УДК 519.218.8

М. Андросенко, ст. викл., О. Кільчинський, доц.,
Т. Клецька, ст. викл., Т. Крижановська, доц.

ГЕОМЕТРИЧНІ ОЗНАКИ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ СТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ З ДИСКРЕТНИМ СПЕКТРОМ

Доведено теореми про класи кореляційних функцій для стаціонарних випадкових процесів з дискретним спектром. Встановлено достатні ознаки, за якими можна дослідити тип стаціонарного випадкового процесу, орієнтуючись лише на геометричні властивості (без гармонійного аналізу) його кореляційної функції.

Theorems on classes of correlation functions for stationary random processes with a discrete spectrum are given. Sufficient tests with which the type of stationary random process is established, proceeding from geometrical properties (without the harmonious analysis) of its correlation function are obtained.

1. Вступ

Питання про належність стаціонарного випадкового процесу (СВП) $\xi(t)$ до класу процесів з дискретним чи неперервним спектром можна з'ясувати, досліджуючи розвинення його кореляційної функції $K_\xi(\tau)$ за системою тригонометричних функцій. Згідно з класифікацією [1, 2], у випадку СВП з дискретним спектром і періодичною з періодом $T=[-l;l]$ кореляційною функцією $K(\tau)$ остання має розклад в ряд Фур'є з невід'ємними коефіцієнтами D_k, $k=0,1,\dots$, вигляду

$$K(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos\frac{k\pi}{l}\,\tau\,. \qquad (1)$$

Процедура розвинення в ряд (1) і перевірки нерівностей $D_k \ge 0,\ k=0,1,\dots,$ часто не є тривіальною справою. Нами продовжено дослідження [1] про можливість класифікації СВП за геометричними ознаками кореляційної функції, тобто без її розвинення в ряд Фур'є. В [1] клас можливих кореляційних функцій для СВП з дискретним спектром обмежено умовою їх монотонності на періоді. У даній статті цей клас розширено.

2. Основна частина

Наступна теорема встановлює нові достатні умови розкладу функції в ряд Фур'є вигляду (1) з невід'ємними коефіцієнтами.

Теорема 1. *Нехай функцію $f(\tau)$ можна подати як суму*

$$f(\tau)=f_1(\tau)+f_2(\tau)\,, \qquad (2)$$

де функції $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ визначені на проміжку $[0;l]$ і задовольняють такі умови:

А1. функція $f_1(\tau)$ є неперервною, не зростаючою, її похідна $f_1'(\tau)$ є кусково-неперервною і неспадною;

А2. справджується нерівність

$$\int_0^l f_1(\tau)d\tau \ge 0\,, \qquad (3)$$

В1. функція $f_2(\tau)$ є неперервною, похідна $f_2'(\tau)$ є кусково-неперервною і неспадною;

В2. справджується нерівність

$$\int_0^l f_2(\tau)d\tau \ge 0\,; \qquad (4)$$

В3. має місце властивість

$$f_2(l-\tau)=f_2(\tau)\,. \qquad (5)$$

Тоді функція $f(\tau)$ розкладається на проміжку $[0;l]$ в ряд Фур'є вигляду (1) з невід'ємними коефіцієнтами $D_k, k=0,1,\dots,$, тобто може бути кореляційною функцією деякого СВП з дискретним спектром.

Доведення. З умов теореми випливає, що на проміжку $[0;l]$ функції $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ є неперервними. Функція $f_1(\tau)$ як неспадна на $[0;l]$ не має екстремумів, а функція $f_2(\tau)$ як неперервна, вгнута (опукла донизу) та симетрична відносно прямої $\tau=l/2$ має єдиний екстремум – мінімум в точці $\tau=l/2$, бо на проміжку $[0;l/2]$ ця функція не зростає, а на проміжку $[l/2;l]$ – не спадає.

Нехай τ_1,τ – довільні числа, для яких $0<\tau_1<\tau<l/2$. Позначимо $\tau_2=l-\tau_1$. Тоді, враховуючи рівність (5), за властивістю вгнутості для точок τ_1,τ,τ_2 маємо $f_2(\tau)\le\lambda f_2(\tau_1)+(1-\lambda)f_2(\tau_2)=f_2(\tau_1)$, де $\lambda=\dfrac{\tau_2-\tau}{\tau_2-\tau_1}$, $0<\lambda<1$.

