

З отриманих результатів випливає, що частина енергії, яка йде на утворення пружних хвиль, залежить не лише від швидкості прикладання навантаження, а також і від його розподілу.

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с. 2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509 с. 3. Куценко А. Г., Олійник В. Н., Улитко А. Ф. Перемещения точек поверхности упругого полупространства, вызванного мгновенным приложением осесимметричной нагрузки // Акуст. вісн. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 1–12. 4. Куценко О. Г., Баркова О. В. Нормальные смещения точек поверхности пружного полупространства, вызванные осесимметричным навантаженням спеціального вигляду // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 3. – С. 130–135.

Надійшла до редколегії 20.12.2010 р.

УДК 539.3

М. Шворак, студ.

## АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ДВОШАРОВОГО ЦИЛІНДРА

*Отримано аналітичний розв'язок нестационарної осесимметричної задачі термопружності для двошарового циліндра, що відповідає стрибкоподібній зміні в часі температури зовнішнього середовища. Нестационарна задача теплопроводності розв'язана за допомогою перетворення Лапласа. Кругові та поєздовжні напруження отримані як розв'язок квазістатичної задачі термопружності при заданому розподілі температури.*

*Analytic solution of non-stationary axially symmetric problem of thermoelasticity for two-layer cylinder that corresponds to jump-like change in time ambient temperature are given. Non-stationary problem of thermal conduction is solved with the help of Laplace transform. Circle and longitudinal stresses are obtained as solution of quasi-static problem of thermoelasticity for given temperature distribution.*

### 1. Вступ

У даній статті запропоновано аналітичний підхід до визначення напружено-деформованого стану (НДС) корпусу реактору (КР) в процесі протікання аварійного сценарію з умовною назвою "тепловий удар". КР обрано у якості об'єкту дослідження, оскільки він є основним конструктивним елементом реактора. Через явище радіаційного окрихчування найнебезпечнішою його частиною є частина напроти активної зони, де він являє собою круглий циліндр. Оскільки з внутрішньої сторони корпус реактора вкрито антикорозійним наплавленням з фізичними властивостями, відмінними від фізичних властивостей основного металу, то КР напроти активної зони може моделюватися двошаровим пружним циліндром. Аварійний сценарій "теплого удару" є одним із найнебезпечніших аварійних сценаріїв і передбачає, що в реактор, який знаходиться в стані рівномірного нагріву при робочій температурі (біля 270-290°C) швидко заливається холодною водою (біля 20°C).

Таким чином, процес теплового удару КР може бути досліджений на основі розв'язку задачі термопружності, що полягає у визначенні напружено-деформованого стану двошарового циліндру, у якого в початковий момент на внутрішній стінці миттєво змінюється температура зовнішнього середовища. Оскільки деформація пружного тіла викликає малу зміну його температури [2], ми маємо квазістатичну задачу термопружності, в якій не враховується ефект оберненої зв'язаності температурного поля і поля деформацій. Останнє набагато спрощує поставлену задачу, бо замість динамічної задачі термопружності, яка є досить складною, достатньо розглянути задачу нестационарної теплопроводності для двошарового циліндру та квазістатичну задачу про визначення температурних напружень за відомим розподілом температури в кожний момент часу.

У даній роботі зроблено уточнення розв'язку, запропонованого в [3], шляхом розгляду стінки з урахуванням скінченності її кривини. В [3] припускалося, що стінку можна замінити кусково-однорідним стрижнем.

### 2. Задача нестационарної теплопроводності

Розглядається нескінченний двошаровий циліндр, коли зовнішня поверхня циліндра теплоізолювана, а на всій внутрішній поверхні температура зовнішнього середовища змінюється однаково. Таким чином, маємо наступну нестационарну осесимметричну задачу: потрібно визначити в будь-який момент часу  $t > 0$  температуру в області, що складається з двох однорідних частин "1", "2", якщо при  $t < 0$  температура в кожній точці була рівна нульовій, а в початковий момент часу  $t = 0$  на внутрішній стороні стрибкоподібно змінилася до значення  $T_0$  (рис. 1). Бічна поверхня та правий кінець стержня вважається теплоізолюваними.

