і, аналогічно до (6) можна переконатися, що $\int_{R^2} r_1(y,t,\phi)d\mu(t),\ \ t>0,$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2}=a^2\Delta_x V_t+f\dot{\mu},\ t>0,\quad \left.\frac{\partial V_t}{\partial t}\right|_{t=0+}=V_t\big|_{t=0+}=0. \tag{8}$$

Залишилось зауважити, що сума розв'язків задач (6) – (8) є розв'язком задачі Коші (1) при $d=2$.

Теорему 4 доведено.

Доведення теореми 5 проводиться аналогічно, якщо врахувати, що

$$w_2(y,t,\phi)=\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\phi(y_1+at\cos\psi\sin\theta,y_2+at\sin\psi\sin\theta,y_3+at\cos\theta)\sin\theta d\theta,$$

$$w_1(y,t,\phi)=\frac{t^2}{4\pi}\int_{U_1}\frac{f(y,t(1-|\eta|))\phi(y-at\eta)d\eta}{|\eta|}.$$

4. Висновок

У статті за допомогою формули Пуассона при $d=2$ та формули Кірхгофа при $d=3$ побудовано розв'язки задачі Коші для хвильових рівнянь із стохастичними мірами. Для доведення основних результатів суттєво використовуються властивості розв'язків спеціально підібраних задач Коші для відповідних детермінованих хвильових рівнянь.

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М., 1981. 2. *Радченко В. Н.* Интегралы по общим случайным мерам – К., 1999. 3. *Радченко В. Н.* Уравнение теплопроводности и волновое уравнение с общими случайными мерами // Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60, № 12. – С. 1675–1685.

Надійшла до редколегії 10.11.2010 р.

УДК 519.21

О. Стецюк, асп.

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ ПОВНОЇ ЕНЕРГІЇ ГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА З ВИПАДКОВИМ ЗБУРЕННЯМ

Досліджується поведінка при $t\to\infty$ математичного сподівання повної енергії гармонічного осцилятора без тертя при випадковому зовнішньому збуренні пуассонівським процесом.

The behavior of the mean of the oscillator without friction as $t\to\infty$ is studied in the case when the oscillator is being effected perturbed by a Poisson process.

1. Вступ

Під гармонічним осцилятором без тертя розуміють тіло маси 1, рух якого описується диференціальним рівнянням другого порядку

$$\ddot{u}(t)+k^2u(t)=q(t),\ u(0)=u_0,\ \dot{u}(0)=\dot{u}_0 \tag{1}$$

де $q(t)$ – зовнішня збурна сила; u_0, $\dot{u}_0$ – початкове положення і початкова швидкість осцилятора; $u(t)$, $\dot{u}(t)$ – положення і швидкість осцилятора в момент часу $t>0$; $k>0$ – параметр осцилятора (характеризує жорсткість пружини осцилятора); $E(t)=\frac{1}{2}[\dot{u}^2(t)+k^2u^2(t)]$ – повна енергія осцилятора.

У детермінованому випадку [5], коли зовнішня збурююча сила в системі (1) $q(t)$ невипадкова неперервно – диференційовна і періодична з періодом $2l$ функція, відомо,що:

1) повна енергія $E(t)\le C<\infty$ для всіх $t\ge 0$, якщо $k\ne n\pi/l$ при всіх $n=1,2,...$;

2) $E(t)\sim t^2$ при $t\to\infty$, якщо існує таке n_0, що $k=n_0\pi/l$ і $\int_{-l}^{l}q(t)\cos\frac{n_0\pi}{l}tdt$ та $\int_{-l}^{l}q(t)\sin\frac{n_0\pi}{l}tdt$ одночасно не рівні нулю.

Модель гармонічного осцилятора з неперервним випадковим збуренням, у якому $ME(t)\sim t^{\alpha}$, $\alpha\in\{1,2,3,4\}$, при $t\to\infty$, розглядалась у роботі [6], а випадок $ME(t)\sim t^{\alpha}$, $\alpha>1/2$, – у [1,4].

У даній статті досліджується поведінка з часом ($t\to\infty$) математичного сподівання повної енергії осцилятора з випадковим зовнішнім збуренням пуассонівським процесом, тобто осцилятора вигляду

$$\ddot{u}(t)+k^2u(t)=\xi(t)(a\sin\alpha t+b\cos\beta t),\ t>0,\ u(0)=u_0,\ \dot{u}(0)=\dot{u}_0, \tag{2}$$

де $\xi(t)$ – пуассонівський процес.

