

ПОСТУПОВЕ НАВАНТАЖЕННЯ ПОВЕРХНІ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ РІЗНИМИ ВИДАМИ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Розглянуто задачу визначення нормальних переміщень точок поверхні пружного півпростору, що викликані поступовим прикладанням осесиметричного навантаження, інтенсивність якого є кусково лінійною функцією часу. Проведено оцінку частини енергії, яка перетворюється на енергію пружних хвиль, для трьох різних типів осесиметричних розподілів при однаковому значенні рівнодіючої навантаження.

Problem of determination of the normal displacements of an elastic half-space surface points caused by the gradual application of an axisymmetric load, the intensity of which is the partially linear function of time, is studied. The estimation of the energy spent on formation of elastic waves for three different axisymmetric distributions with the same value of total force is done.

1. Вступ

Аналіз розв'язків задач, про розподіл хвильових полів напружень і переміщень, що виникають у пружному півпросторі внаслідок прикладання до його межі змінних у часі зовнішніх навантажень, може бути корисним при вивченні динамічної контактної взаємодії пружних тіл в різноманітних динамічних системах. Передусім, це стосується розробки мікрохвильових двигунів. Не менш важливим є застосування задач про динамічне навантаження в медичній акустиці та геофізиці.

В [3] запропонований загальний підхід до вивчення задачі про рух точок поверхні пружного півпростору при миттєвому прикладанні до його межі осесиметричного навантаження $\sigma_0(r) = -p_0 R(r)$, за допомогою якого вдалося подати переміщення на поверхні півпростору у вигляді кратних інтегралів від функцій дійсних змінних. В цій праці досліджено такі частині випадки: навантаження, що виникає під гладким плоским штампом у статичній контактній задачі

$$R^S(r) = 1/\sqrt{1-(r/r_0)^2}, \tag{1}$$

тобто навантаження, що необмежене на краях площадки контакту, та розподіл Герца

$$R^H(r) = \sqrt{1-(r/r_0)^2}, \tag{2}$$

якому відповідає обмежене на площадці контакту навантаження з максимумом посередині ($r = 0$).

У [4] розглянуто навантаження спеціального вигляду

$$R^d(r) = (r/r_0)^2 \sqrt{1-(r/r_0)^2}. \tag{3}$$

Як і розподіл Герца воно є обмеженим на площадці контакту, але з мінімальним значенням посередині та максимумами на відстані $\sqrt{2/3}r_0$ від центру. Надалі у тексті роботи індексом "S" позначаються характеристики, що пов'язані зі штампом, "H" – з розподілом Герца, "d" – з навантаженням спеціального вигляду. Індекс {kd} вказує на один із трьох типів навантаження у загальних формулах.

Дана стаття є продовженням досліджень, що розпочаті у [3] і [4], і присвячена задачам про поступове навантаження межі пружного півпростору трьома обраними видами розподілів. Коротко нагадаємо результати відповідних задач про миттєве навантаження, на яких базуються наші подальші викладки.

2. Миттєве навантаження

Розглянемо пружний півпростір $z < 0$. Припустимо, що при $t < 0$ півпростір знаходився у стані спокою, причому межа є вільною від зусиль. Припустимо, що в момент часу $t = 0$ до поверхні півпростору миттєво прикладено деяке нормальне осесиметричне навантаження $\sigma_0(r)$, розподілене по колу $0 \leq r \leq r_0$, яке надалі залишається постійним в часі. Будемо визначати переміщення точок поверхні півпростору як функції часу t та відстані r між точкою і центром прикладання навантаження. Відповідно до припущень запишемо початкові і граничні умови:

$$u_r|_{t=0} = u_z|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial u_z}{\partial t}|_{t=0} = 0, \tag{4}$$

$$\sigma_z|_{z=0} = H(t) \begin{cases} \sigma_0(r), & r < r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases} \quad \tau_{rz}|_{z=0} = 0, \tag{5}$$

де u_r, u_z – радіальні і нормальні переміщення точок півпростору; τ_{rz}, σ_z – дотичні і нормальні напруження точок півпростору; $H(t)$ – функція Хевісайда.