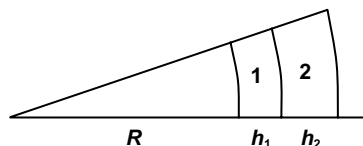


Рис. 1. Геометрія задачі теплопроводності

Позначимо через  $T_1(r, t)$  розподіл температури на 1-й частині стержня,  $T_2(r, t)$  – відповідно на 2-й. Задані розподіли температур задовольняють нестационарним рівнянням теплопроводності

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = \frac{a_k^2}{h^2} \left( \frac{\partial^2 T_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r + R/h} \frac{\partial T_k}{\partial r} \right), \quad k = 1, 2, \quad r \in [0, 1], \quad t \in [0, \infty]. \quad (1)$$

При цьому початкові умови є однорідними:

$$T_k = 0, \quad k = 1, 2, \quad (2)$$

а граничні умови можна записати у вигляді

$$\left( T_1 - \frac{\lambda_1}{H_1 h} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = T_0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad T_1 \Big|_{r=\frac{h_1}{h}} = T_2 \Big|_{r=\frac{h_1}{h}}, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=\frac{h_1}{h}} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=\frac{h_1}{h}}, \quad (3)$$

В (1) – (3) введені наступні позначення:  $h = h_1 + h_2$ ,  $a_k^2 = \frac{\lambda_k}{\rho_k c_k}$ ,  $\lambda_k$  – коефіцієнти внутрішньої теплопровідності

ті,  $\rho_k$  – густини,  $c_k$  – теплоємкості матеріалів шарів циліндрів,  $H$  – коефіцієнт тепловіддачі. Дві останні умови в (3) забезпечують неперервність розподілу температури та теплового потоку при переході від одного шару до іншого.

Для знаходження розв'язку поставленої задачі скористаймося перетворенням Лапласа за часовою змінною  $t$  та параметром перетворення  $s$ . Внаслідок застосування перетворення Лапласа в просторі образів одержуємо граничну задачу для рівняння Бесселя, розв'язок якої має вигляд

$$\tilde{T}_k(r, s) = C_k^{(1)} J_0 \left( i \frac{\sqrt{s} h}{a_k} \left( r + \frac{R}{h} \right) \right) + C_k^{(2)} Y_0 \left( -i \frac{\sqrt{s} h}{a_k} \left( r + \frac{R}{h} \right) \right), \quad (4)$$

де введено наступні позначення

$$\begin{aligned} C_1^1 &= \frac{1}{A} \left( \frac{T_0}{s} - \frac{u\gamma - \zeta v}{\zeta\eta - \gamma\xi} B \right), \quad C_1^2 = \frac{D}{C} \frac{u\eta - v\xi}{\zeta\eta - \gamma\xi}, \quad C_2^1 = \frac{u\gamma - \zeta v}{\zeta\eta - \gamma\xi}, \quad C_2^2 = \frac{u\eta - v\xi}{\zeta\eta - \gamma\xi}, \\ \xi &= Y_0 \left( -i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right) - \frac{B}{A} J_0 \left( i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right), \quad \zeta = Y_0 \left( -i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) + \frac{D}{C} J_0 \left( i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right), \\ \eta &= Y_1 \left( -i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right) + \frac{B}{A} J_1 \left( i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right), \quad \gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{a_1}{a_2} \left( Y_1 \left( -i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) + \frac{D}{C} J_1 \left( i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) \right), \\ u &= \frac{T_0}{s} \frac{1}{A} J_0 \left( i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right), \quad v = -\frac{T_0}{s} \frac{1}{A} J_1 \left( i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right), \\ A &= J_0 \left( i \frac{\sqrt{s}}{a_1} R \right) + \omega J_1 \left( i \frac{\sqrt{s}}{a_1} R \right), \quad B = Y_0 \left( -i \frac{\sqrt{s}}{a_1} R \right) + \omega Y_1 \left( -i \frac{\sqrt{s}}{a_1} R \right), \\ C &= J_1 \left( i \frac{\sqrt{s} h}{a_2} \left( 1 + \frac{R}{h} \right) \right), \quad D = Y_1 \left( i \frac{\sqrt{s} h}{a_2} \left( 1 + \frac{R}{h} \right) \right), \quad \omega = i \frac{\sqrt{s} h}{a_1} \frac{\lambda}{H_1 h}. \end{aligned}$$

