$\Sigma(J_\alpha)$, де $\alpha$ – довільно вибраний одиничний вектор (таким чином, спектральний аналіз довільної множини з $\bigcup_{\alpha\in S^2}\Sigma(J_\alpha)$ може бути зведений до спектрального аналізу найбільш "зручної" для нас множини $\Sigma(J_\alpha)$ ).

1. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – М.: Наука, 1986. – 352 с. 2. *Albeverio S., Günther U., Kuzhel S.* *J*-self-adjoint operators with *C*-symmetries: extension theory approach // J. Phys. A. – 2009. – Vol. 42. – P. 105205–105227. 3. *Bender C. M.* Making sense of non-Hermitian Hamiltonians // Rep. Prog. Phys. – 2007. – Vol. 70. – P. 947–1018. 4. *Kuzhel S., Trunk C.* On a class of J-self-adjoint operators with empty resolvent set // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – Vol. 379. – P. 272–289.

Надійшла до редколегії 26.12.2010 р.

УДК 517.949

М. Бойко, асп.

# ПРОДОВЖУВАНІСТЬ "ВЛІВО" НЕПЕРЕРВНОГО РОЗВ'ЯЗКУ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ

***Дано достатні умови продовжуваності "вліво" неперервного розв'язку нелінійного різницевого рівняння в банаховому просторі.***

***We give sufficient conditions for the extendibility "to the left" of continuous solution for a nonlinear difference equation in a Banach space.***

## 1. Вступ

Мета цієї статті – отримати достатні умови продовжуваності "вліво" неперервного розв'язку рівняння:

$$\begin{aligned} x(t+n+1) &= x(t+n)+f_n(x(t+n)), \quad n\in\{0,1,\ldots,k-1\};\\ x(t+k) &= d(t), \quad t\in[0,1], \end{aligned} \tag{1}$$

де $k$ – фіксоване натуральне число, $x$ – невідома неперервна на $[0,k+1]$ функція; $f_n, n\in\{0,1,\ldots,k-1\}$, та $d$ – фіксовані неперервні функції. Про застосування отриманих результатів див. [2,3].

## 2. Доведення допоміжних тверджень

Як завжди, $C([a,b])$ – простір неперервних на $[a,b]$ функцій з рівномірною нормою; для $x\in C([a,b])$ норму позначатимемо $\|x\| = \max_{t\in[a,b]}|x(t)|$. Також, для зручності, будемо писати $Z_k := \{0,1,\ldots,k-1\}$.

В [1] отримано достатні умови розв'язності дискретного аналогу рівняння (1). Запишемо їх для простору $C([0,1])$. Для рівняння

$$x_{n+1} = x_n + F_n(x_n), n\in Z_k;\, x_k = d, \tag{2}$$

де $F_n, n\in Z_k$ – неперервні відображення з $C([0,1])$ в $C([0,1])$, отримано такі умови існування розв'язку.

Нехай $r>0, d\in C([0,1]), B := \{x\in C([0,1]) : \|x-d\|\le r\}$.

***Теорема 1.*** *Припустимо, що виконуються такі умови:*

а₁) $\forall n\in Z_k \forall x\in B : \|F_n(x)\| \le \dfrac{r}{k}$;

а₂) *Для всіх* $n\in Z_k$ *виконується* $\forall x', x''\in B : \|F_n(x') - F_n(x'')\| \le C\|x'-x''\|$, *причому стала* $C$ *задовольняє нерівність* $kC<1$.

*Тоді існує єдиний набір елементів* $\{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ *у множині* $B$, *для якого виконуються рівності (2).*

Для отримання потрібного результату для випадку рівняння (2) покладемо $F_n(x)(t) := f_n(x(t)), t\in[0,1]$.

Справедлива така лема.

***Лема 2.*** *Наступні твердження еквівалентні:*

i) *задача (1) має єдиний розв'язок.*

ii) *задача (2) має єдиний розв'язок, для якого виконуються співвідношення*

$$\forall n\in Z_k : x_{n+1}(0) = x_n(1). \tag{3}$$

*Доведення.* $i)\Rightarrow ii)$ Нехай $x$ – єдиний розв'язок задачі (1). Покладемо $x_n(t) := x(n+t), n\in Z_k, t\in[0,1]$. Легко переконатися, що $\{x_n, n\in Z_k\}$ буде розв'язком задачі (2) і будуть виконуватись співвідношення (3).