Відомо [2], що пуассонівський процес з ймовірністю 1 має розривні траєкторії ($\xi(0)=0$). Оскільки траєкторії процесу $\xi(t)$ розривні, то для збереження явного вигляду запису розв'язку $u(t)$ через праву частину рівняння (2) похідні в рівнянні (2) розглядаються як похідні у середньоквадратичному. Для спрощення вважається що у (2) $u(0)=0$, $\dot{u}(0)=0$.

Означення. Випадковий процес $\eta(t)$ $t\in[0,T]$ середньоквадратично диференційований у точці t_0, якщо існує $\lim\limits_{\Delta t\to\infty} M\left[\frac{\eta(t_0+\Delta t)-\eta(t_0)}{\Delta t}-\eta'(t_0)\right]^2=0$, $t_0, t_0+\Delta t\in(0,T)$. Випадкова величина $\eta'(t_0)$ називається середньоквадратичною похідною випадкового процесу $\eta(t)$ у точці t_0. Якщо існує середньоквадратична похідна $\eta'(t)$ процесу $\eta(t)$ у кожній точці $t\in(0,T)$, то процес середньоквадратично диференційований [2] на $(0,T)$.

Процес $\xi(t)$, $t\ge 0$ – пуассонівський процес з параметром $\lambda>0$, при $t,s>0$ ($t>s$), якщо $\xi(t)$ є процесом з незалежними приростами, $\xi(0)=0$ і $P\{\xi(t+s)-\xi(t)=k\}=\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}$, $k=0,1,2,3\dots$.

Нехай $\xi(t)$ – пуассонівський процес з параметром $\lambda>0$, тоді $M\xi(t)=\lambda t$, $D\xi(t)=\lambda t$, а отже

$$B(t,s)=M\xi(t)\xi(s)=M[\xi(t)\pm\xi(s)]\xi(s)=M\xi^2(s)+M(\xi(t)-\xi(s))\xi(s)=D\xi(s)+(M\xi(s))^2+M[\xi(t)-\xi(s)]M\xi(s)=$$
$$\lambda s+(\lambda s)^2+\lambda(t-s)\lambda s=\lambda s[1+\lambda t],\quad B(t,s)=\lambda^2 st+\lambda\min(s,t)\ -$$

коваріаційна функція пуассонівського процесу.

Розглянемо процес $\zeta(t)=\int_0^t\xi(s)ds$. Оскільки траєкторії пуасонівського процесу кусково–сталі, то процес $\int_0^t\xi(s,\omega)ds$ існує при кожному $t>0$ і має неперервні з ймовірністю 1 траєкторії. Мають місце наступні леми [6]:

Лема 1. Нехай $\xi(t)$ – пуассонівський процес. Тоді $M\left[\frac{1}{\Delta t}\left[\int_0^{t+\Delta t}\xi(s)ds-\int_0^t\xi(s)ds\right]-\xi(t)\right]^2\to 0$ при $\Delta t\to 0$ в кожній точці $t>0$.

Лема 2. Нехай функція $g(t,s)$ і її похідні $g_t'(t,s)$, $g_s'(t,s)$ неперервні по обом аргументам в області ($t\ge 0$, $s\ge 0$) і $\xi(t)$ – пуассонівський процес з параметром $\lambda>0$. Тоді має місце рівність

$$\left(\int_0^t g(t,s)\xi(s)ds\right)'=g(t,t)\xi(t)+\int_0^t g_t'(t,s)\xi(s)ds$$

з ймовірністю 1, де похідна від інтегралу розглядається як похідна в середньоквадратичному.

2. Основні результати

Теорема 1. Нехай $u(t)$ – розв'язок рівняння задачі

$$\ddot u(t)+k^2u(t)=\xi(t)(a\sin\alpha t+b\cos\beta t),\ t>0,\ u(0)=u_0,\ \dot u(0)=\dot u_0, \tag{3}$$

де $\xi(t)$ – пуассонівський процес з параметром $\lambda>0$, $a\ne 0$, $b\ne 0$. Тоді

1. а) $k\ne\alpha=\beta=0$: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}ME(t)=\frac{\lambda^2b^2}{2k^2}$;

б) $k\ne\alpha=\beta\ne 0$: $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\frac{1}{t^2}ME(t)=\frac{\lambda^2}{4}\left(a^2+b^2\right)\left(\frac{\alpha^2+k^2}{\left(\alpha^2-k^2\right)^2}-\frac{1}{\left|\alpha^2-k^2\right|}\right)$,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t^2}ME(t)=\frac{\lambda^2}{4}\left(a^2+b^2\right)\left(\frac{\alpha^2+k^2}{\left(\alpha^2-k^2\right)^2}+\frac{1}{\left|\alpha^2-k^2\right|}\right);$$