Для знаходження розподілу температури необхідно виконати обернене перетворення Лапласа, для чого скористаємося другою теоремою розкладу [1]:

$$T_k(r, t) = \sum_{s=s_k} \text{Res} \tilde{T}_k(r, s) e^{st},$$

де сума лишків береться за всіма простими полюсами  $\tilde{T}_k(r, s)$ , а рівняння для знаходження полюсів має вигляд

$$\zeta\eta - \gamma\xi = 0. \quad (5)$$

Остаточо розв'язок задачі (1) – (3) можемо записати у вигляді

$$\begin{aligned} T_1(r, t) &= T_0 + \sum_{s=s_k} \frac{\zeta \left( u \frac{\eta}{\xi} - v \right)}{(\zeta\eta - \gamma\xi)_s} \left[ -\frac{B}{A} J_0 \left( i \frac{\sqrt{s} h}{a_1} \left( r + \frac{R}{h} \right) \right) + Y_0 \left( -i \frac{\sqrt{s} h}{a_1} \left( r + \frac{R}{h} \right) \right) \right] e^{st}, \\ T_2(r, t) &= \sum_{s=s_k} \frac{\xi \left( u \frac{\eta}{\xi} - v \right)}{(\zeta\eta - \gamma\xi)_s} \left[ \frac{D}{C} J_0 \left( i \frac{\sqrt{s} h}{a_2} \left( r + \frac{R}{h} \right) \right) + Y_0 \left( -i \frac{\sqrt{s} h}{a_2} \left( r + \frac{R}{h} \right) \right) \right] e^{st}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для перевірки правильності одержаних результатів виконаємо асимптотичний розклад лівої частини (5) при  $h/R \rightarrow 0$ . В розгорнутому вигляді рівняння (5) має вигляд

$$\begin{aligned} &\left[ C Y_0 \left( -i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) + D J_0 \left( i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) \right] \times \left[ A Y_1 \left( -i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right) + B J_1 \left( i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right) \right] - \\ &- \left[ C \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{a_1}{a_2} \left( Y_1 \left( -i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) + D J_1 \left( i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) \right) \right] \times \left[ A Y_0 \left( -i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right) - B J_0 \left( i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Розглянемо вираз в перших дужках:

$$C Y_0 \left( -i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) + D J_0 \left( i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) = J_1 \left( i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) Y_0 \left( -i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) + Y_1 \left( i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) J_0 \left( i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right).$$

Зробивши заміни  $z = -i\sqrt{s}(h_1 + R)$ ,  $\mu = -\frac{ih_1}{a_1}\sqrt{s}$ ,  $\beta = \frac{a_1}{a_2} \frac{h_1}{h_2}$  та виконавши асимптотичний розклад функцій Бесселя для великих значень їх аргументів, отримаємо

$$Y_0(z)J_1(z + \beta\mu) - J_0(z)Y_1(z + \beta\mu) \approx \frac{2}{\pi\sqrt{z(z + \beta\mu_n)}} \left[ \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(z + \beta\mu - \frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(z + \beta\mu - \frac{3\pi}{4}\right) \right] = \frac{2}{\pi\sqrt{z(z + \beta\mu_n)}} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\mu\right) = \frac{2}{\pi\sqrt{z(z + \beta\mu_n)}} \cos(\beta\mu).$$

Провівши аналогічні перетворення інших членів (5), остаточно отримаємо

$$\cos \mu_n \cos \beta\mu_n - \alpha \sin \mu_n \sin \beta\mu_n - \gamma \mu_n (\sin \mu_n \cos \beta\mu_n + \alpha \cos \mu_n \sin \beta\mu_n) = 0,$$

що повністю відповідає рівнянню для знаходження полюсів при розгляді задачі для стрижня, що складається з двох однорідних частин [3].

### 3. Квазістатична задача термопружності

Розв'яжемо тепер задачу термопружності. Будемо вважати, що температура у внутрішніх точках циліндра змінюється досить повільно. За такого припущення можна знехтувати силами інерції і розглядати статичну задачу термопружності. Проте, оскільки температурне поле все ж таки залежить від часової координати  $t$ , правильно говорити про квазістатичну задачу термопружності.