Припустимо $\{\tilde{x}_n, n\in Z_k\}$ – розв'язок задачі (2), для якого виконуються співвідношення (3), відмінний від $\{x_n, n\in Z_k\}$. Покладемо $\tilde{x}(n+t) := \tilde{x}_n(t), n\in Z_k, t\in[0,1]$. Легко переконатися, що $\tilde{x}$ буде розв'язком задачі (1), що суперечить єдиності розв'язку задачі (1).

Імплікація $ii)\Rightarrow i)$ перевіряється аналогічно. Лему доведено.

Введемо позначення

$$d_{min} := \min_{t\in[0,1]} d(t), d_{max} := \max_{t\in[0,1]} d(t), S := [d_{min}-r, d_{max}+r], d_{mid} := \frac{1}{2}(d_{max}+d_{min}), l := d_{max}-d_{min}.$$

Справедливі такі твердження.

***Лема 3.*** *Умова* $a_1)$ *теореми 1 еквівалентна умові*

$$b_1)\ \forall n\in Z_k\ \forall s\in S: \left\| f_n(s)\right\| \le \frac{r}{k}.$$

*Доведення.* Достатньо довести лему для фіксованого $n\in Z_k$.

$a_1)\Rightarrow b_1)$. Для $s_0\in\left[d_{min},d_{max}\right]$ виконується

$$\left|f_n(s_0)\right|\le \max_{s\in\left[d_{min},d_{max}\right]}\left|f_n(s)\right| = \max_{t\in[0,1]}\left|f_n\left(d(t)\right)\right| = \left\|F_n(d)\right\|\le\frac{r}{k}.$$

При $s_0\in\left[d_{min}-r,d_{min}\right)$ покладемо $x(t):=d(t)-\left(d_{min}-s_0\right),\ t\in[0,1]$. Тоді $x\in B$,

$$\left|f_n(s_0)\right|\le \max_{s\in\left[s_0,l+s_0\right]}\left|f_n(s)\right| = \max_{t\in[0,1]}\left|f_n\left(x(t)\right)\right| = \left\|F_n(x)\right\|\le\frac{r}{k}.$$

При $s_0\in\left(d_{max},d_{max}+r\right]$ покладемо $x(t):=d(t)+\left(s_0-d_{max}\right),\ t\in[0,1]$. Тоді $x\in B$,

$$\left|f_n(s_0)\right|\le \max_{s\in\left[s_0-l,s_0\right]}\left|f_n(s)\right| = \max_{t\in[0,1]}\left|f_n\left(x(t)\right)\right| = \left\|F_n(x)\right\|\le\frac{r}{k}.$$

Отже для всіх $s\in S$ виконується $\left\|f_n(s)\right\|\le\dfrac{r}{k}$.

$b_1)\Rightarrow a_1)$. Оскільки при $x\in B$ для кожного $t\in[0,1]$ виконується включення $x(t)\in S$, то

$$\left\|F_n(x)\right\| = \max_{t\in[0,1]}\left|f_n\left(x(t)\right)\right|\le\max_{s\in S}\left|f_n(s)\right|\le\frac{r}{k}.$$

Лему доведено.

***Лема 4***. *Умова* $a_2)$ *теореми 1 еквівалентна умові*

$$b_2)\ \forall n\in Z_k,\ \forall s',s''\in S, \left|s'-s''\right|\le 2r: \left|f_n(s')-f_n(s'')\right|\le C\left|s'-s''\right|.$$

*Доведення.* Достатньо довести лему для фіксованого $n\in Z_k$.

$a_2)\Rightarrow b_2)$. Розлянемо довільні $s',s''\in S: \left|s'-s''\right|\le 2r$. Без обмеження загальності будемо вважати, що $s'>s''$. Покладемо

$$s_0:=\frac{1}{2}\left(s'+s''\right),\ \Delta s:=\frac{1}{2}\left(s'-s''\right).$$

Зрозуміло, що $s_0\in S,\ 0\le\Delta s\le r,\ s'=s_0+\Delta s,\ s''=s_0-\Delta s$.