в) $\alpha\ne\beta$, $\alpha\ne k$, $\beta\ne k$: $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\frac{1}{t^2}ME(t)=\lambda^2C_{a,b,\alpha,\beta,k}$,

$$C_{a,b,\alpha,\beta}<C=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{|a|\alpha}{\alpha^2-k^2}+\frac{|b|\beta}{\beta^2-k^2}\right)^2, k<\alpha, k<\beta,\\ \frac{k^2}{2}\left(\frac{|a|}{\alpha^2-k^2}+\frac{|b|}{\beta^2-k^2}\right)^2, k>\alpha, k>\beta,\\ \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{\alpha^2-k^2}-\frac{b^2}{\beta^2-k^2}\right)\left(\frac{\alpha^2+k^2}{\alpha^2-k^2}-\frac{\beta^2+k^2}{\beta^2-k^2}\right), \begin{matrix}\beta<k<\alpha,\\ \alpha<k<\beta;\end{matrix}\end{cases}$$

2. а) $\alpha=k$, $\beta\ne k$: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t^4}ME(t)=\frac{\lambda^2a^2}{32}$;

б) $\alpha \neq k$, $\beta = k$: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t^4}ME(t)=\frac{\lambda^2 b^2}{32}$;

в) $\alpha = k$, $\beta = k$: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t^4}ME(t)=\frac{\lambda^2\left(a^2+b^2\right)}{32}$.

Доведення. Помножимо рівняння (3) на похідну $\dot{u}(t)$ і зінтегруємо від 0 до t маємо:

$$\int_0^t \ddot{u}(s)\dot{u}(s)ds + k^2\int_0^t u(s)\dot{u}(s)ds = \int_0^t \xi(s)(a\sin\alpha s + b\cos\beta s)\dot{u}(s)ds.$$

Відомо [2], що інтегрування і диференціювання в середньоквадратичному мають ті ж властивості, що і у звичайному сенсі. Тому

$$E(t)-E(0)=\int_0^t \xi(s)(a\sin\alpha s + b\cos\beta s)\dot{u}(s)ds. \tag{4}$$

Не обмежуючи загальності, будемо вважати $E(0)=0$.

В подальшому доведенні скористаємось лемою 2, згідно якої, розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$u(t)=\frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s)\xi(s)(a\sin\alpha s + b\cos\beta s)ds.$$

Крім того,

$$\dot{u}(t)=\int_0^t \cos k(t-s)\xi(s)(a\sin\alpha s + b\cos\beta s)ds. \tag{5}$$

Із (4) і (5) маємо, що

$$ME(t)=\int_0^t\left(\int_0^s s_1\cos k(s-s_1)\xi(s_1)\left(a\sin\alpha s_1 + b\cos\beta s_1\right)ds_1\right)\int_0^t\xi(s)\left(a\sin\alpha s + b\cos\beta s\right)ds =$$

$$=\int_0^t\int_0^s\left(M\xi(s)\xi(s_1)\right)\cos k(s-s_1)(a\sin\alpha s_1 + b\cos\beta s_1)(a\sin\alpha s + b\cos\beta s)ds_1 ds.$$

Враховуючи, що для пуассонівського процесу $\xi(t)$ $M\xi(s)\xi(s_1)=\lambda^2 s_1 s + \lambda\min(s_1,s)$, отримаємо

$$ME(t)=\int_0^t\left(\lambda^2 s+\lambda\right)\left(a\sin\alpha s + b\cos\beta s\right)\int_0^s s_1\cos k(s-s_1)\left(a\sin\alpha s_1 + b\cos\beta s_1\right)ds_1 ds.$$

1. а) $k\neq\alpha=\beta=0$, $b\neq 0$

Обчислимо внутрішній інтеграл: $\int_0^s s_1\cos k(s-s_1)b\,ds_1=\frac{b}{k^2}(1-\cos ks)$. Тоді

$$ME(t)=\frac{b}{k^2}\int_0^t\left(\lambda^2 s+\lambda\right)(1-\cos ks)ds=\frac{b^2}{k^2}\left(\frac{\lambda^2 t^2}{2}+\left(\lambda-\frac{\lambda^2\sin kt}{k}\right)t-\frac{\lambda\sin kt}{k}+\frac{\lambda^2}{k^2}(1-\cos kt)\right).$$

Розділимо отриманий вираз на t^2 і перейдемо до границі при $t\to\infty$: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}ME(t)=\frac{\lambda^2 b^2}{2k^2}$.

