Позначимо $s' := x'\left(t^*\right), s'' := x''\left(t^*\right)$. Оскільки функції x', x'' з B, то $\left|s' - s''\right| \le 2r$, тоді

$$\left\|F_n(x') - F_n(x'')\right\| = \left|f_n(s') - f_n(s'')\right| \le C\left|s' - s''\right| = C\left|x'\left(t^*\right) - x''\left(t^*\right)\right| \le C\left\|x' - x''\right\|.$$

Лему доведено.

Лема 5*. Умова $b_2)$ леми 4 еквівалентна умові*

$$b_3)\ \forall n \in Z_k,\ \forall s', s'' \in S : \left|f_n(s') - f_n(s'')\right| \le C\left|s' - s''\right|.$$

Доведення. $b_2) \Rightarrow b_3)$. Зафіксуємо $s', s'' \in S$. Без обмеження загальності вважаємо $s' < s''$. Зафіксуємо розбиття $\Lambda = \left\{s' = \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n = s''\right\}$ відрізка $\left[s', s''\right]$ таке, що

$$\left|\Lambda\right| = \max_{1 \le i \le n}\left(\lambda_i - \lambda_{i-1}\right) \le 2r.$$

Тоді $\left|f_n(s'') - f_n(s')\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(f_n(\lambda_i) - f_n(\lambda_{i-1})\right)\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|f_n(\lambda_i) - f_n(\lambda_{i-1})\right| \le C\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i - \lambda_{i-1}\right) = C\left|s'' - s'\right|.$

Імплікація $b_3) \Rightarrow b_2)$ – тривіальна.

3. Формулювання основного результату

Позначимо $B_0 := \left\{x \in C\left([0, k+1]\right) : \left|x(t+n) - d(t)\right| \le r, \forall n \in Z_k\right\}$.

Справедлива така теорема.

Теорема 6*. Нехай виконуються умови $b_1)$, $b_3)$, причому стала C задовольняє нерівність $kC < 1$.*

Тоді задача (2) має єдиний розв'язок на множині B. Якщо додатково для розв'язку задачі (2) виконуються умови (3), то задача (1) має єдиний розв'язок на множині B_0.

Доведення. Теорема 6 випливає з лем 1-4.

4. Висновок

Отримано достатні умови продовжуваності "вліво" неперервного розв'язку нелінійного різницевого рівняння з неперервним аргументом в банаховому просторі. Аналогічні результати щодо продовжуваності розв'язків різницевого рівняння з дискретним аргументом містяться у роботах [1–3].

1. *Бойко М. Я., Городній М. Ф.* Про продовжуваність "вліво" розв'язків різницевого рівняння // Нелінійні коливання. – 2007. – Т. 10, № 3. – С. 298–302. 2. *Семенишина І. В.* Про задачу Коші для вироджених різницевих рівнянь у банаховому просторі // Доповіді НАН України. – 2003. – № 7. – С. 27–33. 3. *Теплінський Ю. В., Семенишина І. В.* Про задачу Коші для вироджених різницевих рівнянь у банаховому просторі // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : Збірник наукових праць. – Чернівці: Прут. – 2001. – Вип. 7. – С. 322–333.

Надійшла до редколегії 11.11.2010 р.

УДК 517.98

А. Чайковський, канд. фіз.-мат. наук

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ АБСТРАКТНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Знайдено достатні умови існування та єдиності обмеженого на осі розв'язку абстрактного лінійного диференціального рівняння першого порядку з запізненням аргументу у випадку необмеженого операторного коефіцієнта.

It's found sufficient conditions for existence and uniqueness of the bounded on the axis solution of abstract linear delay differential equation of the first order in the case of unbounded operator coefficient.

1. Вступ

Нехай $\left(\mathbf{B}, \left\|\cdot\right\|\right)$ – комплексний банахів простір з нульовим елементом $\overline{0}$, I – одиничний оператор в $\mathbf{B}$.

Розглянемо диференціальне рівняння з запізненням аргументу

$$x'(t) = Tx(t-1) + y(t),\ t \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

Відомо [2], що у випадку обмеженого оператора T умова

$$\left\{ite^{it} \mid t \in \mathbf{R}\right\} \cap \sigma(T) = \varnothing \tag{2}$$

є необхідною і достатньою для того, щоб рівняння (1) мало для довільної обмеженої функції $y \in C(\mathbf{R}, \mathbf{B})$ єдиний обмежений розв'язок $x \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{B})$. У цій статті знайдено умови існування та єдиності обмеженого розв'язку рівняння (1) у випадку необмеженого операторного коефіцієнта T.