Для $s_0\in\left[d_{min},d_{max}\right]$ існує таке $t^*\in[0,1]$, що $s_0=d\left(t^*\right)$. Покладемо

$$x'(t):=d(t)+\Delta s,\ x''(t):=d(t)-\Delta s,\ t\in[0,1].$$

Для $s_0\in\left[d_{min}-r,d_{min}\right)$ існує таке $t^*\in[0,1]$, що $d_{min}=d\left(t^*\right)$. Покладемо

$$x'(t):=d(t)-\left(d_{min}-s_0\right)+\Delta s,\ x''(t):=d(t)-\left(d_{min}-s_0\right)-\Delta s,\ t\in[0,1].$$

Тоді $x'\in B$, оскільки $-\left(d_{min}-s_0\right)+\Delta s\ge-\left(d_{min}-\left(d_{min}-r\right)\right)+0=-r,\ -\left(d_{min}-s_0\right)+\Delta s\le 0+r=r;$

$x''\in B$, оскільки $-\left(d_{min}-s_0\right)-\Delta s=-d_{min}+s''\ge-d_{min}+d_{min}-r=-r,\ -\left(d_{min}-s_0\right)-\Delta s\le 0+0<r.$

Для $s_0\in\left(d_{max},d_{max}+r\right]$ існує таке $t^*\in[0,1]$, що $d_{max}=d\left(t^*\right)$. Покладемо

$$x'(t):=d(t)+\left(s_0-d_{max}\right)+\Delta s,\ x''(t):=d(t)+\left(s_0-d_{max}\right)-\Delta s,\ t\in[0,1].$$

Тоді $x'\in B$, оскільки

$$\left(s_0-d_{max}\right)+\Delta s=s'-d_{max}\le d_{max}+r-d_{max}=r,\ \left(s_0-d_{max}\right)+\Delta s\ge 0+0>-r;$$

$x''\in B$, оскільки

$$\left(s_0-d_{max}\right)-\Delta s\le\left(d_{max}+r-d_{max}\right)+0=r,\ \left(s_0-d_{max}\right)-\Delta s\ge 0-r=-r.$$

При цьому

$$\left|f_n\left(s'\right)-f_n\left(s''\right)\right|=\left|f_n\left(x'\left(t^*\right)\right)-f_n\left(x''\left(t^*\right)\right)\right|\le\max_{t\in[0,1]}\left|f_n\left(x'(t)\right)-f_n\left(x''(t)\right)\right|=$$

$$=\left\|F_n(x')-F_n(x'')\right\|\le C\left\|x'-x''\right\|=C\cdot 2\Delta s=C\left|s'-s''\right|.$$

$b_2)\Rightarrow a_2)$. Для будь-яких $x',x''\in B$ існує така точка $t^*\in[0,1]$, що

$$\left\|F_n(x')-F_n(x'')\right\|=\max_{t\in[0,1]}\left|f_n\left(x'(t)\right)-f_n\left(x''(t)\right)\right|=\left|f_n\left(x'\left(t^*\right)\right)-f_n\left(x''\left(t^*\right)\right)\right|.$$

Позначимо $s' := x'\left(t^*\right), s'' := x''\left(t^*\right)$. Оскільки функції $x', x''$ з $B$, то $\left|s' - s''\right| \le 2r$, тоді

$$\left\|F_n(x') - F_n(x'')\right\| = \left|f_n(s') - f_n(s'')\right| \le C\left|s' - s''\right| = C\left|x'\left(t^*\right) - x''\left(t^*\right)\right| \le C\left\|x' - x''\right\|.$$

Лему доведено.

