4. Висновки

Одержано розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності для двошарового пружного циліндру, зокрема, встановлено залежності температури, поздовжніх та колових напружень від радіальної та часової координати. На конкретному прикладі термічного удару корпуса реактора ВВЕР-1000 проведено порівняльний аналіз одержаного розв'язку з точним чисельним розв'язком, який враховує залежність фізичних параметрів від температури. Аналіз засвідчив високу точність (похибка в межах 5%) аналітичного розв'язку.

1. *Деч Г.* Руководтво к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с. 2.*Коваленко А. Д.* Термоупругость. – К.: Вища школа, 1975. – 216 с. 3.*Куценко О. Г., Харитонов О. М., Зражевський Г. М.* Аналітичний розв'язок нестаціонарної задачі термопружності, що відповідає темроудару двошарового циліндру // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 2. – С. 65–70. 4. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 575 с.

Надійшла до редколегії 22.12.2010 р.

УДК 533.6.013.42

Р. Богун, мол. наук. співр.

ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ РІДИНИ З ПЛАСТИНКОЮ НА ЇЇ ВІЛЬНІЙ ПОВЕРХНІ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ З ДОВІЛЬНИМ ОСЕСИМЕТРИЧНИМ ДНОМ

Розглянуто задачу про вільні коливання ідеальної рідини в резервуарі, що має форму прямого кругового циліндра з довільним осесиметричним дном та пружну пластинку, яка покриває незбурену вільну поверхню рідини. З використанням розкладу за власними функціями допоміжно введеної спектральної задачі з параметром в граничній умові знайдено аналітичний розв'язок задачі. Розглянуто конкретний приклад механічної системи, для якого за запропонованим алгоритмом побудовано розв'язок.

The problem of coupled oscillation of ideal liquid in a cylindrical container with axisymmetric bottom and an elastic plate on the free surface is studied. An analytical solution of mentioned problem is constructed using eigenfunction expansion method. Using concrete example, we analyze the obtained solution.

1. Вступ

Створення резервуарів великої ємності для транспортування та збереження рідини потребує докладного аналізу можливого резонансного збурення хвильових рухів рідини. В якості засобів обмеження рухливості рідини використовують спеціальні мембрани або тонкі пружні пластинки, які покривають вільну незбурену поверхню рідини. Проблема взаємодії рідини і пружних елементів на її вільній поверхні в резервуарах канонічної геометричної форми досліджувалась в [2, 3, 5]. В [1] запропоновано наближені методи розв'язання задачі гідропружності у випадку довільного осесиметричного контейнера.

У даній статті розглядається задача гідропружності про зв'язані вільні коливання рідини та пружної пластинки, причому рідина знаходиться в резервуарі, який має форму прямого кругового циліндра з довільним осесиметричним дном, а пружний елемент розміщено на вільній поверхні рідини і жорстко закріплено на стінках резервуара.

2. Постановка задачі

Розглянемо резервуар, який має форму прямого кругового циліндра з довільним осесиметричним дном. Нехай резервуар заповнено ідеальною та нестисливою рідиною на постійну глибину $H = h + h_d$ (h – висота рідини в циліндричній частині посудини, h_d – висота осесиметричного дна). Будемо також вважати, що незбурена вільна поверхня рідини покрита пружною круговою пластинкою радіуса r_0, жорстко закріпленою по своєму контуру на стінках резервуара, а поле гравітаційних сил паралельне осі симетрії резервуара. Введемо до розгляду циліндричну систему координат $Or\eta z$ таку, що вісь Oz співпадає з віссю симетрії резервуара і спрямована вгору (протилежно до вектора земного прискорення). Початок системи координат $Or\eta z$ розмістимо в площині пластинки.

Задача про власні неосесиметричні коливання описаної механічної системи в безрозмірних величинах після відокремлення кутової та часової змінних може бути сформульована таким чином [1]:

$$-L^2[W(r)] + \delta W(r) = -a^{-1}\gamma^2\Phi(r,0), \quad r \in [0, r_0], \quad W(r_0) = 0, \quad W'(r_0) = 0, \quad |W(0)| < \infty,$$
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (r,z) \in Q, \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\right|_{L^*} = 0, \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{L_0} = W(r), \quad \int_{L_0} W(r)ds = 0, \tag{1}$$

де $W(r)$ – складова нормального прогину пластинки в напрямку осі Oz, $\Phi(r,z)$ – складова потенціалу малих зміщень рідини, Q – область меридіонального перерізу резервуара, L_0 і L^* – лінії перетину площини меридіонального перерізу з незбуреною поверхнею пластинки і змочуваною поверхнею резервуара відповідно, $\mathbf{v}$ – орт зовнішньої нормалі до границі області Q.

