УДК 517.98

М. Андросенко, ст. викл., О. Кашпіровський, доц.

КЛАС ЄДИНОСТІ І ЛОКАЛЬНІ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕСКІНЧЕНИХ СТАЦІОНАРНИХ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Для нескінчених стаціонарних систем різницевих рівнянь описано клас єдиності розв'язку і спектр різницевого оператора. Побудовано локальні наближення розв'язків, які є аналогом локальних сплайнів мінімального дефекту.

Class of solution uniqueness and spectrum of difference operator are described for infinite stationary systems of difference equations. Local approximations of solutions are constructed, which are analogues for local splines of minimal defects.

1. Вступ

Розглянемо нескінченну систему різницевих рівнянь

$$u_{k-1} - 2Au_k + u_{k+1} = f_k, \quad k \in Z, \tag{1}$$

де A – квадратна матриця n-го порядку, $\{u_k, k \in Z\}$ – невідома послідовність векторів із C^n, $\{f_k, k \in Z\}$ – задана послідовність векторів із C^n. Розглядаються два випадки поведінки послідовності норм векторів $\{f_k, k \in Z\}$: або послідовність $\|f_k\|_{C^n}$ обмежена, тобто

$$\|f_k\|_{C^n} \le C_1, \; k \in Z, \tag{2}$$

для деякої сталої $C_1 > 0$, або послідовність задовольняє умову

$$\|f_k\|_{C^n} \le C_2 M_k, \; k \in Z, \text{ де } C_2 > 0, \; 0 < M_k \to \infty, k \to \infty. \tag{3}$$

Система у випадку (2) досліджувалася у працях Дороговцева А. Я. [4,5] і Городнього М. Ф. [2,3]. У скалярному випадку ($n=1$) у [7] за умов, що послідовність $\{f_k, k \in Z\}$ є значеннями деякої гладкої обмеженої функції $f(t)$, тобто $f_k = f(t_k)$, $t_k = kh, \; k \in Z, h > 0$, отримано локальні асимптотичні наближення розв'язку системи (1). При цьому кожне значення розв'язку u_k апроксимується лінійною комбінацією f_{k-1}, f_k, f_{k+1}. Отже, для знаходження значення u_k при фіксованому k не потрібно знаходити інші значення розв'язку, як це доводиться робити в методі прогонки [1]. У даній статті знайдено клас єдиності розв'язку системи (1), тобто описано таку множину *F* послідовностей векторів $\{f_k, k \in Z\}$ із C^n, для яких система (1) має єдиний в множині *F* розв'язок $\{u_k, k \in Z\}$. На розв'язки з класу єдиності *F* узагальнено локальні асимптотичні наближення з [7].

2. Основна частина

Розглянемо спочатку систему (1) з послідовностями $\{f_k, k \in Z\}$, $\{u_k, k \in Z\}$, на які не накладено жодних обмежень. Нехай $s(Z, C^n)$ — простір всіх можливих послідовностей $\vec{f} = \{f_k, k \in Z\}$ та $\vec{u} = \{u_k, k \in Z\}$, елементи яких належать C^n. Отже, $s(Z, C^n)$ можна розглядати як сукупність всіх можливих відображень Z в C^n. На $s(Z, C^n)$ очевидним чином може бути введено структуру векторного простору. Для того, щоб відрізняти вектори із $s(Z, C^n)$ та із C^n при компактному записі векторів із $s(Z, C^n)$ будемо використовувати знак вектора. Розглянемо оператори $\Pi_k, k \in Z$, які кожному вектору $f \in C^n$ ставлять у відповідність послідовність $\Pi_k f$ із $s(Z, C^n)$, у якої елемент із номером k рівний вектору f, а решта елементів – нульові. Тоді довільний елемент $\vec{f} \in s(Z, C^n)$ можна подати у вигляді формального ряду