Звідси, зважаючи на довільність вибору точок τ_1, τ і умову $0<\tau_1<\tau<l/2$, переконуємося, що на проміжку $[0;l/2]$ функція $f_2(\tau)$ є незростаючою. Враховуючи умову (5), маємо, що на проміжку $[l/2;l]$ функція $f_2(\tau)$ є не-

спадною. Таким чином, на проміжку $[0; l]$ функції $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ задовольняють умови теореми Діріхле і після продовження парним чином на проміжок $[-l; 0]$ ці функції можна розкласти в ряд Фур'є вигляду

$$f_r(\tau) = \frac{1}{2} D_0^{(r)} + \sum_{k=0}^{\infty} D_k^{(r)} \cos \nu_k \tau,\ 0 \le \tau \le l,\ r = 1, 2, \tag{6}$$

де

$$D_k^{(r)} = \frac{2}{l} \int_0^l f_r(\tau) \cos \nu_k \tau \, d\tau, \quad \nu_k = k \frac{\pi}{l}, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{7}$$

В [1] показано, що всі коефіцієнти ряду (6) для функції $f_1(\tau)$ є невід'ємними. Доведемо, що таку саму властивість мають коефіцієнти ряду (6) для функції $f_2(\tau)$. Розкладемо функцію $f_2(\tau)$ в ряд Фур'є і оцінимо значення коефіцієнтів $D_k^{(2)}, k = 0, 1, \ldots.$. З умови А4 теореми 1 випливає нерівність $D_0^{(2)} \ge 0$. Розглянемо два випадки коефіцієнтів $D_k^{(2)}$ з непарними і парними номерами.

Випадок 1: k – непарне число. Позначимо $k = 2p - 1,\ p \in N$. Для коефіцієнтів $D_k^{(2)}, k = 0, 1, \ldots$, з (7) виводимо

$$D_k^{(2)} = \frac{2}{l} \int_0^l f_2(\tau) \cos \nu_k \tau d\tau = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} f_2(\tau) \cos \nu_k \tau d\tau + \frac{2}{l} \int_{l/2}^{l} f_2(\tau) \cos \nu_k \tau d\tau = \frac{2}{l} \int_0^l \left[f_2(\tau) + (-1)^k f_2(l - \tau) \right] \cos \nu_k \tau d\tau .$$

Звідси, враховуючи властивість (5) і непарність числа k, отримуємо $D_{2p-1}^{(2)} = 0,\ \ p \in N$.

Випадок 2: k – парне число. Позначимо $k = 2p,\ p \in N$. Після інтегрування частинами, з (7) знаходимо:

$$\begin{aligned} D_k^{(2)} &= \frac{2}{l} \int_0^l f_2(\tau) \cos \nu_k \tau \ d\tau = \frac{2}{l} \int_0^l f_2(\tau) d \frac{\sin \nu_k \tau}{\nu_k} = -\frac{2}{l} \int_0^l f_2'(\tau) \frac{\sin \nu_k \tau}{\nu_k} d\tau = \\ &= -\frac{2}{l \nu_k^2} \int_0^{k\pi} f_2'\left(\frac{z}{\nu_k}\right) \sin z \ dz = -\frac{2}{l \nu_k^2} \sum_{j=1}^{k} \int_{(j-1)\pi}^{j\pi} f_2'\left(\frac{z}{\nu_k}\right) \sin z \ dz = \frac{2}{l \nu_k^2} \int_0^{\pi} S_k(\theta) \sin \theta d\theta, \end{aligned} \tag{8}$$

де

$$S_k(\theta) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j f_2'\left(\frac{\theta + (j-1)\pi}{\nu_k}\right) = \sum_{i=1}^{p} \left[f_2'\left(\frac{\theta + (2i-1)\pi}{\nu_k}\right) - f_2'\left(\frac{\theta + (2i-2)\pi}{\nu_k}\right) \right].$$

Оскільки функція $f_2'(\tau)$ є неспадною, то справджуються нерівності

$$f_2'\left(\frac{\theta + (2i-1)\pi}{\nu_k}\right) \ge f_2'\left(\frac{\theta + (2i-2)\pi}{\nu_k}\right), \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad i = \overline{1; p},$$

і функція $S_k(\theta)$ є невід'ємною. Отже, враховуючи (8), невід'ємними є й усі коефіцієнти $D_{2p}^{(2)},\ \ p \in N$.

Таким чином, функції $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ розкладаються в ряд Фур'є з невід'ємними коефіцієнтами і однаковими частотами ν_k, а отже згідно (2) їх сума – функція $f(\tau)$ має ту саму властивість, тобто розкладається в ряд Фур'є з невід'ємними коефіцієнтами, тобто належить до класу можливих кореляційних функцій СВП з дискретним спектром. Теорему 1 доведено.

Для пошуку функцій $f(\tau)$, які задовольняють умови теореми 1, можна використати наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай функція* $f(\tau)$ *визначена на проміжку* $[0; l]$ *і має такі властивості:*

С1. є неперервною; має кусково-неперервні першу і другу похідні, похідна $f'(\tau)$ *є неспадною;*

С2. справджується нерівність

$$\int_{l/2}^{l} f(\tau) d\tau \ge 0; \tag{9}$$

С3. для довільного $\tau \in [0; l/2]$ *виконуються співвідношення:*

$$1)\ f(\tau) \ge f(l - \tau),\ 2)\ f'(\tau) \le f'(l - \tau),\ 3)\ f''(\tau) \ge f''(l - \tau). \tag{10}$$

Тоді функція $f(\tau)$ *може бути кореляційною функцією деякого СВП з дискретним спектром.*