В (1) введено такі позначення:

$$\delta = \gamma^2 - \varepsilon, \quad \gamma^2 = \frac{a}{D}\lambda^2, \quad a = \frac{\rho_0\delta_0}{\rho R}, \quad D = \frac{D_c}{\rho g R^4}, \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2 R}{g}, \quad \varepsilon = \frac{1}{D}, \quad L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}.$$

Тут ρ_0, δ_0, D_c – відповідно густина, товщина і циліндрична жорсткість пластинки, ρ – густина рідини, R – характерний лінійний розмір резервуара, ω – власна частота коливань рідини і пластинки, g – модуль градієнта поля масових сил.

Складність розв'язання задачі (1) полягає в тому, що потрібно провести одночасне інтегрування рівнянь для функції $W(r)$, заданої на відрізку $[0;r_0]$, і рівнянь для функції $\Phi(r,z)$, визначеної в двовимірній області Q, причому функція $W(r)$ входить в граничну умову на L_0 для функції $\Phi(r,z)$, і разом з цим рівняння для функції $W(r)$ містить функцію $\Phi(r,z)$.

3. Застосування методу розкладу за власними функціями крайової задачі з параметром в граничній умові

Для того, щоб звести задачу (1) до однорідної задачі відносно функції $W(r)$, введемо до розгляду задачу на власні значення з параметром в граничній умові, яка в області Q формулюється в такий спосіб:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0,\quad (r,z)\in Q,\quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{v}}\right|_{L^*}=0,\quad |\varphi(0,z)|<\infty,\quad \left.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{v}}-\tau\varphi\right)\right|_{L_0}=0, \tag{2}$$

де $\mathbf{v}$ – це орт зовнішньої нормалі до границі області Q, а τ – невідомий безрозмірний параметр.

За фізичним змістом однорідна задача (2) описує вільні коливання ідеальної рідини в резервуарі, що розглядається. При цьому квадрат власної частоти коливань σ^2 пов'язаний з безрозмірним параметром τ співвідношенням $\tau=\sigma^2 R/g$.

Упорядковані за зростанням власні значення спектральної задачі (2) позначимо τ_n, відповідні їм власні функції – $\varphi_n(r,z)$ ($n=1,2,\dots$). У [4] доведено, що розв'язки $\varphi_n(r,z)$ утворюють повну систему функцій на границі L_0 області Q, спектр задачі (2) є дискретним і має єдину точку згущення на нескінченності, для цих функцій справедливі такі умови ортогональності:

$$\int_{L_0} r\varphi_i\varphi_j ds=0,\quad \int_{L_0} r\frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{v}}\frac{\partial\varphi_j}{\partial\mathbf{v}}ds=0\quad \text{при}\quad i\neq j. \tag{3}$$

Оскільки область меридіонального перерізу Q, яку розглядаємо в задачі, складається з канонічної та неканонічної підобластей, застосуємо до розв'язання спектральної задачі (2) метод декомпозиції області на підобласті [4]. Суть цього методу полягає в тому, що область ділиться лінією поділу l на підобласті, потім в кожній із новоутворених областей формулюється відповідна крайова задача, кожна з яких розв'язується одним із відомих методів. Ці задачі пов'язані між собою додатковою умовою спряження на лінії l поділу областей:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\mu\varphi=0\ \text{ на }\ l.$$

В результаті застосування варіаційного методу [1] до розв'язування задачі, сформульованої в області дна резервуара Q_1, визначаються параметри μ_n. Розв'язок задачі, сформульованої в прямокутній частині області меридіонального перерізу Q_2, будується з використанням методу розділення змінних:

$$\varphi_n^{(2)}(r,z)=\frac{1}{k_n}\frac{k_n\operatorname{ch}(k_n(z+h))+\mu_n\operatorname{sh}(k_n(z+h))}{k_n\operatorname{sh}(k_nh)+\mu_n\operatorname{ch}(k_nh)}R_n(r),\quad R_n(r)=\frac{J_1(k_nr)}{J_1(k_nr_0)},\quad \tau_n=k_n\frac{k_n\operatorname{th}(k_nh)+\mu_n}{k_n+\mu_n\operatorname{th}(k_nh)},$$

де $\varphi^{(2)}(r,z)$ – значення функції $\varphi(r,z)$, що вона набуває в області Q_2, k_n – корені рівняння $J_1'(k_nr_0)=0$, $n=1,2,\dots$