$$\vec{f} = \sum_{k \in Z} \Pi_k f_k, \; f_k \in C^n. \tag{4}$$

Запишемо систему (1) в операторному вигляді. Нехай I – одиничний оператор в $s(Z, C^n)$, S_+ − оператор зсуву номерів координат векторів із $s(Z, C^n)$ на одну позицію праворуч, тобто $S_+ \Pi_k = \Pi_{k+1}, \; k \in Z$. Тоді для векторів $\vec{f}$ із $s(Z, C^n)$, що мають зображення (4), дія оператора S_+ визначається співвідношенням $S_+\left(\sum_{k \in Z} \Pi_k f_k\right) = \sum_{k \in Z} \Pi_{k+1} f_k$. Нехай аналогічно S_- – оператор зсуву номерів координат векторів із $s(Z, C^n)$ на одну позицію ліворуч, тобто $S_- \Pi_k = \Pi_{k-1}, \; k \in Z$, $S_-\left(\sum_{k \in Z} \Pi_k f_k\right) = \sum_{k \in Z} \Pi_{k-1} f_k$. Очевидно, що $S_+ S_- = S_- S_+ = I$.

Будемо називати $L(A) = S_- - 2A + S_+$ різницевим оператором. Тоді систему (1) можна записати у вигляді операторно-різницевого рівняння

$$L(A)\vec{u} = \vec{f}. \tag{5}$$

Наступна теорема визначає власні числа та власні вектори оператора $L(A)$ в $s(Z, C^n)$.

Теорема 1. *Нехай* e *– власний вектор матриці* A *із власним числом* λ*. Тоді для будь-якого комплексного числа* $a \neq 0$ *вектор* $\vec{f}(e,\lambda,a) = \sum_{k\in Z} a^k \Pi_k e$ *є власним вектором оператора* $L(A)$*, причому*

$$L(A)\vec{f}(e,\lambda,a) = \left(a^{-1} - 2\lambda + a\right)\vec{f}(e,\lambda,a). \tag{6}$$

Доведення теореми 1 зводиться до простої підстановки вектора $\vec{f}(e,\lambda,a)$ у вираз для оператора $L(A)$.

Зауваження 1. *Власних векторів, що відмінні від* $\vec{f}(e,\lambda,a)$*, оператор* $L(A)$ *не має.*

Зауваження 2. *При фіксованих* e,a,λ *сукупність векторів* $\left\{P_m(k)a^k\Pi_k e,\ k\in Z\right\}$ *із* $s(Z,C^n)$*, де* $P_m(k)$ *– деякий многочлен степені* $m\in N$*, є інваріантною відносно оператора* $L(A)$*, оскільки*

$$L(A)\left\{\sum_{k\in Z} P_m(k)a^k\Pi_k e\right\} = \sum_{k\in Z} Q_m(k)a^k\Pi_k e, \tag{7}$$

де многочлени $P_m(k)$*,* $Q_m(k)$ *пов'язані співвідношенням*

$$Q_m(k) = \frac{1}{a}P_m(k-1) - 2\lambda P_m(k) + aP_m(k+1).$$

Зауваження 3. Якщо вектори $e_1, e_2, \ldots, e_p$ утворюють жорданову клітину в матриці A з власним числом λ, тобто $Ae_1 = \lambda e_1,\ Ae_2 = \lambda e_2 + e_1,\ \ldots,\ Ae_p = \lambda e_p + e_{p-1}$, то при фіксованому $a \neq 0$ сукупність векторів із $s(Z,C^n)$ вигляду

$$\sum_{k\in Z} a^k \Pi_k\left(\sum_{j=1}^{p} P_{m_j}(k)e_j\right), \tag{8}$$

де $P_{m_j}(k),\ j=\overline{1,p}$, – деякі многочлени від k, також утворюють інваріантну відносно $L(A)$ підмножину в $s(Z,C^n)$.