2. Допоміжні твердження

Лема 1. Нехай рівняння (1) має для довільної обмеженої функції $y \in C(\mathbf{R}, \mathbf{B})$ єдиний обмежений розв'язок $x \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{B})$ з обмеженою похідною. Тоді виконується умова (2) і

$$\sup_{\alpha\in\mathbf{R}}\left\|T\left(T-i\alpha e^{i\alpha}I\right)^{-1}\right\|<+\infty .$$

Доведення. Розглянемо оператор $J:D(J)\subset C^1(\mathbf{R},\mathbf{B})\to C(\mathbf{R},\mathbf{B})$, що визначений формулою

$$(Jx)(t)=x'(t)-Tx(t-1),\ t\in\mathbf{R},\ x\in D(J):=\left\{x\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{B})\,|\,\exists Tx\in C(\mathbf{R},\mathbf{B})\right\},$$

де в просторі $C^1(\mathbf{R},\mathbf{B})$ розглядається норма $\|x\|_1:=\|x\|_\infty+\|x'\|_\infty$. За умовою цей оператор є бієкцією, отже за теоремою Банаха має неперервний обернений, тому

$$\forall y\in C(\mathbf{R},\mathbf{B})\ \exists!x_y\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{B}):\ x_y'(t)=Tx_y(t-1)+y(t),\ t\in\mathbf{R},$$
$$\exists C>0\ \forall y\in C(\mathbf{R},\mathbf{B}):\ \|x_y\|_1\le C\|y\|.$$

Розглянемо для довільного елемента $b\in\mathbf{B}$ та довільного числа $\alpha\in\mathbf{R}$ функцію $y(t)=e^{i\alpha t}b,\ t\in\mathbf{R}$. Зробивши в рівнянні (1) заміну $z(t)=e^{i\alpha t}x(t),\ t\in\mathbf{R}$, отримаємо еквівалентне рівняння $z'(t)+i\alpha z(t)=Te^{-i\alpha}z(t-1)+b,\ t\in\mathbf{R}$.

Будь-яка функція, що отримана з функції z зсувом на довільну величину, також є розв'язком цього рівняння. Тому з єдиності розв'язку випливає, що функція z – стала. Таким чином, $\forall b\in\mathbf{B}\ \exists!z_0=-e^{-i\alpha}z(0)\in\mathbf{B}:\left(T-i\alpha e^{i\alpha}I\right)z_0=b$, тобто $i\alpha e^{i\alpha}\notin\sigma(T)$. Крім того,

$$\|Tz_0\|=\|Tx_y\|_\infty\le\|x_y'\|_\infty+\|y\|_\infty\le\|x_y\|_1+\|y\|_\infty\le(C+1)\|y\|_\infty=(C+1)\|b\|.$$

З довільності $\alpha\in\mathbf{R}$ випливають твердження леми. Лему 1 доведено.

Лема 2. Нехай рівняння (1) має для довільної обмеженої функції $y\in C(\mathbf{R},\mathbf{B})$ єдиний обмежений розв'язок $x\in C(\mathbf{R},\mathbf{B})$. Тоді виконується умова (2) і

$$\sup_{\alpha\in\mathbf{R}}\left\|\left(T-i\alpha e^{i\alpha}I\right)^{-1}\right\|<+\infty .$$

Доведення. Розглянемо оператор $J:D(J)\subset C(\mathbf{R},\mathbf{B})\to C(\mathbf{R},\mathbf{B})$, що визначений формулою

$$(Jx)(t)=x'(t)-Tx(t-1),\ t\in\mathbf{R},\ x\in D(J):=\left\{x\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{B})\,|\,\exists Tx\in C(\mathbf{R},\mathbf{B})\right\}.$$

За умовою цей оператор є бієкцією, отже за теоремою Банаха має неперервний обернений, тому

$$\forall y\in C(\mathbf{R},\mathbf{B})\ \exists!x_y\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{B}):\ x_y'(t)=Tx_y(t-1)+y(t),\ t\in\mathbf{R},$$
$$\exists C>0\ \forall y\in C(\mathbf{R},\mathbf{B}):\ \|x_y\|_\infty\le C\|y\|_\infty .$$

Розглянемо для довільного елемента $b\in\mathbf{B}$ та довільного числа $\alpha\in\mathbf{R}$ функцію $y(t)=e^{i\alpha t}b,\ t\in\mathbf{R}$. Зробивши в рівнянні (1) заміну $z(t)=e^{i\alpha t}x(t),\ t\in\mathbf{R}$, отримаємо еквівалентне рівняння $z'(t)+i\alpha z(t)=Te^{-i\alpha}z(t-1)+b,\ t\in\mathbf{R}$.