Після того, як знайдено розв'язок спектральної задачі (2), перейдемо до знаходження наближених розв'язків задачі (1). Подамо функцію $\Phi(r,z)$ у вигляді розкладу за власними функціями $\varphi_n(r,z)$, для визначення коефіцієнтів якого використаємо граничну умову для $\Phi(r,z)$ на контурі L_0 і умови ортогональності (3):

$$\Phi(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N_n^2}\int_{L_0} rW(r)\frac{\partial\varphi_n}{\partial\mathbf{v}}ds\,\varphi_n(r,z),\quad N_n^2=\int_{L_0} r\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\mathbf{v}}\right)^2 ds. \tag{4}$$

Обмежуючись в розкладі (4) скінченним числом членів M, розв'язання вихідної задачі гідропружності зведемо до розв'язання інтегро–диференціального рівняння відносно функції $W(r)$:

$$A(W)=-L^2[W(r)]+\delta W(r)=\sum_{n=1}^{\infty}E_nR_n(r),\quad W(r_0)=W'(r_0)=0,\quad |W(0)|<\infty, \tag{5}$$

де

$$E_n=-\frac{a^{-1}\gamma^2}{H_n^2\tau_n}\int_0^{r_0} rW(r)R_n(r)dr,\quad H_n^2=\frac{1}{2}\left(r_0^2-\frac{1}{k_n^2}\right),\quad \delta=\begin{cases}\alpha^4 & \text{при }\ \delta>0,\\ -\alpha^4 & \text{при }\ \delta<0.\end{cases} \tag{6}$$

Наближений розв'язок задачі (5), (6) можна побудувати за допомогою узагальненого методу Бубнова – Гальоркіна [1]. При цьому вихідна задача зводиться до узагальненої алгебраїчної задачі на власні значення. Нижче при розв'язуванні задачі (5), (6) застосуємо інший підхід. Загальний розв'язок рівняння (5) подамо у вигляді:

$$W(r)=\sum_{p=1}^{4}C_pF_p(\alpha r)+\sum_{n=1}^{\infty}W_nR_n(r), \tag{7}$$

де під знаком першої суми записано загальний розв'язок однорідного рівняння $A(W)=0$, C_p – довільні сталі, $p=\overline{1,4}$, а під знаком другої суми – частинний розв'язок рівняння (5). Функції $F_p(r)$ у формулі (7) при $\delta>0$ мають вигляд $F_1(r)=J_1(r)$, $F_2(r)=Y_1(r)$, $F_3(r)=I_1(r)$, $F_4(r)=K_1(r)$, а при $\delta<0$ $F_1(r)=\mathrm{ber}_1(r)$, $F_2(r)=\mathrm{ker}_1(r)$, $F_3(r)=\mathrm{bei}_1(r)$, $F_4(r)=\mathrm{kei}_1(r)$, де $Y_1(r)$ – функція Бесселя 2–го роду 1–го порядку, а $I_1(r)$ та $K_1(r)$ – модифіковані функції Бесселя відповідно 1–го та 2–го роду 1–го порядку, $\mathrm{ber}_1(r)$, $\mathrm{bei}_1(r)$ та $\mathrm{ker}_1(r)$, $\mathrm{kei}_1(r)$ – функції Кельвіна 1–го та 2–го роду 1–го порядку.

Відповідно до фізичного змісту задачі розв'язки $W(r)$ обмежені. Функції $F_2(\alpha r)$ та $F_4(\alpha r)$ необмежені при $r=0$, тому $C_2=0$, $C_4=0$.

Підставивши вираз (7) в рівняння (5) і прирівнявши коефіцієнти при $R_n(r)$, отримаємо

$$W_n=-\frac{E_n}{k_n^4\mp\alpha^4}\quad(\alpha\neq k_n).\tag{8}$$

У разі наявності альтернативного знаку $\mp$ у наведених формулах знак мінус отримано при $\delta>0$, а плюс – при $\delta<0$.

Записавши значення для коефіцієнтів E_n з урахуванням загального розв'язку (7) для функції $W(r)$, підставимо отримані вирази для E_n у вираз (8). В результаті одержимо рівність, з якої можуть бути виражені коефіцієнти W_n:

$$W_n=G_n(\gamma)(C_1\int_0^{r_0}rF_1(\alpha r)R_n(r)dr+C_3\int_0^{r_0}rF_3(\alpha r)R_n(r)dr),\quad G_n(\gamma)=\frac{a^{-1}\gamma^2}{H_n^2\left((k_n^4\mp\alpha^4)\tau_n-a^{-1}\gamma^2\right)}.$$