Отже, будемо розглядати рівновагу циліндра, який складається з двох однорідних пружних шарів: параметри першого шару будемо позначати індексом "1", другого – "2". Припустимо, що до циліндра не прикладено зовнішніх механічних зусиль, а зовнішнє навантаження відповідає температурному полю (6), якщо вважати, що  $r = x + a$ ,  $h_1 = b - a$ ,  $h_2 = c - b$ . Тут  $r$  – радіальна координата, що відраховується від осі циліндра. З умови осьової симетрії та припущення про рівність значень коефіцієнта Пуассона матеріалів обох шарів маємо, що дотичні напруження відсутні. Ненульовими залишаються радіальні напруження  $\sigma_r$ , колові напруження  $\sigma_\theta$  та поздовжні напруження  $\sigma_z$  в кожному з двох шарів. Вони разом з радіальними зміщеннями  $u$  задовольняють рівнянням рівноваги

$$\frac{d\sigma_{rk}}{dr} + \frac{\sigma_{rk} - \sigma_{\theta k}}{r} = 0, \quad k = 1, 2 \tag{7}$$

та граничні умови

$$\sigma_{r1}|_{r=a} = \sigma_{r2}|_{r=c} = 0, \quad u_1|_{r=b} = u_2|_{r=b}, \quad \sigma_{r1}|_{r=b} = \sigma_{r2}|_{r=b}, \quad \sigma_z|_{z=\pm L} = 0. \tag{8}$$

Розв'язок задачі (7) – (8) побудовано, використовуючи підхід [4], в [3]. Подамо лише остаточні вирази для колової та поздовжніх напружень, які становлять найбільший інтерес при розрахунку на міцність

$$\sigma_{\theta 1} = \frac{\alpha_1 E_1}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r dr + \int_a^r T r dr - T r^2 \right] - \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2}{r^2} q,$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{\alpha_2 E_2}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{r^2 + b^2}{c^2 - b^2} \int_b^c T r dr + \int_b^r T r dr - T r^2 \right] + \frac{r^2 + c^2}{c^2 - b^2} \frac{b^2}{r^2} q, \tag{9}$$

$$\sigma_{z1} = \frac{\alpha_1 E_1}{1-\nu} \left[ \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r dr - T r^2 \right] + \frac{Q}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_{z2} = \frac{\alpha_2 E_2}{1-\nu} \left[ \frac{2}{c^2 - b^2} \int_b^c T r dr - T r^2 \right] - \frac{Q}{c^2 - b^2}. \tag{10}$$

Коректність побудованого розв'язку перевірено на прикладі задачі про температурний удар циліндричної частини корпусу реактора ВВЕР-1000. Одержаний аналітичний розв'язок порівнювався з розв'язком, одержаним за допомогою апробованого методу скінченних елементів.

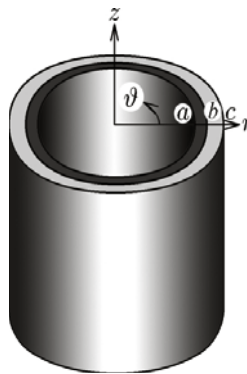


Рис. 2. Геометрія термопружної задачі

На рисунках 3, 4 та 5 подано розподіли температур, колових та поздовжніх напружень для різних моментів часу. Суцільні лінії відповідають аналітичному розв'язку (6), (9) та (10), точки – чисельному розв'язку в вузлах сітки.

