних функцій з компактним носієм (див., наприклад, [1, с. 85]).

Означення 1 [3]. Узагальненою випадковою функцією (у. в. ф.) називається неперервне відображення $\xi : D \to L_0$.

Набір усіх у. в. ф. позначатимемо $D'_r = D'_r(R^d)$. Нехай $\mathrm{B} = \mathrm{B}(R^d)$ – σ-алгебра борельових множин простору R^d.