Наступна теорема дозволяє описати розв'язки однорідного операторно-різницевого рівняння (5), тобто рівняння

$$L(A)\vec{u} = \vec{0}. \tag{9}$$

Теорема 2. Нехай e – власний вектор матриці А, що відповідає власному числу λ, для якого $\lambda^2 \neq 1$. Позначимо через $z_1(\lambda) = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$, $z_2(\lambda) = \lambda - \sqrt{\lambda^2-1}$ корені характеристичного рівняння

$$z^{-1} - 2\lambda + z = 0, \tag{10}$$

де вважаємо, що виразу $\sqrt{\lambda^2-1}$ відповідає така функція комплексної змінної $z = \sqrt{w^2-1}$, що $\lim\limits_{w\to\infty}\frac{\sqrt{w^2-1}}{w} = 1$. Тоді для довільних сталих C_1, C_2 вектор $\vec{u} = \sum_{k\in Z}\left(C_1 z_1^k(\lambda) + C_2 z_2^k(\lambda)\right)\Pi_k e$ є розв'язком рівняння (9).

Доведення. Оскільки числа $z_1(\lambda)$, $z_2(\lambda)$ є коренями характеристичного рівняння (10), то внаслідок (6) вектор $\vec{u} = C_1\vec{f}(e,\lambda,z_1(\lambda)) + C_2\vec{f}(e,\lambda,z_2(\lambda))$ задовольняє рівняння (9) при довільних сталих C_1, C_2. Теорему 2 доведено.

Зауваження 4. У випадку коли власний вектор e матриці A має власне значення $\lambda = 1$ або $\lambda = -1$, то безпосередньою перевіркою можна показати, що рівняння (9) має розв'язок

$$\vec{u} = \sum_{k\in Z}(C_1 + C_2 k)\Pi_k e$$

(відповідно, $\vec{u} = \sum_{k\in Z}(-1)^k(C_1 + C_2 k)\Pi_k e$ при $\lambda = -1$).

Зауваження 5. Якщо власне число λ власного вектора e матриці A є дійсним і належить інтервалу $(-1,1)$, то характеристичні числа можна записати таким чином: $z_1(\lambda) = \lambda + i\sqrt{1-\lambda^2}$, $z_2(\lambda) = \lambda - i\sqrt{1-\lambda^2}$. Оскільки при цьому $|z_1(\lambda)| = |z_2(\lambda)| = 1$, то для всіх $k\in Z$ маємо $|z_1^k(\lambda)| = |z_2^k(\lambda)| = 1$. Отже, для $\lambda\in[-1;1]$ рівняння (9) має нетривіальні обмежені розв'язки.

Зауваження 6. З характеристичного рівняння (10) знаходимо $\lambda = \left(z + z^{-1}\right)/2$, тобто λ є функцією Жуковського [8, с. 27] від z. Тому при $\lambda\in C^1\setminus[-1;1]$ характеристичні числа $z_1(\lambda)$, $z_2(\lambda)$ відповідають двом оберненим до функції Жуковського функціям, причому $z_1(\lambda)$ (відповідно $z_2(\lambda)$) конформно відображає $C^1\setminus[-1;1]$ у зовнішність одиничного круга $|z|>1$ (відповідно, у внутрішність одиничного круга $|z|<1$).

Оскільки при $\lambda \in C^1 \setminus [-1;1]$ члени двосторонньої геометричної прогресії $\left\{z_1^k(\lambda), k \in Z\right\}$ (відповідно $\left\{z_2^k(\lambda), k \in Z\right\}$) при $k \to -\infty$ прямують до *0* (відповідно до ∞) і при $k \to +\infty$ прямують до ∞ (відповідно до *0*), то власним числам $\lambda \in C^1 \setminus [-1;1]$ матриці A відповідають необмежені розв'язки рівняння (9).

Отже, якщо спектр $\sigma(A)$ матриці A належить $C^1 \setminus [-1;1]$, то однорідне операторно-різницеве рівняння (9) не має нетривіальних обмежених розв'язків. Цей факт раніше встановлено іншим способом в [2,3].