Із умови $W'(r_0)=0$ визначимо сталу C_3 через C_1: $C_3=-\dfrac{F_1'(\alpha r_0)}{F_3'(\alpha r_0)}C_1$. Тут і далі штрих означає похідну лише за аргументом. В результаті коефіцієнт W_n має вигляд:

$$W_n=C_1u_n(\gamma),\quad\text{де}\quad u_n(\gamma)=\frac{\alpha^3r_0}{k_n^4\mp\alpha^4}G_n(\gamma)\tilde{u}_n(\alpha r_0),\quad \tilde{u}_n(r)=\begin{cases}2F_1'(r)\ \text{при}\ \delta>0,\\ \dfrac{(F_1'(r))^2+(F_3'(r))^2}{F_3'(r)}\ \text{при}\ \delta<0.\end{cases}$$

Підставивши знайдені вирази для коефіцієнтів W_n у розклад (7), отримаємо:

$$W(r)=C_1(F_1(\alpha r)-\frac{F_1'(\alpha r_0)}{F_3'(\alpha r_0)}\cdot F_3(\alpha r)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\gamma)R_n(r)).\tag{9}$$

Використавши граничну умову $W(r_0)=0$ і умову існування нетривіального розв'язку отриманого рівняння, задачу зведемо до характеристичного рівняння відносно параметра γ:

$$\frac{1}{\alpha r_0}\cdot(\frac{F_1(\alpha r_0)}{F_1'(\alpha r_0)}-\frac{F_3(\alpha r_0)}{F_3'(\alpha r_0)})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha^2G_n(\gamma)}{k_n^4-\alpha^4}=0,\qquad \frac{1}{\alpha r_0}\cdot\frac{F_1(\alpha r_0)F_3'(\alpha r_0)-F_3(\alpha r_0)F_1'(\alpha r_0)}{(F_1'(\alpha r_0))^2+(F_3'(\alpha r_0))^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^2G_n(\gamma)}{k_n^4+\alpha^4}=0.\tag{10}$$

Перше рівняння отримуємо при додатному δ, а друге – при від'ємному. Можна показати, що на кожному інтервалі (ξ_n,ξ_{n+1}) міститця лише один корінь кожного із рівнянь (10), причому $\xi_n=\sqrt{\dfrac{(k_n^4+\varepsilon)\tau_n}{a^{-1}+\tau_n}},\quad n=1,2,\ldots.$

При цьому функції $W_k(r)$ і $\Phi_k^{(2)}(r,z)$ визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}W_k(r)&=C_1(F_1(\alpha_kr)-\frac{F_1'(\alpha r_0)}{F_3'(\alpha r_0)}\cdot F_3(\alpha_kr)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_k^3r_0G_n(\gamma_k)}{k_n^4\mp\alpha_k^4}\tilde{u}_n(\alpha_kr_0)R_n(r)),\\ \Phi_k^{(2)}(r,z)&=C_1\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\alpha_k^3r_0}{a^{-1}\gamma_k^2}G_n(\gamma_k)\tilde{u}_n(\alpha_kr_0)R_n(r)\cdot\frac{k_n\,\mathrm{ch}(k_n(z+h))+\mu_n\mathrm{sh}(k_n(z+h))}{k_n\,\mathrm{ch}(k_nh)+\mu_n\mathrm{sh}(k_nh)}).\end{aligned}\tag{11}$$

Функція $\Phi_k^{(2)}(r,z)$ у формулах (11) – це розв'язок, що побудований в області Q_2.

Звернемо увагу на те, що згідно з запропонованим алгоритмом для розрахунку власних коливань розглядуваної гідропружної системи потрібно розв'язати трансцендентні рівняння, які містять достатньо велику кількість власних значень μ_n знайдених досить точно. Точність обчислення значень μ_n і достатня їх кількість забезпечується на основі варіаційного методу [1]. Для розв'язання задачі гідропружності у випадку резервуара з плоским дном потрібно покласти всі $\mu_n=0$.

4. Аналіз розв'язку і деякі результати розрахунків

Наведемо деякі результати розрахунків зв'язаних неосесиметричних коливань пластинки і рідини в резервуарі за описаним вище алгоритмом. Будемо розглядати резервуар, що має форму прямого кругового циліндра з півсферичним дном. Радіуси основи циліндра, пластинки та сферичного дна дорівнюють r_0, висота рідини в циліндричній частині $h = r_0$. За характерний лінійний розмір виберемо радіус r_0. Подані нижче результати обчислень отримано для безрозмірних значень параметрів системи: $a = 0,01$, $D = 0,02$.

