Теорема 3. Нехай адитивна група кільця Λ – вільна абелева скінченного рангу, причому Λ не містить нільпотентних ідеалів. Нехай, крім того, M та N – деякі Λ- ґратки.

(1) Якщо N – точний Λ- модуль, то $g(M+N) \le g(N)$. Зокрема, якщо $g(N)=1$, а $M \sim M'$, то $M \oplus N \cong M' \oplus N$.

(2) Припустимо, що алгебра $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ не має прямих множників H таких, що $H \otimes \mathbb{R}$ є прямим добутком тіл кватерніонів. Якщо $M \oplus N \cong M' \oplus N$, а $M \mid N$, то $M \cong M'$.

Нехай тепер $X \in \mathbb{S}$, а $\Lambda = End(X)$. Із [4] відомо, що адитивна група кільця Λ є скінченно породженою, а тому до нього застосовна теорія родів цілочисельних зображень. При цьому виконується стандартне твердження, яке зводить теорію родів для X до теорії родів для Λ.

Твердження 1. Відображення $Y \mapsto Hos(X,Y)$ індукує бієктивне відображення множини класів ізоморфізму поліедрів, які належать тому ж роду, що й X, та множини класів ізоморфізму модулів головного роду кільця Λ. При цьому, якщо $X \mid Z$, то $Hos(X,X) \mid Hos(X,Z)$ як Λ- модуль.

Скористаємося також відомим фактом з теорії поліедрів [4], який легко доводиться за індукцією.

Твердження 2. Нехай X – деякий поліедр. Тоді існує така точна послідовність $X \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} X$, що $\beta\alpha = k \cdot Id_X$ для деякого натурального k, де $B = \bigvee_{i=0}^{s} \gamma_i S^i$ – букет усіх сфер, які зустрічаються у побудові поліедра X як клітинного комплекса.

Із цього твердження маємо очевидний наслідок.

Наслідок 2. У позначеннях твердження 2, нехай $\Omega = End(B)$, $\Gamma = End(X \oplus B)$, $\overline{\Lambda} = \widetilde{\Lambda} / Nil(\widetilde{\Lambda})$, де $Nil(\widetilde{\Lambda})$ – ніль-радикал кільця $\widetilde{\Lambda}$, і аналогічно визначені $\overline{\Omega}$ та $\overline{\Gamma}$.

(1) $\overline{\Gamma}$ ізоморфне кільцю матриць $\begin{pmatrix} \Lambda & U \\ V & \Omega \end{pmatrix}$, у якому $UV \supseteq k\Lambda$.

(2) $\overline{\Gamma}$-модуль $\begin{pmatrix} U \\ \Omega \end{pmatrix}$ є точним.

(3) Алгебра $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ ізоморфна прямому добутку матричних алгебр $Mat(m_i, \mathbb{Z})$ для деяких m_i.

Перші два твердження очевидні, а третє випливає з того, що такий вигляд має алгебра $\Omega \otimes \mathbb{Q}$.

Очевидно, що з твердження 1 і наслідку 2 разом із теоремою 3 безпосередньо випливає теорема 2.

3. Висновки

Впроваджено теорію родів для стабільних гомотопічних класів поліедрів. Доведено, що два поліедри X та Y належать одному роду тоді й лише тоді, коли $X \vee B \cong Y \vee B$ для букета сфер B. Встановлено, що з ізоморфізму $X \vee Z \cong Y \vee Z$ випливає ізоморфізм $X \cong Y$, якщо існує такий поліедр Z', що $rX \cong Z \vee Z'$, де rX позначає букет r екземплярів поліедра X. Доведення ґрунтується на теорії цілочисельних зображень.

1. *Дрозд Ю. А.* Адели и целочисленные представления // Изв. Акад. наук СССР, Серия математическая. – 1969. – Т. 33. – С. 1080–1088. 2. *Ройтер А. В.* О целочисленных представлениях, принадлежащих одному роду // Изв. Акад. наук СССР, Серия математическая. – 1966. – Т. 30. – С. 1315–1324. 3. *Свитцер Р. М.* Алгебраическая топология – гомотопии и гомологии: Пер. с англ. – М., 1985. 4. *Cohen J. M.* Stable Homotopy. -- Berlin, Heidelberg, 1970. 5. *Freyd P.* Stable Homotopy: Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, 1965. -- Berlin, Heidelberg, New York, 1966. 6. *Jacobinski H.* Genera and decompositions of lattices over orders // Acta Math. – 1968. – Vol. 121.– P. 1–29.