Розглянемо питання про зображення загальних розв'язків однорідного та неоднорідного операторно-різницевих рівнянь (5) та (9) за допомогою функцій від матриці A .

Теорема 3. *Якщо числа $\lambda = \pm 1$ не належать спектру матриці A , то будь-який розв'язок однорідного операторно-різницевого рівняння (9) допускає зображення*

$$\vec{u} = \sum_{k \in Z} \Pi_k \left(z_1^k(A) f + z_2^k(A) g \right), \tag{11}$$

де f , g – довільні вектори із C^n .

Теорема 3 є наслідком теореми 2 і зауважень 4 – 6. Зауважимо, що (11) є дискретним аналогом зображення загального розв'язку операторно-диференціального рівняння $-y'' + A^2 y = 0$, де $A > 0$ – необмежений оператор [9].

Теорема 4. *Якщо $\sigma(A) \subset C^1 \setminus [-1;1]$, то єдиний обмежений розв'язок неоднорідного операторно-різницевого рівняння з δ-подібною правою частиною*

$$L(A)\vec{u} = \Pi_j f, \ \ f \in C^n, j \in Z$$

має зображення

$$\vec{u} = -\frac{1}{2}\left(A^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} \Pi_k \left(z_1(A)\right)^{-|k-j|} f \ . \tag{12}$$

Теорема 4 доводиться безпосередньою підстановкою правої частини (12) у рівняння (5).

Вираз у правій частині (12) будемо інтерпретувати як дію оператора $G_j(A), j \in Z$, який кожному вектору $f \in C^n$ ставить у відповідність вектор $G_j(A) f = -\frac{1}{2}\left(A^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} \Pi_k \left(z_1(A)\right)^{-|k-j|} f$ з простору $l_\infty\left(Z, C^n\right)$. Тому розв'язок операторно-різницевого рівняння (5) із правою частиною $\vec{f}$, що має зображення (4) є сенс шукати у вигляді ряду

$$\vec{u} = \sum_{j \in Z} G_j(A) f_j \ . \tag{13}$$

При цьому координаті u_k , $k \in Z$, розв'язку $\vec{u}$ також відповідає ряд вигляду

$$u_k = -\frac{1}{2}\left(A^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j \in Z} \Pi_k \left(z_1(A)\right)^{-|k-j|} f_j \, . \tag{14}$$

Виникає питання: для яких векторів $\vec{f}$ із $s(Z, C^n)$ зображення розв'язку (13) є коректним, тобто ряди (14) є абсолютно збіжними для всіх $k \in Z$. Мається на увазі збіжність числових рядів, що утворені нормами доданків рядів (14) для всіх $k \in Z$. Оскільки норми від'ємних степенів оператора $z_1(A)$ ведуть себе так само як елементи спадної геометричної прогресії із знаменником $q = q(A) = \max\limits_{\lambda_j \in \sigma(A)} \left| z_2(\lambda_j) \right| = \max\limits_{\lambda_j \in \sigma(A)} \left| \lambda_j - \sqrt{\lambda_j - 1} \right| < 1$, то при всіх $p \ge 0$ для всіх векторів, що задовольняють (3) із $M_k = \left(1 + |k|\right)^p$, то ряди (14) збігаються абсолютно і відповідні вектори $\vec{u}$ задовольняють (3) з такими ж M_k . При $p = 0$ оцінки (2) і (3) еквівалентні, а отже вектори $\vec{f}$ і $\vec{u}$ належать простору $l_\infty\left(Z, C^n\right)$. Більш точний опис класу єдиності рівняння (5) і системи (1) дає наступне твердження.