У табл. 1 подано збіжність перших чотирьох власних значень задачі (1) в залежності від кількості членів M у розкладах (11). Дані табл. 1 свідчать про те, що відносна помилка обчислень для першого власного значення λ_1 при $M = 2$ не перевищує $0,11\%$, а для другого – 21%, де за точні прийнято обчислені при $M = 30$ значення. При $M = 8$ знайдено значення λ_i ($i = \overline{1,4}$) з трьома–сімома точними значущими цифрами, а при $M = 16$ кількість точних цифр чотирьох частотних параметрів зростає до п'яти–семи. Зауважимо, що перше власне значення табл. 1 визначалося з другого характеристичного рівняння (10), а всі інші – з першого рівняння (10). Отримані результати добре узгоджуються з результатами, що отримані за допомогою узагальненого методу Бубнова–Гальоркіна [1]. На рис. 1 зображено графіки залежності перших чотирьох власних значень задачі від безрозмірного параметра висоти h рідини в циліндричній частині резервуара з півсферичним дном. При зменшенні висоти h до нуля, значення λ_i прямують до значень обчисленних для півсферичного резервуара без циліндричної частини, повністю заповненого рідиною, а при збільшенні h – до значень, отриманих при розрахунках для резервуара з плоским дном, заповненого рідиною на висоту h.

Таблиця 1. **Значення нижчих частот системи в залежності від кількості *M* членів у розкладах (11)**

M	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
2	5,2137490	24,174920	–	–
4	5,2084679	19,998449	48,307341	114,41092
6	5,2084290	19,990708	48,040627	91,470019
8	5,2084273	19,990366	48,030549	91,341429
10	5,2084271	19,990331	48,029540	91,329444
12	5,2084271	19,990325	48,029375	91,327520
16	5,2084270	19,990324	48,029328	91,326975
20	5,2084270	19,990324	48,029323	91,326922
30	5,2084270	19,990324	48,029322	91,326912

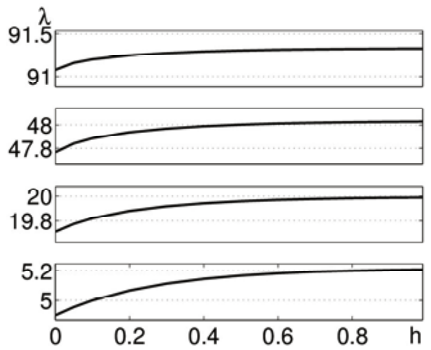

Рис. 1. Залежність нижчих частот системи від висоти *h* рідини

У деяких роботах з гідропружності розглядають задачу за відсутності поля масових сил (статичної складової тиску на пружну поверхню), а також безінерційний пружний елемент на вільній поверхні рідини. Цим самим вводяться певні додаткові припущення. Результати досліджень свідчать, що нехтування цими складовими може призвести до істотних помилок при обчисленні значень частот зв'язаних коливань рідини і пластинки, причому зі збільшенням номера власної частоти системи відносна похибка обчислень зменшується.

5. Висновки

Запропоновано аналітичний розв'язок задачі гідропружності про власні коливання ідеальної нестисливої рідини в резервуарі у формі прямого кругового циліндра з довільним осесиметричним дном і з пружною пластинкою на вільній поверхні рідини. В результаті застосування методу розкладу за власними функціями допоміжно введеної спектральної задачі з параметром в граничній умові задачу гідропружності зведено до однорідної граничної задачі для інтегро–диференціального рівняння відносно прогину пластинки. Знайдено точний розв'язок цього рівняння. Визначення власних частот гідропружної системи зведено до розв'язання трансцендентного рівняння. На конкретному прикладі для частково заповненого рідиною резервуара, що має форму прямого кругового циліндра з півсферичним дном, наведено аналіз отриманого розв'язку.

1. *Богун Р. І.* Вільні коливання рідини в резервуарі, що має форму тіла обертання та пружну пластинку на вільній поверхні // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін–ту математики НАН України. – 2009. – Т. 6, № 3. – С. 26–52. 2. *Докучаев Л. В.* О колебаниях резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена мембрана // Строительная механика и расчет сооружений. – 1972. – № 1. – С. 49–54. 3. *Троценко В. А.* О колебаниях жидкости в сосудах, свободная поверхность которой закрыта мембранной оболочкой из гиперупругого материала // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – № 6. – С. 166–177. 4. *Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы расчета присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. – Киев, 1969. 5. *Bauer H. F.* Frequencies of a hydroelastic rectangular system // Forsch. Ingenieur. – 1993. – Vol. 59, № 1, 2. – P. 18–22.

Надійшла до редколегії 27.12.2010 р.