***Лема 5****. Умова $b_2)$ леми 4 еквівалентна умові*

$$b_3)\ \forall n \in Z_k, \forall s', s'' \in S : \left|f_n(s') - f_n(s'')\right| \le C\left|s' - s''\right|.$$

*Доведення.* $b_2) \Rightarrow b_3)$. Зафіксуємо $s', s'' \in S$. Без обмеження загальності вважаємо $s' < s''$. Зафіксуємо розбиття $\Lambda = \left\{s' = \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n = s''\right\}$ відрізка $\left[s', s''\right]$ таке, що

$$\left|\Lambda\right| = \max_{1 \le i \le n}\left(\lambda_i - \lambda_{i-1}\right) \le 2r.$$

Тоді $\left|f_n(s'') - f_n(s')\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(f_n(\lambda_i) - f_n(\lambda_{i-1})\right)\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|f_n(\lambda_i) - f_n(\lambda_{i-1})\right| \le C\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i - \lambda_{i-1}\right) = C\left|s'' - s'\right|.$

Імплікація $b_3) \Rightarrow b_2)$ – тривіальна.

### 3. Формулювання основного результату

Позначимо $B_0 := \left\{x \in C\left([0, k+1]\right) : \left|x(t+n) - d(t)\right| \le r, \forall n \in Z_k\right\}$.

Справедлива така теорема.

***Теорема 6****. Нехай виконуються умови $b_1)$, $b_3)$, причому стала $C$ задовольняє нерівність $kC < 1$.*

*Тоді задача (2) має єдиний розв'язок на множині $B$. Якщо додатково для розв'язку задачі (2) виконуються умови (3), то задача (1) має єдиний розв'язок на множині $B_0$.*

*Доведення.* Теорема 6 випливає з лем 1-4.

### 4. Висновок

Отримано достатні умови продовжуваності "вліво" неперервного розв'язку нелінійного різницевого рівняння з неперервним аргументом в банаховому просторі. Аналогічні результати щодо продовжуваності розв'язків різницевого рівняння з дискретним аргументом містяться у роботах [1–3].

1. *Бойко М. Я., Городній М. Ф.* Про продовжуваність "вліво" розв'язків різницевого рівняння // Нелінійні коливання. – 2007. – Т. 10, № 3. – С. 298–302. 2. *Семенишина І. В.* Про задачу Коші для вироджених різницевих рівнянь у банаховому просторі // Доповіді НАН України. – 2003. – № 7. – С. 27–33. 3. *Теплінський Ю. В., Семенишина І. В.* Про задачу Коші для вироджених різницевих рівнянь у банаховому просторі // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : Збірник наукових праць. – Чернівці: Прут. – 2001. – Вип. 7. – С. 322–333.

**Надійшла до редколегії 11.11.2010 р.**

**УДК 517.98**

**А. Чайковський, канд. фіз.-мат. наук**

## ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ АБСТРАКТНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ

***Знайдено достатні умови існування та єдиності обмеженого на осі розв'язку абстрактного лінійного диференціального рівняння першого порядку з запізненням аргументу у випадку необмеженого операторного коефіцієнта.***

***It's found sufficient conditions for existence and uniqueness of the bounded on the axis solution of abstract linear delay differential equation of the first order in the case of unbounded operator coefficient.***

### 1. Вступ

Нехай $\left(\mathbf{B}, \|\cdot\|\right)$ – комплексний банахів простір з нульовим елементом $\overline{0}$, $I$ – одиничний оператор в $\mathbf{B}$.

Розглянемо диференціальне рівняння з запізненням аргументу

$$x'(t) = Tx(t-1) + y(t),\ t \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

Відомо [2], що у випадку обмеженого оператора $T$ умова

$$\left\{ite^{it} \mid t \in \mathbf{R}\right\} \cap \sigma(T) = \varnothing \tag{2}$$

є необхідною і достатньою для того, щоб рівняння (1) мало для довільної обмеженої функції $y \in C(\mathbf{R}, \mathbf{B})$ єдиний обмежений розв'язок $x \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{B})$. У цій статті знайдено умови існування та єдиності обмеженого розв'язку рівняння (1) у випадку необмеженого операторного коефіцієнта $T$.

### 2. Допоміжні твердження

***Лема 1.*** Нехай рівняння (1) має для довільної обмеженої функції $y \in C(\mathbf{R}, \mathbf{B})$ єдиний обмежений розв'язок $x \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{B})$ з обмеженою похідною. Тоді виконується умова (2) і