Доведення. Функцію $f(\tau)$ подамо у вигляді (2), поклавши

$$f_1(\tau) = \begin{cases} f(\tau) - f(l - \tau), & 0 \le \tau \le l/2, \\ 0, & l/2 < \tau \le l, \end{cases} \quad f_2(\tau) = \begin{cases} f(l - \tau), & 0 \le \tau \le l/2, \\ f(\tau), & l/2 < \tau \le l. \end{cases} \tag{11}$$

Покажемо, що функції $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ задовольняють умови теореми 1. З виразу (11) для функції $f_1(\tau)$ і умови С1 теореми 2 випливає, що функція $f_1(\tau)$ є неперервною, має кусково-неперервні першу і другу похідні, і на проміжку $[0; l]$ майже всюди справджуються рівності

$$f_1'(\tau) = \begin{cases} f'(\tau) + f'(l-\tau), & 0 \le \tau \le l/2, \\ 0, & l/2 < \tau \le l, \end{cases} \quad f''_1(\tau) = \begin{cases} f''(\tau) - f''(l-\tau), & 0 \le \tau \le l/2, \\ 0, & l/2 < \tau \le l \end{cases}.$$

Враховуючи нерівності 2), 3) в (10), отримуємо нерівність для першої похідної $f_1'(\tau) \le 0$, тобто на проміжку $[0; l]$ функція $f_1(\tau)$ не зростає, та нерівність для другої похідної $f_1''(\tau) \ge 0$, тобто на проміжку $[0; l]$ похідна $f_1'(\tau)$ є неспадною. З формули (11) для функції $f_1(\tau)$ і нерівності 1) в (10) випливає, що всюди на проміжку $[0; l]$ функція $f_1(\tau)$ є невід'ємною і задовольняє (3). Отже, усі умови теореми 1 щодо функції $f_1(\tau)$ виконуються.

Перевіримо тепер, чи виконуються умови теореми 1 щодо функції $f_2(\tau)$. З формули (11) для функції $f_2(\tau)$ переконуємось, що функція $f_2(\tau)$ задовольняє (4). Тоді з умов С1 теореми 2 встановлюємо, що при $0 \le \tau \le l$ функція $f_2(\tau)$ є неперервною і має кусково-неперервні першу і другу похідні, для яких на проміжку $[0; l]$ майже всюди справджуються рівності

$$f_2'(\tau) = \begin{cases} -f'(l-\tau), & 0 \le \tau \le l/2, \\ f'(\tau), & l/2 < \tau \le l, \end{cases} \quad f_2''(\tau) = \begin{cases} f''(l-\tau), & 0 \le \tau \le l/2, \\ f''(\tau), & l/2 < \tau \le l. \end{cases}$$

Звідси з умови С1 теореми 2 випливає нерівність $f_2''(\tau) \ge 0$, тобто похідна $f_2'(\tau)$ є неспадною. Інтегруючи функцію $f_2(\tau)$, встановлюємо:

$$\int_0^l f_2(\tau)d\tau = \int_0^{l/2} f(l-\tau)d\tau + \int_{l/2}^l f(\tau)d\tau = 2\int_{l/2}^l f(\tau)d\tau .$$

Зважаючи на нерівність (9), звідси виводимо, що $\int_0^l f_2(\tau)d\tau \ge 0$, тобто функція $f_2(\tau)$ задовольняє умову (4). Отже усі умови теореми 1 щодо функції $f_2(\tau)$ виконуються.

Таким чином, функція $f(\tau) = f_1(\tau) + f_2(\tau)$ задовольняє усі умови теореми 1 і належить до класу кореляційних функцій СВП з дискретним спектром. Теорему 2 доведено.

3. Висновки

Сформульовано і доведено теореми, які дозволяють розширити попередні уявлення про функціональні властивості кореляційних функцій СВП із дискретним спектром. З'ясовано, що протягом півперіоду $[0, l]$ ці функції можуть бути немонотонними. Встановлено нові геометричні властивості графіка кореляційної функції $y = f(\tau)$ на основному півперіоді $[0, l]$, а саме:

1) на півперіоді $[0, l]$ крива $y = f(\tau)$ є неперервною і опуклою донизу;

2) на проміжку $[0, l/2]$ ця крива не зростає, а на проміжку $[l/2, l]$ − не спадає;

3) дотична до графіка $y = f(\tau)$, $0 < \tau \le l/2$, має властивість: у рівновіддалених від кінців відрізка $[0, l]$ точках $\tau, l-\tau$, довжина відрізка дотичної від точки дотику $(\tau; f(\tau))$ до точки перетину з прямою $\tau = 0$ завжди є не меншою за довжину відрізка дотичної від точки дотику $(l-\tau; f(l-\tau))$ до точки перетину з прямою $\tau = l$.

1. *Кільчинський О. О., Скрипка В. І.* Про кореляційну функцію стаціонарного випадкового процесу з дискретним спектром // Збірник наукових праць ДЕТУТ. Серія "Транспортні системи і технології ". – 2009. – Вип. 15. – С. 130–133. 2. *Коваленко И. Н., Кузнецов И. Ю., Шуренков В. Н.* Случайные процессы. Справочник. – К.: Наук. думк., 1983. – 366 с.

Надійшла до редколегії 08.10.2010 р.