Надійшла до редколегії 21.12.2010 р.

УДК 512.6

І. Раєвська, асп.

ЛОКАЛЬНІ МАЙЖЕ-КІЛЬЦЯ НА НЕМЕТАЦИКЛІЧНІЙ *P*-ГРУПІ МІЛЛЕРА-МОРЕНО

В даній роботі отримано необхідні і достатні умови існування локальних майже-кілець на неметациклічній p-групі Міллера-Морено.

Necessary and sufficient conditions of existence of local near-rings on non-metacycle p -group of Miller-Moreno are given.

1. Вступ

Майже-кільце – це узагальнення кільця, в якому додавання $+$ не обов'язково комутативне та пов'язане з множенням $*$ лише одним (лівим) дистрибутивним законом. Майже-кільце R називається локальним, якщо $(R,\cdot)$ є моноїдом, множина L всіх необоротних елементів якого утворює підгрупу в адитивній групі $(R,+)$.

Локальні майже-кільця із скінченними абелевими адитивними p-групами вивчались в [5]. В [3] описані всі неізоморфні нуль-симетричні локальні майже-кільця з елементарною абелевою адитивною групою порядку p^2, які не є майже-полями. Також у [6] доведено існування локальних майже-кілець на неабелевій групі порядку p^n та експоненти p^{n-1}. У даній наводяться статті отримано необхідні та достатні умови існування локальних майже-кілець на неметациклічній p-групі Міллера-Морено.

2. Попередні результати

Приймемо наступні позначення: $|H|$ – порядок структури H, Z_p – кільце лишків за модулем p.

Теорема 1 [2]. Адитивна група скінченного майже-поля є елементарною абелевою групою.

Теорема 2 [4]. Нехай R – скінченне локальне майже-кільце. Тоді його адитивна група R^+ є p-групою для деякого простого числа p. Крім того, якщо L – адитивна підгрупа необоротних елементів із R, то L – ідеал в R та R/L є майже-полем. Зокрема, фактор-група R/L є елементарною абелевою p-групою.

Означення 1. Скінченна група називається групою Міллера-Морено, якщо вона неабелева, а всі її власні підгрупи є абелевими.

Теорема 3 [1]. Скінченні групи Міллера-Морено вичерпуються групами наступних типів:

1) група кватерніонів Q_8;
2) $G = <a> \rtimes <b>,\ |a| = p^m,\ |b| = p^n,\ m \neq 2,\ n \neq 1,\ b^{-1}ab = a^{1+p^{m-1}}$;
3) $G = (<c> \times <a>) \rtimes <b>,\ |c| = p,\ |b| = p^n,\ |a| = p^m,\ m \neq 1,\ n \neq 1,\ b^{-1}ab = ac,\ b^{-1}cb = c$;
4) $G = P \rtimes Q,\ Q = \langle b \rangle$ та $|Q| = q^k$, $\langle b^q \rangle = Z(G),\ Q \lhd G,\ P$ – мінімальний нормальний дільник групи G порядку r^s, де q та r – прості числа.

Лема 1. Нехай G – неабелева група порядку p^{m+n+1} з твірними u, v, w та співвідношеннями $u^{p^m} = v^{p^n} = w^p = 1,\ w = u^{-1}v^{-1}uv$. Тоді $\left[v^k, u^l\right] = w^{kl}$ для довільних цілих k і l.

Зауваження 1. Нехай G – адитивно записана неабелева група порядку p^{m+n+1} з твірними $u,\ v,\ w$ та співвідношеннями $p^m u = p^n v = pw = 0,\ \ w = -u - v + u + v$. Тоді справедливі наступні співвідношення:

$$-uk - vl + uk + vl = w(kl),\ -uk - vl = w(kl) - vl - uk,\ \ uk + vl = w(kl) + vl + uk,\ \ vl + uk = -w(kl) + uk + vl,$$
$$-vl - uk = -w(kl) - uk - vl.$$

Лема 2. Нехай G – адитивно записана неабелева група порядку p^{m+n+1} з твірними $u,\ v,\ w$ та співвідношеннями $p^m u = p^n v = pw = 0,\ w = -u - v + u + v.$ Тоді $(uk + vl)z = ukz + vlz - wkl\binom{z}{2}.$

3. Локальні майже-кільця на неметациклічній *p*-групі Міллера-Морено

Нехай R – локальне майже-кільце, адитивна група R^+ якого неметациклічна p-група Міллера-Морено порядку p^{m+n+1} з твірними $e_1, e_2, e_3,$ і співвідношеннями $e_1 p^m = e_2 p^n = e_3 p = 0,\ e_3 = -e_1 - e_2 + e_1 + e_2.$ Оскільки за теоремою 2 L містить комутант e_3 групи R^+, то твірні e_2 та e_3 підгрупи L можна вибрати так, що $e_3 = -e_1 - e_2 + e_1 + e_2$. Отже, для кожного $x \in R$ однозначно визначені елементи $\alpha(x) \in Z_{p^m},\ \beta(x) \in Z_{p^n},\ \gamma(x) \in Z_p,$ а отже відображення $\alpha : R \to Z_{p^m},\ \beta : R \to Z_{p^n},\ \gamma : R \to Z_p,$ для яких $xe_2 = e_1\alpha(x) + e_2\beta(x) + e_3\gamma(x).$

Очевидно, що $xe_1 = x$ для кожного $x \in R$, оскільки e_1 є мультиплікативною одиницею.

Лема 3. Якщо $x, y \in R$, то $xy = e_1\left(x_1y_1 + y_2\alpha(x)\right) + e_2\left(x_2y_1 + y_2\beta(x)\right) + e_3\left(x_1y_3\beta(x) + x_3y_1 + y_2\gamma(x) - x_1x_2\binom{y_1}{2}\right),$ причому відображення $\alpha : R \to Z_{p^m},\ \beta : R \to Z_{p^n},\ \gamma : R \to Z_p$ задовольняють умовам:

1) $\alpha(xy) = x_1\alpha(y) + \alpha(x)\beta(y),$
2) $\beta(xy) = x_2\alpha(y) + \beta(x)\beta(y),$
3) $\gamma(xy) = \beta(y)\gamma(x) + x_1\beta(x)\gamma(y),$
4) $x_1 \neq 0 \pmod p \Rightarrow \beta(x) \neq 0 \pmod p.$

Як наслідок леми 3, отримали наступну теорему.

Теорема 4. Кожне локальне майже-кільце R з неметациклічною адитивною групою Міллера-Морено порядку p^{m+n+1} визначається відображеннями $\alpha : R \to Z_{p^m},\ \beta : R \to Z_{p^n},\ \gamma : R \to Z_p,$ що задовольняють умовам (1) – (4) леми 3.

Лема 4. Майже-кільце R нуль-симетричне тоді і тільки тоді, коли $\alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = 0.$

4. Неметациклічна *p*-група Міллера-Морено як адитивна група локального майже-кільця

Нехай G – адитивна неметациклічна p-група Міллера-Морено порядку p^{m+n+1} з твірними $a,\ b,\ c$ і співвідношеннями $ap^m = bp^n = cp = 0,\ c = -a - b + a + b.$ Тоді $G = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle$ і кожний елемент $x \in G$ однозначно записується в вигляді $x = ax_1 + bx_2 + cx_3,$ де коефіцієнти $x_1 \in Z_{p^m},\ x_2 \in Z_{p^n},\ x_3 \in Z_p$.

Визначимо множення $*$ в G таким чином, щоб $(G,+,*)$ було локальним майже-кільцем. Для кожного $x, y \in G$ покладемо

$$x*y=(x*a)y_1+(x*b)y_2+(x*c)y_3=a\left(x_1y_1+y_2\alpha(x)\right)+b\left(x_2y_1+y_2\beta(x)\right)+c\left(x_1y_3\beta(x)+x_3y_1+y_2\gamma(x)-x_1x_2\binom{y_1}{2}\right),$$

причому відображення $\alpha: R\to Z_{p^m}$, $\beta: R\to Z_{p^n}$, $\gamma: R\to Z_p$, задовольняють умовам:

1) $\alpha(x*y)=x_1\alpha(y)+\alpha(x)\beta(y)$,
2) $\beta(x*y)=x_2\alpha(y)+\beta(x)\beta(y)$,
3) $\gamma(x*y)=\beta(y)\gamma(x)+x_1\beta(x)\gamma(y)$,
4) $x_1\neq 0(\mathrm{mod}\, p)\Rightarrow \beta(x)\neq 0(\mathrm{mod}\, p)$.

Покажемо, що $(G,+,*)$ є локальним майже-кільцем.

Лема 5. $(G,*)$ є напівгрупою.