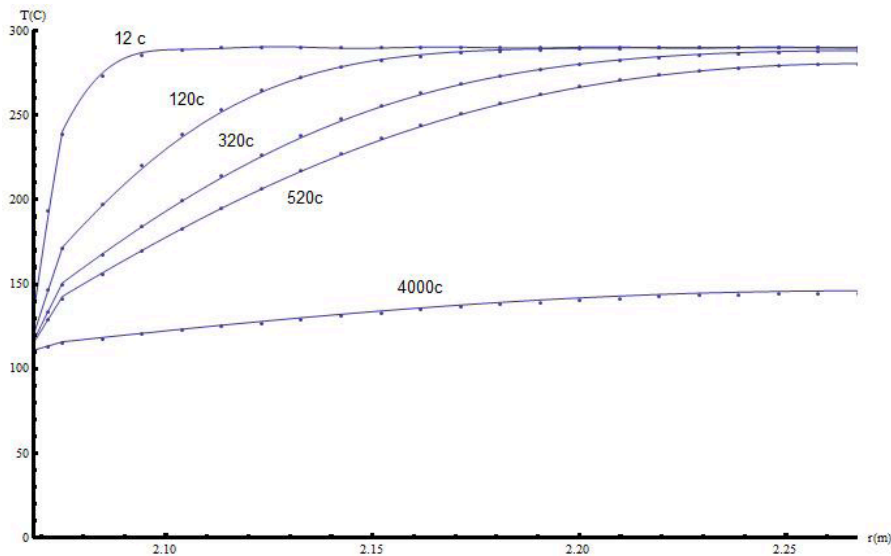


Рис. 3. Розподіл температури

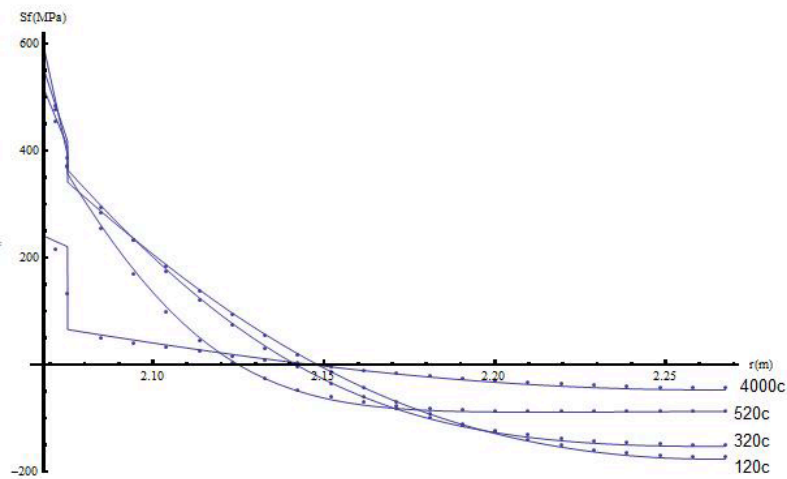


Рис 4. Розподіл колових напружень

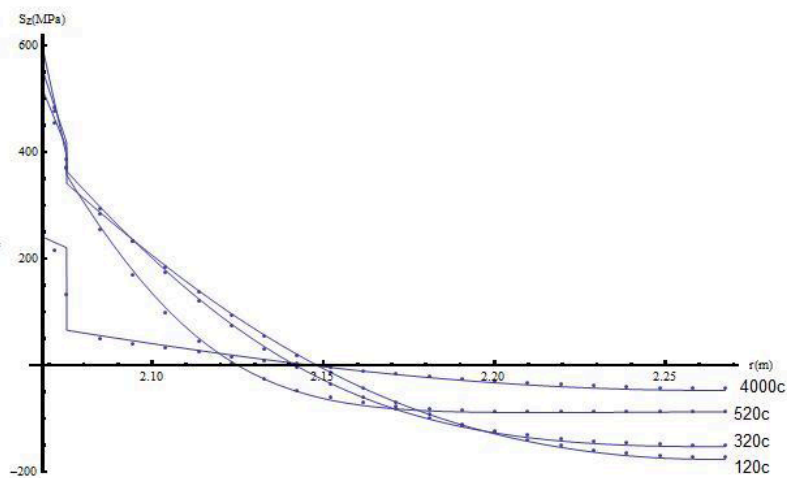


Рис 5. Розподіл повздовжніх напружень

Відхилення в значеннях температури та напружень пояснюються тим, що при одержанні чисельного розв'язку враховувалася залежність фізичних параметрів від температури. Аналіз чисельних результатів вказує на те, що врахування кривини стінки позитивно впливає на точність розв'язку.

#### 4. Висновки

Одержано розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для двошарового пружного циліндру, зокрема, встановлено залежності температури, поздовжніх та колових напружень від радіальної та часової координати. На конкретному прикладі термічного удару корпусу реактора ВВЕР-1000 проведено порівняльний аналіз одержаного розв'язку з точним чисельним розв'язком, який враховує залежність фізичних параметрів від температури. Аналіз засвідчив високу точність (похибка в межах 5%) аналітичного розв'язку.

1. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с. 2. Коваленко А. Д. Термоупругость. – К.: Вища школа, 1975. – 216 с. 3. Куценко О. Г., Харитонов О. М., Зражевський Г. М. Аналітичний розв'язок нестационарної задачі термоупругості, що відповідає теплоудару двошарового циліндру // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 2. – С. 65–70. 4. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 575 с.

Надійшла до редколегії 22.12.2010 р.

УДК 533.6.013.42

Р. Богун, мол. наук. співр.

### ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ РІДИНИ З ПЛАСТИНКОЮ НА ЇЇ ВІЛЬНІЙ ПОВЕРХНІ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ З ДОВІЛЬНИМ ОСЕСИМЕТРИЧНИМ ДНОМ

*Розглянуто задачу про вільні коливання ідеальної рідини в резервуарі, що має форму прямого кругового циліндра з довільним осесиметричним дном та пружну пластинку, яка покриває незбурену вільну поверхню рідини. З використанням розкладу за власними функціями допоміжно введеної спектральної задачі з параметром в граничній умові знайдено аналітичний розв'язок задачі. Розглянуто конкретний приклад механічної системи, для якого за запропонованим алгоритмом побудовано розв'язок.*

*The problem of coupled oscillation of ideal liquid in a cylindrical container with axisymmetric bottom and an elastic plate on the free surface is studied. An analytical solution of mentioned problem is constructed using eigenfunction expansion method. Using concrete example, we analyze the obtained solution.*

#### 1. Вступ

Створення резервуарів великої ємності для транспортування та збереження рідини потребує докладного аналізу можливого резонансного збурення хвильових рухів рідини. В якості засобів обмеження рухливості рідини використовують спеціальні мембрани або тонкі пружні пластинки, які покривають вільну незбурену поверхню рідини. Проблема взаємодії рідини і пружних елементів на її вільній поверхні в резервуарах канонічної геометричної форми досліджувалась в [2, 3, 5]. В [1] запропоновано наближені методи розв'язання задачі гідропругості у випадку довільного осесиметричного контейнера.

У даній статті розглядається задача гідропругості про зв'язані вільні коливання рідини та пружної пластинки, причому рідина знаходиться в резервуарі, який має форму прямого кругового циліндра з довільним осесиметричним дном, а пружний елемент розміщено на вільній поверхні рідини і жорстко закріплено на стінках резервуара.

#### 2. Постановка задачі

Розглянемо резервуар, який має форму прямого кругового циліндра з довільним осесиметричним дном. Нехай резервуар заповнено ідеальною та нестисловою рідиною на постійну глибину  $H = h + h_d$  ( $h$  – висота рідини в циліндричній частині посудини,  $h_d$  – висота осесиметричного дна). Будемо також вважати, що незбурена вільна поверхня рідини покрита пружною круговою пластинкою радіуса  $r_0$ , жорстко закріпленою по своєму контуру на стінках резервуара, а поле гравітаційних сил паралельне осі симетрії резервуара. Введемо до розгляду циліндричну систему координат  $Or\eta z$  таку, що вісь  $Oz$  співпадає з віссю симетрії резервуара і спрямована вгору (протилежно до вектора земного прискорення). Початок системи координат  $Or\eta z$  розмістимо в площині пластинки.

Задача про власні неосесиметричні коливання описаної механічної системи в безрозмірних величинах після відокремлення кутової та часової змінних може бути сформульована таким чином [1]:

$$\begin{aligned} -L^2[W(r)] + \delta W(r) &= -a^{-1}\gamma^2\Phi(r, 0), \quad r \in [0, r_0], \quad W(r_0) = 0, \quad W'(r_0) = 0, \quad |W(0)| < \infty, \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} &= 0, \quad (r, z) \in Q, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{L^*} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} \Big|_{L_0} = W(r), \quad \int_{L_0} W(r) ds = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $W(r)$  – складова нормального прогину пластинки в напрямку осі  $Oz$ ,  $\Phi(r, z)$  – складова потенціалу малих зміщень рідини,  $Q$  – область меридіонального перерізу резервуара,  $L_0$  і  $L^*$  – лінії перетину площини меридіонального перерізу з незбуреною поверхнею пластинки і змочуваною поверхнею резервуара відповідно,  $\mathbf{v}$  – орт зовнішньої нормалі до границі області  $Q$ .

В (1) введено такі позначення:

$$\delta = \gamma^2 - \varepsilon, \quad \gamma^2 = \frac{a}{D}\lambda^2, \quad a = \frac{\rho_0\delta_0}{\rho R}, \quad D = \frac{D_c}{\rho g R^4}, \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2 R}{g}, \quad \varepsilon = \frac{1}{D}, \quad L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}.$$

Тут  $\rho_0$ ,  $\delta_0$ ,  $D_c$  – відповідно густина, товщина і циліндрична жорсткість пластинки,  $\rho$  – густина рідини,  $R$  – характерний лінійний розмір резервуара,  $\omega$  – власна частота коливань рідини і пластинки,  $g$  – модуль градієнта поля масових сил.