В загальному випадку, динамічне поле переміщень точок пружного півпростору описується рівнянням Ламе [2]:

$$2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \tag{6}$$

де ν – число Пуассона, G – модуль зсуву, ρ – густина матеріалу.

Застосовуючи до рівнянь руху (6) перетворення Ханкеля за просторовою координатою і перетворення Лапласа за часовою координатою, подамо переміщення півпростору у вигляді кратних інтегралів обернення Рімана-Мелліна. Тоді нормальні переміщення точок поверхні пружного півпростору запишемо у вигляді:

$$u_z(r, 0, t) = -\frac{P}{4\pi G r} f_z(l, \tau) = p_0 \tilde{f}_z(r, t), \tag{7}$$

де рівнодійна

$$P = \left| 2\pi \int_0^{r_0} \sigma_0(r) r dr \right| \tag{8}$$

для різних розподілів має значення

$$P^S = 2\pi r_0^2 p_0, \quad P^H = \frac{2\pi}{3} r_0^2 p_0, \quad P^d = \frac{4\pi}{15} r_0^2 p_0. \tag{9}$$

Функція $f_z(l, \tau)$ від безрозмірного радіусу та часу визначається формулою (11) [3, с.5].

Зазначимо, що переміщення у статичній задачі

$$u_z^{cm} = -\frac{P^{kdl}}{4\pi G r} 2(1-\nu) I_0^{kdl}(l), \tag{10}$$

де $I_0^{kdl}(l)$ – інтеграл обернення за Ханкелем, визначається аналітично [3], [4] для обраних видів навантажень.

3. Поступове навантаження

Припустимо, що інтенсивність навантаження визначається кусково лінійною функцією часу, тобто зростає від нуля за лінійним законом до моменту часу T , а потім залишається постійною

$$p(t) = -p_0 \begin{cases} \frac{t}{T}, & t \leq T, \\ 1, & t > T. \end{cases}$$

У випадку миттєвого прикладання до межі півпростору навантаження $p(r) = p_0 R(r)$ у відповідності до (7) вираз для нормальних переміщень точок поверхні пружного півпростору має вигляд $u_z^i(r, t) = p_0 \tilde{f}_z(r, t)$. Тоді переміщення точок поверхні пружного півпростору при поступовому навантаженні $p(r, t) = p_0(t) R(r)$ можна записати через вже відомі переміщення при миттєвому навантаженні відповідно до типу осесиметричного розподілу за допомогою інтеграла типу згортки $u_z^g(r, t) = \int_0^t p_0(t-\tau) \frac{\partial \tilde{f}_z(r, \tau)}{\partial \tau} d\tau$. Тут індекс "i" вказує на те, що характеристика відпові-

дає задачі про миттєве навантаження, а "g" – про поступове, а функція $R(r)$ – просторова складова інтенсивності навантаження, що визначається формулами (1)-(3). Тоді

$$u_z^g(r, t) = -\frac{p_0}{T} \begin{cases} \int_0^t \tilde{f}_z(r, \tau) d\tau, & t \leq T, \\ \int_{t-T}^t \tilde{f}_z(r, \tau) d\tau, & t > T. \end{cases} \tag{11}$$

Знайдемо вирази нормальних швидкостей точок поверхні пружного півпростору при поступовому навантаженні через переміщення при миттєвому. Маємо:

$$v_z^g(r, t) = \frac{\partial u_z^g(r, t)}{\partial t} = \frac{p_0}{T} \begin{cases} \tilde{f}_z(r, t), & t \leq T, \\ \tilde{f}_z(r, t) - \tilde{f}_z(r, t-T), & t > T. \end{cases} \tag{12}$$

Введемо безрозмірний параметр часу $k = T(c_R / 2r_0)$, який відповідає T , де c_R – швидкість хвилі Релея. k вказує скільки разів хвиля Релея встигне пробігти діаметр площадки навантаження за час, поки його інтенсивність лінійно зростає.