б) $\alpha=\beta\neq k$, скористаємося відомою формулою $a\sin\alpha s + b\cos\alpha s=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha s+\varphi)$, де φ: $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Обчислимо внутрішній інтеграл:

$$\int_0^s s_1\cos k(s-s_1)\sin(\alpha s_1+\varphi)ds_1=-s\frac{\alpha}{\alpha^2-k^2}\cos(\alpha s+\varphi)+\frac{(\alpha^2+k^2)}{(\alpha^2-k^2)^2}\sin(\alpha s+\varphi)-\frac{\sin(ks+\varphi)}{2(\alpha-k)^2}+\frac{\sin(ks-\varphi)}{2(\alpha+k)^2}.$$

Тоді

$$ME(t)=\left(a^2+b^2\right)\int_0^t\left(\lambda^2 s+\lambda\right)\sin(\alpha s+\varphi)\left(-s\frac{\alpha}{\alpha^2-k^2}\cos(\alpha s+\varphi)+\frac{(\alpha^2+k^2)}{(\alpha^2-k^2)^2}\sin(\alpha s+\varphi)-\frac{\sin(ks+\varphi)}{2(\alpha-k)^2}+\frac{\sin(ks-\varphi)}{2(\alpha+k)^2}\right)ds=$$

$$=\frac{\lambda^2\left(a^2+b^2\right)}{4}t^2\left(\frac{\alpha^2+k^2}{(\alpha^2-k^2)^2}+\frac{1}{\alpha^2-k^2}\cos 2(\alpha s+\varphi)\right)+\left(a^2+b^2\right)t\left(\frac{\lambda\cos 2(\alpha t+\varphi)}{4\left(\alpha^2-k^2\right)}-\frac{\lambda^2\sin 2(\alpha t+\varphi)}{4\alpha\left(\alpha^2-k^2\right)}+\right.$$

$$+\frac{\alpha^2+k^2}{(\alpha^2-k^2)^2}\left(\frac{\lambda}{4}-\frac{\lambda^2\sin 2(\alpha t+\varphi)}{4\alpha}\right)-\frac{\lambda^2}{2(\alpha-k)^2}\left(\frac{\sin(\alpha-k)t}{\alpha-k}-\frac{\sin((\alpha+k)t+2\varphi)}{\alpha+k}\right)-$$

$$\left.-\frac{\lambda^2}{2(\alpha+k)^2}\left(\frac{\sin(\alpha+k)t}{\alpha+k}-\frac{\sin((\alpha-k)t+2\varphi)}{\alpha-k}\right)\right)+\frac{\lambda\alpha\left(\sin 2\varphi-\sin 2(\alpha t+\varphi)\right)+\lambda^2\left(\cos 2\varphi-\cos 2(\alpha t+\varphi)\right)}{8\alpha^2\left(\alpha^2-k^2\right)}+$$

$$+\frac{\alpha^2+k^2}{(\alpha^2-k^2)^2}\left(\frac{\lambda\left(\sin 2\varphi-\sin 2(\alpha t+\varphi)\right)}{4\alpha}+\frac{\lambda^2\left(\cos 2\varphi-\cos 2(\alpha t+\varphi)\right)}{8\alpha^2}\right)-$$

$$-\frac{1}{2(\alpha-k)^2}\left(\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\sin(\alpha-k)t}{\alpha-k}-\frac{\sin((\alpha+k)t+2\varphi)}{\alpha+k}\right)+\frac{\lambda\sin 2\varphi}{2(\alpha+k)}+\frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{\cos(\alpha-k)t-1}{(\alpha-k)^2}+\frac{\cos 2\varphi-\cos((\alpha+k)t+2\varphi)}{(\alpha+k)^2}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{2(\alpha+k)^2}\left(\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\sin(\alpha+k)t}{\alpha+k}-\frac{\sin((\alpha-k)t+2\varphi)}{\alpha-k}\right)+\frac{\lambda\sin 2\varphi}{2(\alpha-k)}+\frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{\cos(\alpha+k)t-1}{(\alpha+k)^2}+\frac{\cos 2\varphi-\cos((\alpha-k)t+2\varphi)}{(\alpha-k)^2}\right)\right).$$

Розділимо отриманий вираз на t^2 і перейдемо до границі при $t\to\infty$:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t^2}ME(t)=\frac{\lambda^2\left(a^2+b^2\right)}{4}\left(\frac{\alpha^2+k^2}{(\alpha^2-k^2)^2}+\frac{1}{\left|\alpha^2-k^2\right|}\right),\ \underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t^2}ME(t)=\frac{\lambda^2\left(a^2+b^2\right)}{4}\left(\frac{\alpha^2+k^2}{(\alpha^2-k^2)^2}-\frac{1}{\left|\alpha^2-k^2\right|}\right).$$

в) $\alpha\neq\beta$, $\alpha\neq k$, $\beta\neq k$

Обчислимо внутрішній інтеграл:

$$\int_0^s s_1\cos k(s-s_1)\left(a\sin\alpha s_1+b\cos\beta s_1\right)ds_1 = s\left(-\frac{a\alpha}{\alpha^2-k^2}\cos\alpha s+\frac{b\beta}{\beta^2-k^2}\sin\beta s\right)+$$

$$+\frac{a(\alpha^2+k^2)}{(\alpha^2-k^2)^2}\sin\alpha s+\frac{b(\beta^2+k^2)}{(\beta^2-k^2)^2}\cos\beta s-\frac{2a\alpha k}{(\alpha^2-k^2)^2}\sin ks-\frac{b(\beta^2+k^2)}{(\beta^2-k^2)^2}\cos ks .$$

Тоді

$$ME(t)=\int_0^t\left(\lambda^2 s+\lambda\right)\left(a\sin\alpha s+b\cos\beta s\right)\left(s\left(-\frac{a\alpha}{\alpha^2-k^2}\cos\alpha s+\frac{b\beta}{\beta^2-k^2}\sin\beta s\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{a(\alpha^2+k^2)}{(\alpha^2-k^2)^2}\sin\alpha s+\frac{b(\beta^2+k^2)}{(\beta^2-k^2)^2}\cos\beta s-\frac{2a\alpha k}{(\alpha^2-k^2)^2}\sin ks-\frac{b(\beta^2+k^2)}{(\beta^2-k^2)^2}\cos ks\right)ds=$$

$$=\lambda^2\int_0^t s^2\left(a\sin\alpha s+b\cos\beta s\right)\left(\frac{b\beta\sin\beta s}{\beta^2-k^2}-\frac{a\alpha\cos\alpha s}{\alpha^2-k^2}\right)ds+\lambda^2\int_0^t\left(sa^2\frac{\alpha^2+k^2}{(\alpha^2-k^2)^2}\sin^2\alpha s+sb^2\frac{\beta^2+k^2}{(\beta^2-k^2)^2}\cos^2\beta s\right)ds+$$

$$+\int_0^t\left(\lambda^2 s\left(ab\left(\frac{\alpha^2+k^2}{(\alpha^2-k^2)^2}+\frac{\beta^2+k^2}{(\beta^2-k^2)^2}\right)\sin\alpha s\cos\beta s-\left(a\sin\alpha s+b\cos\beta s\right)\left(\frac{2a\alpha k\sin ks}{(\alpha^2-k^2)^2}+\frac{b(\beta^2+k^2)\cos ks}{(\beta^2-k^2)^2}\right)\right)+\right.$$

$$+\lambda\left(a\sin\alpha s+b\cos\beta s\right)\left(s\left(-\frac{a\alpha}{\alpha^2-k^2}\cos\alpha s+\frac{b\beta}{\beta^2-k^2}\sin\beta s\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{a(\alpha^2+k^2)}{(\alpha^2-k^2)^2}\sin\alpha s+\frac{b(\beta^2+k^2)}{(\beta^2-k^2)^2}\cos\beta s-\frac{2a\alpha k}{(\alpha^2-k^2)^2}\sin ks-\frac{b(\beta^2+k^2)}{(\beta^2-k^2)^2}\cos ks\right)\right)ds = I_1(t)+I_2(t)+I_3(t).$$

Розділимо отриманий вираз на t^2 і, враховуючи, що [3]

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{n+1}}\int t^n\sin At\,dt=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{n+1}}\left(-\sum_0^n i!\binom{n}{i}\frac{t^{n-i}}{A^{i+1}}\cos\left(At+\frac{1}{2}k\pi\right)\right)=0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{n+1}}\int t^n\cos At\,dt=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{n+1}}\sum_0^n i!\binom{n}{i}\frac{t^{n-i}}{A^{i+1}}\sin\left(At+\frac{1}{2}k\pi\right)=0,\ \text{де}\ n\in N,\ A\in R. \qquad (6)$$

перейдемо до границі при $t\to\infty$:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}I_3(t)=0,\ \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}I_2(t)=\frac{\lambda^2}{t^2}\int_0^t\frac{s}{2}\left(a^2\frac{\alpha^2+k^2}{(\alpha^2-k^2)^2}+b^2\frac{\beta^2+k^2}{(\beta^2-k^2)^2}\right)ds=\frac{\lambda^2}{4}\left(a^2\frac{\alpha^2+k^2}{(\alpha^2-k^2)^2}+b^2\frac{\beta^2+k^2}{(\beta^2-k^2)^2}\right).$$

Тоді

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t^2}ME(t)=\frac{\lambda^2}{4}\left(a^2\frac{\alpha^2+k^2}{(\alpha^2-k^2)^2}+b^2\frac{\beta^2+k^2}{(\beta^2-k^2)^2}\right)+$$

$$+\overline{\lim_{t\to\infty}}\lambda^2\frac{2k^2\left(a\sin\alpha t+b\cos\beta t\right)^2+2\left(a\beta\cos\alpha t-b\alpha\sin\beta t\right)^2-a^2\beta^2-a^2k^2-b^2\alpha^2-b^2k^2}{4\left(\alpha^2-k^2\right)\left(\beta^2-k^2\right)}.$$

Позначимо

$$J(t)=a^2\frac{\alpha^2+k^2}{4(\alpha^2-k^2)^2}+b^2\frac{\beta^2+k^2}{4(\beta^2-k^2)^2}+$$
$$+\frac{2k^2\left(a\sin\alpha t+b\cos\beta t\right)^2+2\left(a\beta\cos\alpha t-b\alpha\sin\beta t\right)^2-a^2\beta^2-a^2k^2-b^2\alpha^2-b^2k^2}{4\left(\alpha^2-k^2\right)\left(\beta^2-k^2\right)}. \quad (7)$$

Оцінимо $J(t)$ у випадках і) $k<\alpha$, $k<\beta$ або $k>\alpha$, $k>\beta$ та іі) $\beta<k<\alpha$ або $\alpha<k<\beta$ маємо:

і) $k<\alpha$, $k<\beta$ або $k>\alpha$, $k>\beta$:

$$J(t)<a^2\frac{\alpha^2+k^2}{4(\alpha^2-k^2)^2}+b^2\frac{\beta^2+k^2}{4(\beta^2-k^2)^2}+$$
$$+\frac{2\max\left(k^2,\beta^2\right)a^2+2\max\left(k^2,\alpha^2\right)b^2+4|ab|\max\left(k^2,\alpha\beta\right)-a^2\beta^2-a^2k^2-b^2\alpha^2-b^2k^2}{4\left(\alpha^2-k^2\right)\left(\beta^2-k^2\right)},$$

тоді при $k<\alpha$, $k<\beta$: $J(t)<\frac{1}{2}\left(\frac{|a|\alpha}{\alpha^2-k^2}+\frac{|b|\beta}{\beta^2-k^2}\right)^2$ і при $k>\alpha$, $k>\beta$: $J(t)<\frac{k^2}{2}\left(\frac{|a|}{\alpha^2-k^2}+\frac{|b|}{\beta^2-k^2}\right)^2$.

іі) $\beta<k<\alpha$ або $\alpha<k<\beta$:

$$J(t)<\frac{-a^2\beta^2-a^2k^2-b^2\alpha^2-b^2k^2}{4\left(\alpha^2-k^2\right)\left(\beta^2-k^2\right)}+a^2\frac{\alpha^2+k^2}{4(\alpha^2-k^2)^2}+b^2\frac{\beta^2+k^2}{4(\beta^2-k^2)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{\alpha^2-k^2}-\frac{b^2}{\beta^2-k^2}\right)\left(\frac{\alpha^2+k^2}{\alpha^2-k^2}-\frac{\beta^2+k^2}{\beta^2-k^2}\right).$$

Тоді
$$J(t)<C=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{|a|\alpha}{\alpha^2-k^2}+\frac{|b|\beta}{\beta^2-k^2}\right)^2, & k<\alpha,k<\beta,\\ \frac{k^2}{2}\left(\frac{|a|}{\alpha^2-k^2}+\frac{|b|}{\beta^2-k^2}\right)^2, & k>\alpha,k>\beta,\\ \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{\alpha^2-k^2}-\frac{b^2}{\beta^2-k^2}\right)\left(\frac{\alpha^2+k^2}{\alpha^2-k^2}-\frac{\beta^2+k^2}{\beta^2-k^2}\right), & \beta<k<\alpha,\alpha<k<\beta.\end{cases}$$

Вираз під знаком границі неперервний і обмежений, отже $\exists C_{a,b,\alpha,\beta,k}>0$: $\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t^2}ME(t)=\lambda^2C_{a,b,\alpha,\beta,k}<\lambda^2C$.