Будь-яка функція, що отримана з функції z зсувом на довільну величину, також є розв'язком цього рівняння. Тому з єдиності розв'язку випливає, що функція z – стала. Таким чином, $\forall b\in\mathbf{B}\ \exists!z_0=-e^{-i\alpha}z(0)\in\mathbf{B}:\left(T-i\alpha e^{i\alpha}I\right)z_0=b$, тобто $i\alpha e^{i\alpha}\notin\sigma(T)$. Крім того,

$$\|z_0\|=\|x_y\|_\infty\le C\|b\|.$$

З довільності $\alpha\in\mathbf{R}$ випливають твердження леми. Лему 2 доведено.

Нехай виконується умова (2). Позначимо деякий окіл нуля, замикання якого не містить точок з $\sigma(T)$ через U_0, а обмежені зв'язні відкриті частини, на які крива $\left\{ite^{it}:t\in\mathbf{R}\right\}$ розбиває множину $\mathbb{C}\setminus\overline{U_0}$, через $U_n,\ n\ge1$ (в порядку віддалення від початку координат), їх межі – через $\Gamma_n,\ n\ge1$. Вважатимемо, що ці криві пробігаються проти годинникової стрілки. Нехай $\Gamma_n^1,\ n\ge1$ – криві, що пробігаються проти годинникової стрілки та обмежують області $\bigcap_{k=0}^{n}U_k,\ n\ge1$ відповідно. Легко перевірити, що $r:=\inf_{n\in\mathbf{N},\,z\in\Gamma_n^1}\frac{|z|}{n}>0,\ l:=\sup_{n\ge1}\frac{\left|\Gamma_n^1\right|}{n}<+\infty$, де $\left|\Gamma_n^1\right|$ – довжина кривої Γ_n^1.

Лема 3. Нехай виконується умова (2). Тоді існує послідовність проекторів $\{P_n:n\ge1\}$ в банаховому просторі $\mathbf{B}$ така, що:

1) $P_jP_k=P_kP_j=O,\ j\ne k$;
2) при кожному $n\in\mathbf{N}$ підпростір $\mathbf{B}_n=P_n\mathbf{B}$ є інваріантною множиною для оператора T;
3) при кожному $n\in\mathbf{N}$ звуження T_n оператора T на підпростір $\mathbf{B}_n=P_n\mathbf{B}$ є обмеженим оператором зі спектром $\sigma_n=\sigma(T)\cap U_n$;

4) якщо виконується умова (3), то $\sum_{k=1}^{\infty} T^{-1}P_k = T^{-1}$; якщо додатково $\varepsilon_n := \sup_{z\in\Gamma_n^1}\left\|T(T-zI)^{-1}\right\| \to 0,\ n\to\infty$, то $\sum_{k=1}^{\infty} P_k = I$.

Доведення. Покладемо

$$P_n := -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}(T-\lambda I)^{-1}\,d\lambda,\ n\in\mathbf{N}.$$

Тоді твердження 1)-3) леми 3 випливають з [1, с.445]. Крім того, оскільки

$$T^{-1}-T^{-1}\sum_{k=1}^{n}P_k := T^{-1}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\left(\lambda^{-1}+(T-\lambda I)^{-1}\right)d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_{\Gamma_k}\left(\lambda^{-1}+(T-\lambda I)^{-1}\right)d\lambda\right)=$$

$$=T^{-1}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n^1}T\lambda^{-1}(T-\lambda I)^{-1}\,d\lambda\right),\ n\in\mathbf{N},$$

то

$$\left\|T^{-1}-\sum_{k=1}^{n}T^{-1}P_k\right\|=\frac{1}{2\pi}\left\|\int_{\Gamma_n^1}\lambda^{-2}T(T-\lambda I)^{-1}\,d\lambda\right\|\le\frac{R}{2\pi n^2r^2}nl\to 0,\ n\to\infty,$$

а якщо $\varepsilon_n\to 0,\ n\to\infty$, то

$$\left\|I-\sum_{k=1}^{n}P_k\right\|=\frac{1}{2\pi}\left\|\int_{\Gamma_n^1}\lambda^{-1}T(T-\lambda I)^{-1}\,d\lambda\right\|\le\frac{\varepsilon_n}{2\pi nr}nl\to 0,\ n\to\infty.$$

Лему 3 доведено.

3. Основні результати

Теорема 1. Рівняння (1) має для довільної обмеженої функції $y\in C(\mathbf{R},\mathbf{B})$ єдиний обмежений розв'язок $x\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{B})$ з обмеженою похідною тоді і лише тоді, коли оператор T обмежений і виконується умова (2).

Доведення. Достатність доведена в роботі [2].

Необхідність. Враховуючи лему 1, і теорему про обертовність оператора близького до одиничного, отримаємо, що спектр оператора T обмежений. Якщо Γ – деяка крива, що охоплює цей спектр і містить всередині точку 0, то маємо:

$$\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}T(T-\lambda I)^{-1}\,d\lambda\right)x=T\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(T-\lambda I)^{-1}\,d\lambda\right)x=T\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda^{-1}\lambda(T-\lambda I)^{-1}\,d\lambda\right)x=$$

$$=T\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda^{-1}d\lambda-\frac{1}{2\pi i}T\int_{\Gamma}\lambda^{-1}(T-\lambda I)^{-1}\,d\lambda\right)x=T\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda^{-1}d\lambda-\frac{1}{2\pi i}T\int_{|\lambda|=N}\lambda^{-1}(T-\lambda I)^{-1}\,d\lambda\right)x=T(I-O)x=Tx,\ x\in\mathbf{B}.$$

Отже, $T=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}T(T-\lambda I)^{-1}\,d\lambda$ – обмежений оператор. Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Нехай виконується умова (2), $\sum_{k=1}^{\infty}P_k=I$,

$$\sup_{z\in S,\,n\in\mathbf{N},\,\theta\in[0,1]}\left\|e^{T_nz\theta}\left(I-ze^{T_nz}\right)^{-1}\right\|<+\infty,\ \sup_{\alpha\in\mathbf{R}}\left\|\left(T-i\alpha e^{i\alpha}I\right)^{-1}\right\|<+\infty,$$

$y\in C(\mathbf{R},\mathbf{B})$ – обмежена, та

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\left\|P_ny\right\|_{\infty}<+\infty.$$

Тоді рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $x\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{B})$, що має обмежену похідну.

Доведення. З [2] випливає, що при кожному $n\in\mathbf{N}$ існує єдиний обмежений розв'язок $x_n\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{B})$ рівняння

$$x_n'(t)=T_nx_n(t-1)+P_ny(t),\ t\in\mathbf{R},$$

причому цей розв'язок можна подати у вигляді

$$x_n(t)=\int_{t-1}^{t}\left[e^{T_nM(t-s)}\left(I-Me^{T_nM}\right)^{-1}P_ny\right](s)\,ds,\ t\in\mathbf{R},$$

де $(Mx)(t):=x(t-1),\ t\in\mathbf{R},\ x\in C(\mathbf{R},\mathbf{B})$.

Розглянемо функцію $\psi_n(z,\theta):=e^{T_nz\theta}\left(I-ze^{T_nz}\right)^{-1},\ z\in S,\ \theta\in[0,1]$. Маємо

$$\left(\psi_n\right)'_z(z,\theta):=T_n\theta e^{T_nz\theta}\left(I-ze^{T_nz}\right)^{-1}+e^{T_nz\theta}\left(zT_n+I\right)e^{T_nz}\left(I-ze^{T_nz}\right)^{-2}=$$
$$=T_n\theta\psi_n(z,\theta)+\left(zT_n+I\right)\psi_n(z,\theta)\psi_n(z,1),\ z\in S,\ \theta\in[0,1],$$
$$\left(\psi_n\right)''_z(z,\theta):=T_n\theta\left(\psi_n\right)'_z(z,\theta)+T_n\psi_n(z,\theta)\psi_n(z,1)+\left(zT_n+I\right)\Big(\left(\psi_n\right)'_z(z,\theta)\psi_n(z,1)+\psi_n(z,\theta)\left(\psi_n\right)'_z(z,1)\Big),$$
$$z\in S,\ \theta\in[0,1].$$

Тоді, враховуючи, що за умовою $\|T_n\|=O(n),\ n\to\infty$,

$$\sup_{\theta\in[0,1]}\left\|\psi_n(\theta,\cdot)\right\|_\infty=O(1),\ n\to\infty,\ \sup_{\theta\in[0,1]}\left\|\left(\psi_n\right)''_z(\theta,\cdot)\right\|_\infty=O\left(n^2\right),\ n\to\infty.$$

З [3] випливає, що $\|\psi_n(M)\|=O(n),\ n\to\infty$. Тому $\|T_nx_n\|_\infty\le\|\psi_n(M)T_n\|\cdot\|P_ny\|_\infty=O\left(n^2\right)\cdot\|P_ny\|_\infty,\ n\to\infty$.

Покладемо

$$x:=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\ .$$

Оскільки з умови випливає рівномірна збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}Tx_n$, то $\exists Tx\in C(\mathbf{R},\mathbf{B})$ – обмежена і функція x задовольняє рівняння (1). Теорему 2 доведено.

4. Висновки

Знайдено необхідні і достатні умови існування та єдиності обмеженого на осі розв'язку абстрактного лінійного диференціального рівняння першого порядку з запізненням аргументу для довільної відомої обмеженої функції та достатні умови для спеціальної відомої функції.

1. *Рисс Ф., Сёкефальдви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 592 с. 2.*Чайковський А. В.* Про існування та єдиність обмежених розв'язків диференціальних рівнянь зі зсувами аргументу в банаховому просторі // Доповіді НАН України. – 2000. – № 8. – С. 33–37. 3. *Чайковський А. В.* Функції від оператора зсуву та їх застосування до різницевих рівнянь // Укр. мат. Журн. – 2010. – №10. – С. 1408–1419.

Надійшла до редакції 08.11.2010 р.

УДК 519.21

І. Дубовецька, асп.

ЗАДАЧА ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Вивчається задача оцінювання лінійного функціонала від невідомих значень періодично корельованої послідовності за спостереженнями, які забруднені шумом. У випадку відомих спектральних щільностей знайдено формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала. Для заданого класу допустимих спектральних щільностей визначено найменш сприятливу спектральну щільність та мінімаксну спектральну характеристику оптимальної оцінки функціонала.

The problem of optimal estimation of linear functional depending on unknown values of periodically correlated stochastic sequence from observations of the sequence and noise is considered. Formulas for calculation of mean square error and spectral characteristic of optimal estimate of the functional are proposed in the case when spectral densities are exactly known. The least favorable spectral density and minimax spectral characteristic of optimal estimate of the functional are found for the given class of admissible spectral densities.

1. Вступ

У статті Е. Г. Гладишева [1] проведено аналіз спектральних властивостей та зображень періодично корельованих процесів, який базується на зв'язку періодично корельованих та векторних стаціонарних послідовностей. Завдяки результатам Гладишева задача оцінювання періодично корельованих послідовностей зводиться до відповідної задачі для векторних стаціонарних послідовностей.

Класичні методи розв'язування задач екстраполяції, інтерполяції та фільтрації стаціонарних процесів із відомими спектральними щільностями запропоновані А. Н. Колмогоровим [2], Н. Вінером [8], А. М. Ягломом [9, 10]. Задача прогнозу векторних стаціонарних послідовностей досліджена Ю. А. Розановим [3]. У тому випадку, коли повна інформація про точні значення спектральних щільностей відсутня, але задана множина допустимих спектральних щільностей, застосовують мінімаксний метод розв'язування задачі оцінювання. Тобто шукають оцінку, яка мінімізує значення похибки одночасно для всіх щільностей із заданого класу. У. Гренадер [4] вперше застосував мінімаксний підхід до задачі екстраполяції стаціонарних процесів. У статтях М. П. Моклячука [7], М. П. Моклячука та А. Ю. Масютки [6] досліджено задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації для стаціонарних процесів і послідовностей.

У даній статті вивчається задача оптимального лінійного оцінювання функціонала $A\zeta=\sum_{j=0}^{\infty}a(j)\zeta(j)$ від невідомих значень періодично корельованої послідовності $\zeta(n)$ за спостереженнями послідовності $\zeta(n)+\theta(n)$ при $n<0$, де $\theta(n)$ – некорельована з $\zeta(n)$ періодично корельована послідовність. Виведено формули для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оцінки функціонала $A\zeta$ за допомогою класичного методу А. М. Колмогорова у тому випадку, коли відомі спектральні щільності послідовності $\zeta(n)$ та шуму $\theta(n)$.