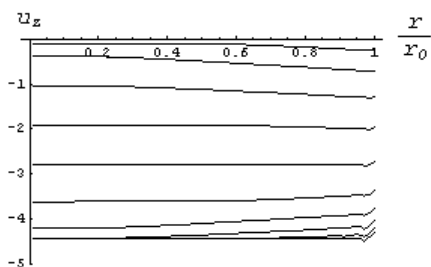


Рис. 1. Нормальні зміщення точок площадки навантаження, викликані поступовим прикладанням тиску, що виникає під плоским штампом у статичній задачі

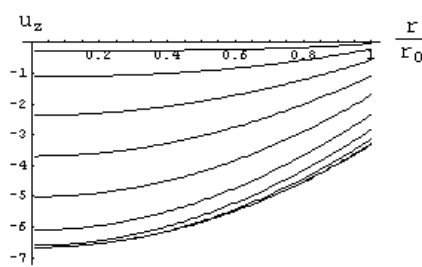


Рис. 2. Нормальні зміщення точок площадки навантаження, викликані поступовим прикладанням тиску Герца

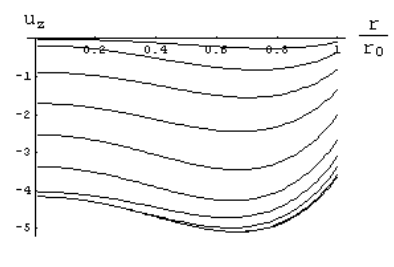


Рис. 3. Нормальні зміщення точок площадки навантаження, викликані поступовим прикладанням тиску спеціального вигляду

За (11) та даними для штампа і розподілу Герца [3] та для навантаження спеціального вигляду [4], побудовано графіки нормальних переміщень точок поверхні пружного півпростору в залежності від часу, який пройшов з моменту прикладання сили для трьох видів навантажень (рисунки 1, 2, та 3) у випадку $T = 2r_0 / c_R$, або $k = 1$.

Показано, що для навантаження, поступово прикладеного до межі півпростору, нормальні зміщення приймають свої статичні значення через час $T + 2r_0 / c_R$.

4. Оцінка частини енергії пружних хвиль при поступовому навантаженні

З теореми Клапейрона слідує, що при миттєвому навантаженні половина роботи зовнішніх сил перетворюється на енергію пружних деформацій, а половина – на енергію пружних хвиль. Оцінимо енергію, яка іде на створення пружних хвиль при поступовому навантаженні пружного півпростору обраними, різними за просторовим розподілом, типами навантажень (1) – (3) за умови, що радіус площадки контакту r_0 є однаковий, а p_0 підібрана таким чином, щоб рівнодіючі навантажень (9) співпадали:

$$p_0^S = \frac{2}{3} p_0, p_0^H = 2 p_0, p_0^d = 5 p_0. \tag{13}$$

Користуючись теоремою Клапейрона і (10), (13), знаходимо енергію пружних деформацій для кожного типу навантаження в аналітичному вигляді

$$A_{cm} = \frac{1}{2} 2\pi \int_0^{r_0} r u_z^{cm}(r) \sigma_0(r) dr, \tag{14}$$

$$A_{cm}^S = \frac{2}{9} \pi^2 p_0^2 r_0^3 \frac{1-\nu}{G}, A_{cm}^H = \frac{4}{15} \pi^2 p_0^2 r_0^3 \frac{1-\nu}{G}, A_{cm}^d = \frac{5}{21} \pi^2 p_0^2 r_0^3 \frac{1-\nu}{G}$$

Роботу зовнішніх сил визначаємо за формулою

$$A(t) = 2\pi \int_0^t \int_0^{r_0} r v_z^g(r, \tau) p(r, \tau) dr d\tau. \tag{15}$$