2. а) $\alpha=k$, $\beta\neq k$

$$ME(t)=\int_0^t\left(\lambda^2s+\lambda\right)\left(a\sin ks+b\cos\beta s\right)\int_0^s s_1\cos k(s-s_1)\left(a\sin ks_1+b\cos\beta s_1\right)ds_1ds.$$

Обчислимо внутрішній інтеграл

$$\int_0^s s_1\cos k(s-s_1)\left(a\sin ks_1+b\cos\beta s_1\right)ds_1=\frac{a}{4}s^2\sin ks+s\left(\frac{b\beta\sin\beta s}{\beta^2-k^2}-\frac{a\cos ks}{4k}\right)+\frac{a\sin ks}{4k^2}.$$

Тоді

$$ME(t)=\int_0^t\left(\lambda^2s+\lambda\right)\left(a\sin ks+b\cos\beta s\right)\left(\frac{a}{4}s^2\sin ks+s\left(\frac{b\beta\sin\beta s}{\beta^2-k^2}-\frac{a\cos ks}{4k}\right)+\frac{a\sin ks}{4k^2}\right)ds=\frac{\lambda^2a^2}{4}\int_0^t s^3\sin^2 ksds+$$
$$+\int_0^t\left(\left(\lambda^2s+\lambda\right)\left(a\sin ks+b\cos\beta s\right)\left(s\left(\frac{b\beta\sin\beta s}{\beta^2-k^2}-\frac{a\cos ks}{4k}\right)+\frac{a\sin ks}{4k^2}\right)+\left(\lambda^2s+\lambda\right)\frac{ab}{4}s^2\sin ks\cos\beta s\right)ds.$$

Розділимо отриманий вираз на t^4 і, враховуючи (6), перейдемо до границі при $t\to\infty$:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^4}ME(t)=\frac{\lambda^2a^2}{4}\int_0^t s^3\sin^2 ksds=\frac{\lambda^2a^2}{32}.$$

Пункти 2.б) і 2.в) доводяться аналогічно пункту 2.а).
Теорема доведена.

Зауваження 1. Якщо в 1.б) спочатку перейти до границі при $t\to\infty$, а потім до границі при $\alpha\to0$, отримаємо верхню і нижню границі $\lim_{\alpha\to0}\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t^2}ME(t)=0$ і $\lim_{\alpha\to0}\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t^2}ME(t)=\frac{\lambda^2}{2k^2}\left(a^2+b^2\right)$.

Якщо ж спочатку перейти до границі при $\alpha\to0$, а потім до границі при $t\to\infty$, то отримаємо результат пункту 1.а)

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{t^2}ME(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\frac{\left(a^2+b^2\right)(1-\cos 2\varphi)}{2k^2}\left(\frac{\lambda^2 t^2}{2}+\left(\lambda-\frac{\lambda^2\sin kt}{k}\right)t-\frac{\lambda\sin kt}{k}+\frac{\lambda^2}{k^2}(1-\cos kt)\right)=\frac{\lambda^2 b^2}{2k^2}.$$

Отже, міняти місцями границі не можна.

Зауваження 2. У пункті 1.в) існують такі параметри a, b, α, β і k, що нижня межа для $\frac{1}{t^2}ME(t)$ при $t\to\infty$ дорівнює 0.

Наприклад, якщо $k^2=2{,}5$, $a=b$, $\alpha=1$, $\beta=2$, то

$$\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}ME(t)=\varliminf_{t\to\infty}\lambda^2 a^2\frac{5}{9}\left(\left(\sin t-\cos 2t\right)^2+\frac{2}{9}\left(\cos t+2\sin 2t\right)^2\right)=0,$$

оскільки при $t_n=(1+2n)\pi/2, n\in N_0$ невід'ємний вираз в дужках рівний нулеві,

$$\left(\sin t_n-\cos 2t_n\right)^2+\frac{2}{9}\left(\cos t_n+2\sin 2t_n\right)^2=0.$$

Теорема 2. Нехай $u(t)$ – розв'язок задачі $\ddot{u}(t)+k^2u(t)=\left(\xi(t)-M\xi(t)\right)(a\sin\alpha t+b\cos\beta t)$, $t>0$, $u(0)=u_0$, $\dot{u}(0)=\dot{u}_0$, де $\xi(t)$ – пуассонівський процес з параметром $\lambda>0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$. Тоді

1. а) $k\neq\alpha=\beta=0$: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}ME(t)=\frac{\lambda b^2}{k^2}$;

б) $\alpha=\beta\neq k$: $\varliminf\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}ME(t)=\frac{\lambda}{2}\left(a^2+b^2\right)\left(\frac{\alpha^2+k^2}{\left(\alpha^2-k^2\right)^2}-\frac{1}{2\left|\alpha^2-k^2\right|}\right)$, $\varlimsup\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}ME(t)=\frac{\lambda}{2}\left(a^2+b^2\right)\left(\frac{\alpha^2+k^2}{\left(\alpha^2-k^2\right)^2}+\frac{1}{2\left|\alpha^2-k^2\right|}\right)$;

в) $\alpha\neq\beta$, $\alpha\neq k$, $\beta\neq k$: $\frac{\lambda}{4}\left(a^2\frac{\alpha^2+k^2}{\left(\alpha^2-k^2\right)^2}+b^2\frac{\beta^2+k^2}{\left(\beta^2-k^2\right)^2}\right)\leq\varliminf\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}ME(t)<\varlimsup\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}ME(t)=\lambda S_{a,b,\alpha,\beta,k}$, де

$$S_{a,b,\alpha,\beta,k}<S=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{|a|\alpha}{\alpha^2-k^2}+\frac{|b|\beta}{\beta^2-k^2}\right)^2+a^2\frac{\alpha^2+k^2}{4(\alpha^2-k^2)^2}+b^2\frac{\beta^2+k^2}{4(\beta^2-k^2)^2}, & k<\alpha, k<\beta,\\ \frac{k^2}{2}\left(\frac{|a|}{\alpha^2-k^2}+\frac{|b|}{\beta^2-k^2}\right)^2+a^2\frac{\alpha^2+k^2}{4(\alpha^2-k^2)^2}+b^2\frac{\beta^2+k^2}{4(\beta^2-k^2)^2}, & k>\alpha, k>\beta,\\ \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{\alpha^2-k^2}-\frac{b^2}{\beta^2-k^2}\right)\left(\frac{\alpha^2+k^2}{\alpha^2-k^2}-\frac{\beta^2+k^2}{\beta^2-k^2}\right)+a^2\frac{\alpha^2+k^2}{4(\alpha^2-k^2)^2}+b^2\frac{\beta^2+k^2}{4(\beta^2-k^2)^2}, & \begin{matrix}\beta<k<\alpha\\ \alpha<k<\beta\end{matrix};\end{cases};$$

2. а) $\alpha=k$, $\beta\neq k$: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t^3}ME(t)=\frac{\lambda a^2}{24}$;

б) $\alpha\neq k$, $\beta=k$: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t^3}ME(t)=\frac{\lambda b^2}{24}$;

в) $\alpha=k$, $\beta=k$: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t^3}ME(t)=\frac{\lambda\left(a^2+b^2\right)}{24}$.

Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1, тільки у випадку 1.б) враховуючи, що вираз (7) більше або рівний 0 для нижньої межі, маємо: $\varliminf\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}ME(t)=\frac{\lambda}{2}\left(a^2\frac{\alpha^2+k^2}{(\alpha^2-k^2)^2}+b^2\frac{\beta^2+k^2}{(\beta^2-k^2)^2}\right)+$

$$+\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\lambda\frac{2k^2\left(a\sin\alpha t+b\cos\beta t\right)^2+2\left(a\beta\cos\alpha t-b\alpha\sin\beta t\right)^2-a^2\beta^2-a^2k^2-b^2\alpha^2-b^2k^2}{4\left(\alpha^2-k^2\right)\left(\beta^2-k^2\right)}\geq\frac{\lambda}{4}\left(a^2\frac{\alpha^2+k^2}{\left(\alpha^2-k^2\right)^2}+b^2\frac{\beta^2+k^2}{\left(\beta^2-k^2\right)^2}\right).$$

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1965. – 654 с. 2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Гос. изд. физ.–мат. лит., 1963. – С. 197–198. 3. *Дивнич М. Т., Куровський Д. Ю., Єршов А. В.* Асимптотичний аналіз математичного сподівання повної енергії випадкового гармонічного осцилятора // Вісн. Київ. Ун-ту. Математика, Механіка. – 2005. – № 3. – С. 104–112. 4. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения вариационное исчисление. – М., Наука, 1965, – 424 с. 5. *Кулініч Г. Л., Куровський Д. Ю., Петрусенко Д. В.* Асимптотичний аналіз математичного сподівання повної енергії гармонічного осцилятора при випадковому імпульсному збуренні // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 299–306. 6., *Арнольд В. И.,* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1971. – С. 240. 7. Теория колебаний / *Андронов А. А., Хайкин С. Э.* – М., 1959. 8. *Kulinich G. L.* On the limiting behaviors of a harmonic oscillator with random external disturbance // Y. A. M. S. A. – 1995. – Vol. 8. – P. 265–274.

Надійшла до редколегії 15.07.2010 р.