Лема 6. Операція $*$ є ліво дистрибутивною відносно операції $+$ ($x*(y+z)=x*y+x*z$).

Очевидно, що $e=(1,0,0)$ є мультиплікативною одиницею. З лем 5 та 6 випливає доведення наступної теореми.

Теорема 5. $R\cong(G,+,*)$ є майже-кільцем з одиницею.

Так як $(G,+)$ є неабелева група, то R не є кільцем.

Лема 7. $k=ak_1+bk_2+ck_3\in L$, тоді і тільки тоді, коли $k_1\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$.

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 6. $R\cong(G,+,*)$ є локальним майже-кільцем.

Зокрема, можуть бути такі значення функцій $\alpha(x)=\gamma(x)=0$ і $\beta(x)=x_1$. Легко бачити, що вони задовольняють умови (1) – (4) і як наслідок маємо наступну теорему.

Теорема 7. Якщо відображення $\alpha: R\to Z_{p^m}$, $\beta: R\to Z_{p^n}$, $\gamma: R\to Z_p$, задовольняють умови $\alpha(x)=\gamma(x)=0$ і $\beta(x)=x_1$ для кожного $x\in G$, то операція

$$x*y=(x*a)y_1+(x*b)y_2+(x*c)y_3=a\left(x_1y_1+y_2\alpha(x)\right)+b\left(x_2y_1+y_2\beta(x)\right)+c\left(x_1y_3\beta(x)+x_3y_1+y_2\gamma(x)-x_1x_2\binom{y_1}{2}\right)$$

на адитивній групі G є асоціативною та ліво-дистрибутивною і визначає деяке нуль-симетричне локальне майже-кільце $R=(G,+,*)$.

5. Висновки

Доведено необхідні та достатні умови існування локальних майже-кілець на неметациклічній p-групі Міллера-Морено.

1. *Левищенко С.С., Кузенный Н.Ф.* Группы с условиями дисперсивности для подгрупп. – Киев: КГПИ, 1985. – 96 с. 2. *Холл М.* Теория групп. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 468 с. 3. *Maxson C.J.* Local near-rings of cardinality p^2 // Canad. Math. Bull. – 1968. – Vol. 11, No. 4. 4. *Maxon C.J.* On local near-rings // Math. Z., 106. – P. 197–205, 1968. 5. *Maxson C.J.* On the construction of finite local near-rings (I): on non-cyclic abelian p-groups // Quart. J. Math. Oxford (2), 21 (1970). – P. 449–457. 6. *Maxson C.J.* On the construction of finite local near-rings (II): on non-abelian p-groups // Quart. J. Math. Oxford (2), 22 (1971). – P. 65–72.

Надійшла до редколегії 20.12.2010 р.

УДК 512.6

М. Раєвська, асп.

ЛОКАЛЬНІ МАЙЖЕ-КІЛЬЦЯ З МУЛЬТИПЛІКАТИВНОЮ ГРУПОЮ МІЛЛЕРА-МОРЕНО

Описано всі майже-поля з мультиплікативною групою Шмідта та вивчено локальні майже-кільця з мультиплікативною групою Міллера-Морено, що не є 2-групою.

All near-fields with multiplicative Schmidt group are described. Furthermore, local near-rings with multiplicative Miller-Moreno group which is not a 2-group are studied.

1. Вступ

Алгебраїчна структура R з двома бінарними операціями $+$ і $\cdot$ називається (лівим) майже-кільцем, якщо $(R,+)$ – необов'язково абелева група, $(R,\cdot)$ – напівгрупа та $r(s+t)=rs+rt$ для всіх $r, s, t\in R$. Група $(R,+)$ позначається через R^+ та називається адитивною групою, а її нейтральний елемент 0 – нулем майже-кільця R. Група всіх оборотних елементів напівгрупи $(R,\cdot)$ називається мультиплікативною групою в R та позначається через R^*. Майже-кільце R з одиницею називається локальним, якщо множина L всіх необоротних елементів із $(R,\cdot)$ утворює адитивну підгрупу в R^+, і майже-полем, якщо $L=0$. Нормальна підгрупа I групи R^+ називається ідеалом (лівого) майже-кільця R, якщо для довільних елементів $r, s\in R$ та $a\in A$ виконуються включення $ra\in I$ та $(r+a)s-rs\in I$. Якщо I – ідеал в R, то фактор-група R/I утворює майже-кільце, яке є узагальненням поняття фактор-кільця [5].