Швидкості поверхні пружного півпростору $v_z^g(r, \tau)$ у (15) можна знайти за формулою (12) через чисельно отримані безрозмірні нормальні переміщення при миттєвому навантаженні для кожного типу розподілу, які позначимо $U_z^{\{kd\}}$ [3], [4]. Роботу зовнішніх сил знаходимо в момент, коли встановлюється статика, тобто $t = T + 2r_0 / c_R$. Таким чином, маємо:

$$A^S \left(T + \frac{2r_0}{c_R} \right) = \pi p_0^2 r_0^3 \frac{I^S(k)}{G}, A^H \left(T + \frac{2r_0}{c_R} \right) = \frac{1}{3} \pi p_0^2 r_0^3 \frac{I^H(k)}{G}, A^d \left(T + \frac{2r_0}{c_R} \right) = \frac{2}{15} \pi p_0^2 r_0^3 \frac{I^d(k)}{G}, \tag{16}$$

$$I^{\{kd\}}(k) = \frac{1}{k^2} I_1^{\{kd\}} + \frac{1}{k^2} I_{11}^{\{kd\}}(k) + \frac{1}{k} I_2^{\{kd\}} - \frac{1}{k} I_3^{\{kd\}},$$

$$I_1^{\{kd\}} = \int_0^1 \int_0^1 C^{\{kd\}}(r_1) t_1 U_z^{\{kd\}}(r_1, t_1) dt_1 dr_1, I_2^{\{kd\}} = \int_0^1 \int_1^2 C^{\{kd\}}(r_1) U_z^{\{kd\}}(r_1, t_1) dt_1 dr_1, \tag{17}$$

$$I_{11}^{\{kd\}}(k) = \int_0^1 \int_1^k C^{\{kd\}}(r_1) t_1 U_z^{\{kd\}}(r_1, t_1) dt_1 dr_1, I_3^{\{kd\}} = \int_0^1 \int_0^1 C^{\{kd\}}(r_1) U_z^{\{kd\}}(r_1, t_1) dt_1 dr_1,$$

де $r_1 = r_0 / r$, $t_1 = c_R t / 2r_0$ – безрозмірні змінні, $C^{\{kd\}}(r_1)$ – функції для кожного виду розподілу:

$$C^H(r_1) = r_1 \sqrt{1-r_1^2}, C^d(r_1) = r_1^3 \sqrt{1-r_1^2}, C^S(r_1) = r_1 / \sqrt{1-r_1^2}.$$

5. Чисельні результати та висновки

Визначено частину роботи зовнішніх сил, яка іде на утворення пружних хвиль для розглянутих трьох типів навантаження $1 - A_{cm}^{kd} / A^{kd}(T + 2r_0 / c_R)$. На основі проведеного чисельного аналізу для різних значень параметру k (що відповідає різним T , тобто швидкості навантаження) виявлено різницю між частинами енергії, які ідуть на створення пружних хвиль для різних просторових розподілів навантажень. Відповідні чисельні данні подано в табл. 1, де "Д" – відсоток роботи зовнішніх сил, який перетворюється на енергію пружних статичних деформацій, "Х" – на утворення пружних хвиль.

Таблиця 1. Розподіл роботи зовнішніх сил на енергії статичної деформації та енергію хвиль

	Hertz %	Double %	Різниця H-D%	Stamp %	Різниця H-S%
$k = 1$	Д – 68,0062, Х – 31,9938	Д – 66,8189, Х – 33,1811	1,1873	Д – 66,1518, Х – 33,8482	1,8544
$k = 2$	Д – 78,7939, Х – 21,2061	Д – 77,2899, Х – 22,7101	1,50405	Д – 76,3909, Х – 23,6091	2,40301
$k = 5$	Д – 89,6221, Х – 10,3779	Д – 88,6163, Х – 11,3837	1,0058	Д – 87,9983, Х – 12,0017	1,6238

З отриманих результатів випливає, що частина енергії, яка йде на утворення пружних хвиль, залежить не лише від швидкості прикладання навантаження, а також і від його розподілу.

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с. 2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509 с. 3. Куценко А. Г., Олійник В. Н., Улитко А. Ф. Перемещения точек поверхности упругого полупространства, вызванного мгновенным приложением осесимметричной нагрузки // Акуст. вісн. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 1–12. 4. Куценко О. Г., Баркова О. В. Нормальні зміщення точок поверхні пружного півпростору, викликані осесимметричним навантаженням спеціального вигляду // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 3. – С. 130–135.

Надійшла до редколегії 20.12.2010 р.

УДК 539.3

М. Шворак, студ.