Теорема 5. *Для всіх матриць А, спектр $\sigma(A)$ яких не перетинається з відрізком $[-1;1]$ і для всіх таких векторів $\vec{f} \in s(Z, C^n)$, що*

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \left\| f_k \right\|^{\frac{1}{|k|}} \le 1 \, , \tag{15}$$

існує єдиний розв'язок $\vec{u}$ рівняння (5), що задовольняє аналогічному (15) обмеженню:

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \left\| u_k \right\|^{\frac{1}{|k|}} \le 1 \, . \tag{16}$$

Умови (15) І (16) означають, що послідовності норм координат векторів $\vec{f}$ і $\vec{u}$ можуть зростати, але повільніше, ніж члени будь-якої зростаючої геометричної прогресії. Описаний в теоремі 5 клас єдиності розв'язків операторно-різницевого рівняння (5) є максимальним класом єдиності одночасно для всіх матриць *A*, для яких $\sigma(A)\cap[-1;1]=\varnothing$. Для всіх матриць A, спектр яких лежить зовні еліпса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, $a=\left(q^{-1}+q\right)/2$, $b=\left(q^{-1}-q\right)/2$, $0<q<1$, клас єдиності розв'язків (5) можна розширити, якщо умову (15) замінити умовою $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\|f_k\|^{\frac{1}{|k|}}\le q^{-1}$.

Розглянемо питання про спектр різницевого оператора $L(A)$, що визначений в $l_\infty\left(Z,C^n\right)$. Оскільки для довільного $\mu\in C^1$ маємо $L(A)-\mu I=S_- -2A+S_+ -\mu I=S_- -2\left(A+0,5\mu\right)+S_+ =L\left(A+0,5\mu\right)$, то для існування резольвенти $R(\mu)=\left(L(A)-\mu I\right)^{-1}=\left(L\left(A+0,5\mu I\right)\right)^{-1}$ необхідно і достатньо, щоб спектр матриці $A+0,5\mu$ не перетинався із $[-1,1]$. Звідси одержимо таке твердження.

Теорема 6. *Спектр різницевого оператора* $L(A)$, *що визначений в* $l_\infty\left(Z,C^n\right)$, *співпадає із множиною* $\bigcup\limits_{\lambda_j\in\sigma(A)}\left[-2-\lambda_j,\,2-\lambda_j\right]$.

Розглянемо тепер питання про наближення розв'язків системи (1) із описаного в теоремі 5 класу єдиності. Враховуючи, що ряди (14) є швидко збіжними, для наближення кожного u_k можна взяти частинну суму відповідного ряду (14). З практичної точки зору такий спосіб наближення u_k не є зручним, оскільки при такому підході потрібно користуватися матричною функцією $\sqrt{A^2-I}$. Більш зручним є метод наближення, при якому використовується інваріантність відносно різницевого оператора $L(A)$ многочленів від $k\in Z.$ Останній факт випливає з (7) при $a=1$. Як і в скалярному випадку наближення u_k, $k\in Z$, слід шукати у вигляді лінійної комбінації векторів

$$f_{k-1},f_k,f_{k+1},\ \ \overline{u_k}=c_1f_k+c_2(f_{k-1}+f_{k+1}), \tag{17}$$

де коефіцієнти c_1 та c_2 вибрано так, щоб формула (17) була точною на кубічних многочленах.

Наступне твердження узагальнює результати [7] на багатовимірний випадок.

Теорема 7. *Нехай в рівнянні (5) оператор* A *задовольняє умову* $\sigma(A)\cap[-1;1]=\varnothing$, *вектор* $\vec{f}\in l_\infty\left(Z,C^n\right)$ *відповідає значенням набору функцій* $f(1,x),f(2,x),\ldots,f(n,x)$ *із* $C^4\left(R^1\right)$ *в точках* $x_k=kh,\ k\in Z,h>0$, $\vec{u}=\sum\limits_{k\in Z}\Pi_k u_k\in l_\infty\left(Z,C^n\right)$ *– відповідний розв'язок (5). Тоді для* $u_k, k\in Z$, *мають місце асимптотичні розвинення*

$$u_k=0,5\left(A-I\right)^{-1}f_k-0,25\left(A-I\right)^{-2}\left(f_{k-1}-2f_k+f_{k+1}\right)-0,125\left(A-I\right)^{-3}f_k^{(4)}h^4+O\left(h^6\right), \tag{18}$$

де $f_k^{(4)}\in C^n$ *– значення четвертої похідної вектор-функції* $f(x)=\left(f(1,x),f(2,x),\ldots,f(n,x)\right)$ при $x=x_k$.

Доведення. Нехай $P(x)$ – деякий многочлен степеня $m\in N$, коефіцієнти якого є векторами з C^n, $\vec{P}\in s(Z,C^n)$ – відповідний вектор значень $P(x)$ в точках $x_k=kh,k\in Z$. Внаслідок (7) при $a=1$ одержимо

$$L(A)\vec{P}=\vec{Q}, \tag{19}$$

де вектор $\vec{Q}\in s(Z,C^n)$ відповідає многочлену $Q(x)$, який пов'язаний з $P(x)$ співвідношенням (8). З (8) випливає лінійний зв'язок між коефіцієнтами многочленів $P(x)$ і $Q(x)$. Можна показати, що при $\sigma(A)\cap[-1;1]=\varnothing$ многочлен $P(x)$ однозначно визначається многочленом $Q(x)$. Для одержання розвинення (17) при фіксованому $k=k_0$ потрібно взяти многочлен $Q(x)$, що інтерполює вектор-функцію $f(x)$ у вузлах x_k, $|k-k_0|\le 3$, і по ньому відновити многочлен $P(x)$, що пов'язаний з $Q(x)$ рівністю (19).

Зауваження 7. Умови на функції $f(1,x),f(2,x),\ldots,f(n,x)$ та їхні похідні в теоремі 7 можна послабити, а саме: при $x\to\infty$ ці функції та їхні похідні можуть необмежено зростати, але зростання має бути повільнішим від експоненціального.

Зауваження 8. Асимптотична формула (18) дає результати, які істотно покращуються при зменшенні значень параметра $q=q(A)$. У такому разі (18) є стійким відносно збурень вектора $\vec{f}$.

Зауваження 9. У скалярному випадку $(n=1)$ для системи $u_{k-1}+4u_k+u_{k+1}=f_k,\ k\in Z$, розвинення (18) розглядалося в теорії сплайнів [6].

3. Висновки

Для системи різницевих рівнянь (1) знайдено клас єдиності розв'язку і встановлено, якою має бути поведінка норм $\|f_k\|_{C^n}$ при $k \to \infty$, щоб ця система мала єдиний розв'язок у тому самому класі. Знайдено спектр різницевого оператора $L(A)$, встановлено локальні асимптотичні розвинення для розв'язку системи, які істотно спрощують знаходження наближеного розв'язку.

1. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 430 с. 2. *Городний М. Ф.* Аппроксимация ограниченного решения одного разностного уравнения решениями соответствующих краевых задач в банаховом пространстве // Мат. заметки.– 1992. – Том 51, вып. 4. – С. 17–22. 3. *Городній М. Ф.* Властивості розв'язків різницевих і диференціальних рівнянь та їх стохастичних аналогів у банаховому просторі: автореферат дис. на здобуття наук. ступеня докт. фіз.-мат. наук: спец. 01.01.02 "Диференціальні рівняння". – К., 2004. – 32 с. 4. *Дороговцев А. Я.* Стационарные и периодические решения одного стохастического разностного уравнения в банаховом пространстве // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1990. – Вып. 42. – С. 35–42. 5. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – К.: Вища шк., 1992. – 319 с. 6. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с. 7. *Кашпіровський О. І., Семенів О. В., Яценко В. О.* Про локальні апроксимації обмежених розв'язків нескінченних систем різницевих рівнянь // Наук. зап. Нац. ун-ту "Києво-Могилянська академія". Фіз.-мат. науки. – 2007. – Т. 61. – С. 17–22. 8. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с. 9. *Gorbachuk M. L., Gorbachuk V. I.* Boundary-value problems for operator-differential equations. – Dordrecht: Kluwer, 1991. – 364 p.

Надійшла до редколегії 24.03.2011 р.

УДК 517.54

Т. Жеребко, асп.

ПРО НАБЛИЖЕННЯ КОНФОРМНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНАМИ В ОБЛАСТЯХ З КУСКОВО-ГЛАДКОЮ МЕЖЕЮ.

Отримано поточкову та рівномірну оцінки наближення конформного відображення многочленами в областях з кутами у випадку довільної кількості кутів.

Pointwise and uniform estimates of conformal mapping polynomial approximation in domains with corners are obtained for any number of angles.

1. Вступ

Нехай $G \subset \mathbb{C}$ – обмежена область з жордановою межею $\partial G,$ яка складається з l гладких кривих Γ_j таких, що $\{z_j\} := \Gamma_{j-1} \bigcap \Gamma_j \neq \varnothing,\ j = 1,...,l,$ де $\Gamma_0 := \Gamma_l$. Позначимо через $\alpha_j \pi,\ \ 0 < \alpha_j < 2,$ кути в точках z_j між кривими Γ_{j-1} і Γ_j, які є зовнішніми відносно області $G.$ Також позначимо через $\overline{G} := G \bigcup \partial G$ замикання множини $G.$ Покладемо

$$\alpha := \min\{1, \alpha_1, ..., \alpha_l\}.$$

Для функції $g : G \to \mathbb{C}$ позначимо $\|g\|_G := \sup\limits_{z \in G} |g(z)|.$ Нехай $\mathbb{P}_n$ є простором алгебраїчних многочленів степеня $\leq n.$ Метою статті є наближення многочленами функції Рімана $f,$ яка здійснює конформне відображення внутрішності області G в круг $\{\omega : |\omega| < 1\}$ і нормована умовами $f(0) = 0$ та $f'(0) > 0.$ У статті $[3]$ ми дослідили наближення такої функції у випадку однієї кутової точки $z_1 = 1$ з зовнішнім кутом $\alpha_1 \pi,\ \ 0 < \alpha_1 < 2.$ Зокрема, для величини найкращого наближення

$$E_n(f, G) := \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n} \|f - P_n\|_G \tag{1}$$

в [3] отримана оцінка $E_n(f,G) \leq \dfrac{c(G)}{n^{\gamma_0}},$ де $\gamma_0 = \min\left\{\dfrac{\alpha_1}{2-\alpha_1}, 1\right\}.$ Нагадаємо, ця оцінка є посиленням та узагальненням оцінки Гайера [6], яка випливає з одного результату Коревару [6, с.287]. Більше того, ми отримали точніші, поточкові оцінки різниці $|f(z) - P_n(z)|.$ У даній статті узагальнимо ці оцінки на випадок, коли $l > 1.$

Будемо вважати, що мають місце нерівності

$$c \leq |f'(z)| \prod_{j=1}^{l} |z - z_j|^{\frac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}} \leq C,\ z \in \overline{G} \setminus \{z_j\},\ j = 1,...,l. \tag{2}$$

Тут і надалі $c = c(G)$ і $C = C(G)$ сталі, які залежать тільки від $G.$ Нагадаємо (див. $[1]$), що умова (2) виконується, якщо гладкі криві Γ_j, $j = 1,...,l,$ є, скажімо, кривими Ляпунова, або навіть такими, що задовольняють умову Діні. Справедлива

Теорема 1. Для кожного $n \geq 1$ має місце оцінка

$$E_n(f, G) \leq c n^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}.$$

Будемо позначати через $j(z)$ індекс найближчої кутової точки до точки $z;$ якщо таких точок декілька, тоді, для визначеності, через $j(z)$ будемо позначати найменший з таких індексів. Теорема 1 є простим наслідком точнішої теореми 2, яка є основним результатом роботи.

Теорема 2. Для кожного $n \geq l$ існує многочлен $P_n \in \mathbb{P}_n$ такий, що для кожного $z \in G$ мають місце оцінки