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ДВОШАРОВОГО ЦИЛІНДРА

Отримано аналітичний розв'язок нестационарної осесимметричної задачі термопружності для двошарового циліндра, що відповідає стрибкоподібній зміні в часі температури зовнішнього середовища. Нестационарна задача теплопроводності розв'язана за допомогою перетворення Лапласа. Кругові та позаддовжні напруження отримані як розв'язок квазістатичної задачі термопружності при заданому розподілі температури.

Analytic solution of non-stationary axially symmetric problem of thermoelasticity for two-layer cylinder that corresponds to jump-like change in time ambient temperature are given. Non-stationary problem of thermal conduction is solved with the help of Laplace transform. Circle and longitudinal stresses are obtained as solution of quasi-static problem of thermoelasticity for given temperature distribution.

1. Вступ

У даній статті запропоновано аналітичний підхід до визначення напружено-деформованого стану (НДС) корпусу реактору (КР) в процесі протікання аварійного сценарію з умовною назвою "тепловий удар". КР обрано у якості об'єкту дослідження, оскільки він є основним конструктивним елементом реактора. Через явище радіаційного окрихчування найнебезпечнішою його частиною є частина напроти активної зони, де він являє собою круглий циліндр. Оскільки з внутрішньої сторони корпус реактора вкрито антикорозійним наплавленням з фізичними властивостями, відмінними від фізичних властивостей основного металу, то КР напроти активної зони може моделюватися двошаровим пружним циліндром. Аварійний сценарій "теплого удару" є одним із найнебезпечніших аварійних сценаріїв і передбачає, що в реактор, який знаходиться в стані рівномірного нагріву при робочій температурі (біля 270-290°C) швидко заливається холодною водою (біля 20°C).

Таким чином, процес теплового удару КР може бути досліджений на основі розв'язку задачі термопружності, що полягає у визначенні напружено-деформованого стану двошарового циліндру, у якого в початковий момент на внутрішній стінці миттєво змінюється температура зовнішнього середовища. Оскільки деформація пружного тіла викликає малу зміну його температури [2], ми маємо квазістатичну задачу термопружності, в якій не враховується ефект оберненої зв'язаності температурного поля і поля деформацій. Останнє набагато спрощує поставлену задачу, бо замість динамічної задачі термопружності, яка є досить складною, достатньо розглянути задачу нестационарної теплопроводності для двошарового циліндру та квазістатичну задачу про визначення температурних напружень за відомим розподілом температури в кожний момент часу.

У даній роботі зроблено уточнення розв'язку, запропонованого в [3], шляхом розгляду стінки з урахуванням скінченності її кривини. В [3] припускалося, що стінку можна замінити кусково-однорідним стрижнем.

2. Задача нестационарної теплопроводності

Розглядається нескінченний двошаровий циліндр, коли зовнішня поверхня циліндра теплоізолювана, а на всій внутрішній поверхні температура зовнішнього середовища змінюється однаково. Таким чином, маємо наступну нестационарну осесимметричну задачу: потрібно визначити в будь-який момент часу $t > 0$ температуру в області, що складається з двох однорідних частин "1", "2", якщо при $t < 0$ температура в кожній точці була рівна нульовій, а в початковий момент часу $t = 0$ на внутрішній стороні стрибкоподібно змінилася до значення T_0 (рис. 1). Бічна поверхня та правий кінець стержня вважається теплоізолюваними.

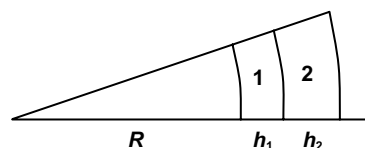


Рис. 1. Геометрія задачі теплопроводності

Позначимо через $T_1(r, t)$ розподіл температури на 1-й частині стержня, $T_2(r, t)$ – відповідно на 2-й. Задані розподіли температур задовольняють нестационарним рівнянням теплопроводності

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = \frac{a_k^2}{h^2} \left(\frac{\partial^2 T_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r + R/h} \frac{\partial T_k}{\partial r} \right), \quad k = 1, 2, \quad r \in [0, 1], \quad t \in [0, \infty]. \quad (1)$$

При цьому початкові умови є однорідними: