

Рис. 2. Зміна амплітуди коливань рідини  $a_1$  з часом при наявності поновлюючої сили і сили тертя

Результати тестових прикладів показали, що в обох випадках при дії імпульсної сили на резервуар амплітуди хвиль на вільній поверхні зменшуються зі збільшенням жорсткості пружини. Відбувається процес енергообміну між формами коливань, в законі зміни амплітуди присутня часова модуляція. Для випадку звичайного конуса з напівкутом  $45^\circ$  отримані розв'язки співпадають з відомими розв'язками [1].

### 3. Висновки

Дослідження показали, що розроблена модель дає результати з придатною точністю для випадку усіченого конічного резервуару і більш повно враховує нелінійний характер розвитку процесів і енергообміну між формами коливань рідини і рухом рідини і резервуару. Виконано контроль точності отриманих розв'язків. Для задач кінематичного і динамічного збудження руху резервуару з рідиною показано як жорсткість пружини впливає на енергообмін між формами коливань і розвиток динамічних процесів.

1. Лимарченко О. С., Ясинский В. В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – Киев: НТТУ "КПИ", 1997. – 348 с. 2. Лимарченко О. С., Семенова И. Ю. Построение координатных функций для решения нелинейной задачи о колебании жидкости в параболоиде вращения // Комплексный анализ і течії з вільними границями: Збірник праць Інституту математики НАН України. – К.: Інститут математики НАН України, 2006. – Т. 3, № 4. – С. 374–388. 3. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с. 4. Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. – М.: Машиностроение, 1977. – 208 с. 5. Ibrahim R. A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications. – Cambridge University Press, 2005. – 950 p.

Надійшла до редколегії 25.02.2011 р.

УДК 532.5

К. К. Косткін, асп.

## РУХ РІДИНИ В ОКОЛІ ВИХРОВОЇ ДОРІЖКИ ФОН КАРМАНА

*Розглянуто дві нескінченні вихрові структури, кожна з яких складається з точкових вихорів, що розташовані на двох паралельних прямих. Досліджено рух вихрових структур та рідини в їх околі. Отримано рівняння ліній току та побудовано зображення ліній току.*

*Consider two infinite vortex structure. Each of which consists of point vortices are located on two parallel lines. Studied the movement of vortex structures and movement of fluids in their vicinities. Obtained the equations of the streamlines and built their image.*

### 1. Вступ

В 1906 році Бернаром були проведені перші досліді, спрямовані на вивчення вихрових явищ поза рухомими тілами. Зазвичай рухомим тілом був циліндр, чи криловий профіль. При достатньо великій швидкості руху, поза тілом починають утворюватися вихори, почергово справа та зліва, рідше парами. На початку вони віддаляються від тіла з деякою швидкістю, поступово ця швидкість зменшується, в той час як вихори дещо розходяться. На деякій відстані поза тілом встановлюється певна усталена відстань між вихорами, вихори розташовуються в шаховому, чи в лінійному порядку. Також вихори обох рядів мають протилежній напрямом обертання. Відстань між рядами вихорів не залежить від швидкості, а лише від ширини тіла. Надалі подібні досліді проводились Карманом, Рубахом та рядом інших вчених.

Вихрова доріжка Кармана складається з двох паралельних вихрових ланцюжків, що розташовані на відстані  $b$  один від одного, відстань між сусідніми вихорами дорівнює  $a$ . Один ланцюжок складається з вихорів інтенсивності  $\chi$ , інший – з вихорів інтенсивності  $-\chi$ . Комплексний потенціал руху рідини поза вихором інтенсивності  $\chi$ , центр якого знаходиться в точці  $z_0$ , можна відшукати за рівнянням:

$$\omega = i\chi \ln(z - z_0) \quad (1)$$

Комплексний потенціал  $2n+1$  ( $n \rightarrow \infty$ ) вихорів, що розташовані у один ланцюжок, використовуючи (1) можна обчислювати як:

$$\omega_n = i\chi \ln(z) + i\chi \ln(z \pm a) + \dots + i\chi \ln(z \pm na)$$

Спрощуючи цей вираз, можемо записати:

$$\omega_n = i\chi \ln \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right).$$

Досліджуючи рух, будемо користуватися основною теоремою Томсона. У роботі [2] було показано що, ланцюжок не рухається, так як в силу симетрії всі вихорі знаходяться в стані спокою.

Також у роботі [2] було детально досліджено стійкість вихрового ланцюжка. Показано, що у випадках горизонтального зміщення одного вихору, довільного зміщення одного вихору, та зміщення усіх вихорів ланцюжка за певним законом, закон зміни координат зміщених вихорів можна подати у вигляді:

$$x = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}, x = Ce^{\beta t} + De^{-\beta t}.$$

При збільшенні величини часу  $t$ , значення  $x$  та  $y$  також будуть зростати. При будь-якому відхиленні система не повертається в початкове положення, а все більше віддаляється від нього.

Перейдемо до дослідження конфігурацій вихрових ланцюжків.

### 2. Шахова конфігурація

Розглянемо конфігурацію, що зображена на рис 1, коли вихори розташовано у шаховому порядку.

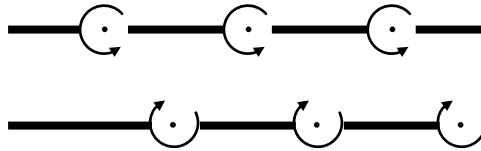


Рис 1. Шахова конфігурація

Систему координат росташуємо таким чином, що вихори верхнього ланцюжка знаходяться у точках  $na + \frac{1}{2}ib$ , а вихори нижнього ланцюжка – у точках  $\left(n + \frac{1}{2}\right)a - \frac{1}{2}ib$ , причому  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Застосовуючи рівняння (1), запишемо вираз для комплексного потенціалу досліджуваної системи:

$$\omega = i\chi \ln \sin\left(z - \frac{ib}{2}\right) - i\chi \ln \sin\left(z - \frac{a}{2} + \frac{ib}{2}\right).$$

Як було відзначено вище, жоден з ланцюжків не індукує швидкість сам на себе. Отже можна сказати, що верхній ланцюжок рухається під дією нижнього, а нижній – під дією верхнього. Таким чином комплексна швидкість вихору в точці  $z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}ib$  нижнього ланцюжка буде визначатися співвідношенням:

$$u - iv = \frac{d\omega}{dz} = \left[ \frac{d}{dz} i\chi \ln \sin \frac{\pi}{a} \left( z - \frac{ib}{2} \right) \right]_{z = \frac{a}{2} - \frac{ib}{2}} = -\frac{i\chi\pi}{a} \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{i\pi b}{a} \right) = \frac{\chi\pi}{a} \operatorname{th} \frac{\pi b}{a}$$

Усі вихори нижнього ланцюжка рухатимуться з однаковою швидкістю:

$$V = \frac{\chi\pi}{a} \operatorname{th} \frac{\pi b}{a}. \tag{2}$$

Аналогічно можна показати, що усі вихори верхнього ланцюжка рухаються з такою самою швидкістю. Отже вся система рухається зі швидкістю (2).

Розглянемо стійкість заданої системи. В момент часу  $t$  вихори верхнього ланцюжка будуть знаходитись у точках  $ma + \frac{ib}{2} + Vt$ , а вихори нижнього ланцюжка – у точках  $\left(n + \frac{1}{2}\right)a - \frac{ib}{2} + Vt$ ,  $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Змістимо вихори верхнього та нижнього ланцюжків на деякі малі величини  $z_m, z_n$  відповідно. Тоді вихори верхнього ланцюжка будуть знаходитись у точках  $ma + \frac{ib}{2} + Vt + z_m$ , а нижнього – у точках  $\left(n + \frac{1}{2}\right)a - \frac{ib}{2} + Vt + z_n$ . Комплексну швидкість вихору, що відповідає значенню  $m = 0$ , можна записати як:

$$V + \frac{dz_0}{dx} \tag{3}$$

Складові цієї швидкості від вихорів у точках  $\pm m, n, -n - 1$  можна подати у вигляді:

$$i\chi \left( \frac{1}{z_0 - z_m - ma} + \frac{1}{z_0 - z_{-m} + ma} \right) + i\chi \left( \frac{1}{z_0 - z_n - \left(n + \frac{1}{2}\right)a + ib} + \frac{1}{z_0 - z_{-n-1} + \left(n + \frac{1}{2}\right)a + ib} \right).$$

Розкладаючи у числовий ряд та нехтуючи членами більше ніж першого порядку малості, можемо переписати:

$$i\chi \left( \frac{z_0 - z_m + z_0 - z_{-m}}{m^2 a^2} - \frac{z_0 - z_{-n-1}}{\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)a + ib\right)^2} - \frac{z_0 - z_n}{\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)a - ib\right)^2} \right) - i\chi \left( \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)a - ib} - \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)a + ib} \right) \tag{4}$$

Покладемо:  $z_m = \gamma \cos m\theta, z_n = \delta \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta$ , де  $\gamma, \delta$  – малі за модулем комплексні величини. Тоді, вираз (4) можна подати у вигляді:

$$\frac{2\chi i \gamma(1 - \cos m\theta)}{a^2 m^2} - \frac{2\chi i \left(\gamma - \delta \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - k^2\right)}{a^2 \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + k^2\right)} + \frac{\chi}{a^2} \frac{2ka}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + k^2}, \quad k = \frac{b}{a}.$$

Аналогічним чином, враховуючи дію усіх інших вихорів та враховуючи співвідношення (3), отримуємо вираз вигляду:

$$\frac{d\bar{\gamma}}{dx} = \frac{2i\chi}{a^2} (A\gamma + C\delta).$$

Для будь-якого вихору з нижнього ряду можемо отримати аналогічне співвідношення. Спростуючи отримані рівняння можемо знайти вирази для  $A$  та  $C$ , а також отримати задані рівняння відносно  $\gamma$ . Як підсумок усіх перетворень, отримуємо умову стійкості для заданої вихрової структури  $ch \frac{b}{a} \pi = \sqrt{2}$ , тобто, маємо співвідношення між

вихорами у системі:  $\frac{b}{a} = 0,281$ . У всіх інших випадках матимемо нестійкий рух. Також, аналогічно до випадку з одним вихровим ланцюжком, можна показати, що при будь-якому відхиленні одного, чи кількох вихорів від початкового положення, зі збільшенням часу, відхилення будуть збільшуватись, а вся система розвалюватись.

Розглянемо рух рідини під дією заданої системи. Функцію току можна знайти із формули:

$$2i\psi = \omega(z) - \bar{\omega}(\bar{z}). \tag{5}$$

Звідси отримуємо вираз для лінії току:

$$\psi = -\frac{\chi}{4\pi} \ln \frac{\cosh\left(2\pi y + \frac{b}{a}\pi\right) + \sin 2\pi x}{\cosh\left(2\pi y - \frac{b}{a}\pi\right) - \sin 2\pi x}.$$

За отриманим співвідношенням побудуємо зображення ліній току. Результати представлено на рис 2.

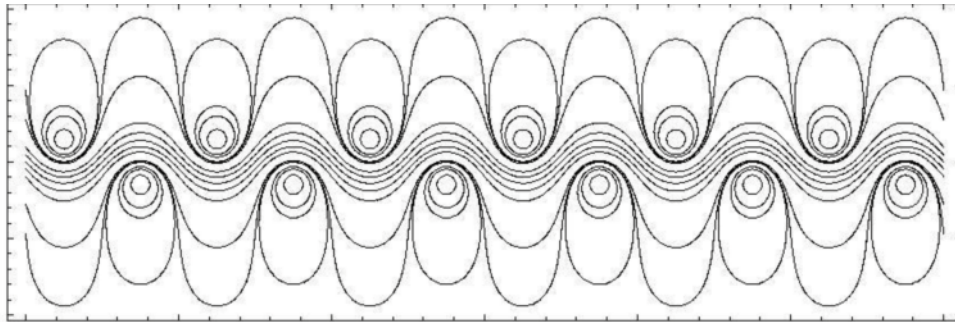


Рис 2. Лінії току для шахової конфігурації

### 3. Лінійна конфігурація

Розглянемо конфігурацію, що зображена на рис. 3, коли вихори розташовано у лінійному порядку.

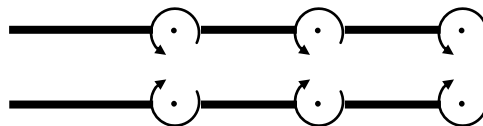


Рис 3. Лінійна конфігурація

Систему координат розташуємо таким чином, що вихорі верхнього ланцюжка знаходяться у точках  $na + \frac{1}{2}ib$ , а вихори нижнього ланцюжка – у точках  $na - \frac{1}{2}ib$ , причому  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Застосовуючи рівняння (1), запишемо вираз для комплексного потенціалу досліджуваної системи:

$$\omega = i\chi \ln \sin\left(z - \frac{ib}{2}\right) - i\chi \ln \sin\left(z + \frac{ib}{2}\right).$$

Як і у попередньому випадку, жоден з ланцюжків не індукує швидкість сам на себе. Отже можна сказати, що верхній ланцюжок рухається під дією нижнього, а нижній – під дією верхнього. Таким чином комплексна швидкість вихору в точці  $z = -\frac{1}{2}ib$  нижнього ланцюжка буде визначатися співвідношенням:

$$u - iv = \frac{d\omega}{dz} = \frac{\chi\pi}{a} \operatorname{cth} \frac{\pi b}{a}.$$

Аналогічну формулу маємо для будь-якого вихору верхнього ланцюжка. Отже маємо, що уся система рухається зі швидкістю:

$$V = \frac{\chi\pi}{a} \operatorname{cth} \frac{\pi b}{a}.$$

Також, аналогічно попередньому випадку, можна показати, що рух нестійкий, та вся система знаходиться у стані нестійкої рівноваги. При будь-якому зміщенні одного, кількох, чи всіх вихорів, їх відхилення будуть збільшуватися.

При дослідженні руху рідини будемо користуватися виразом (5) для знаходження функцій току. Співвідношення для функцій току можна подати у вигляді:

$$\psi = -\frac{\chi}{4\pi} \ln \frac{\cosh\left(2\pi y + \frac{b}{a}\pi\right) + \sin 2\pi x}{\cosh\left(2\pi y - \frac{b}{a}\pi\right) + \sin 2\pi x}$$

На рис. 4 за цим співвідношенням побудовано графічне зображення ліній току.

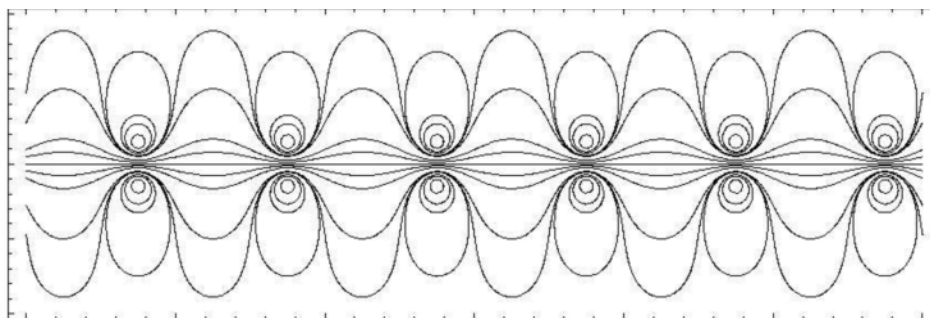


Рис 4. Лінії току для лінійної конфігурації

#### 4. Висновки

Розглянуто дві нескінченні вихрові структури: лінійна та шахова конфігурації вихрових доріжок фон Кармана. Досліджено рух структур, отримано швидкості руху. Також розглянуто стійкість структур, показано, що задані системи вихорів знаходяться у стані нестійкої рівноваги. Розглянуто питання про рух рідини навколо даних структур. Отримано вирази для функцій току, та побудовані їх графічні портрети.

1. Борисов А. В., Мамаев І. С., Рамоданов С. М. Динамическая адвекция // Нелинейная динамика. – 2010. – № 3. – С. 521–530. 2. Косткін К. К. Стійкість вихрового ланцюжка // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2010. – № 2. – С. 57–60. 3. Мелешко В. В., Константинов М. Ю. Динамика вихревых структур. – К., 1993. 4. Aref H. Vortices and polynomials // Fluid Dynamics Research. – 2007. – Vol. 39. – P. 5–23.

Надійшла до редколегії 20.12.2010 р.

УКД 517.9+531.19

І. Гап'як, асп.

### ДИНАМІКА ВИДІЛЕНОЇ ЧАСТИНКИ В НЕСКІНЧЕННОЧАСТИНКОВІЙ СИСТЕМІ

На основі ієрархії рівнянь ББГКІ описано еволюцію станів системи нескінченного числа частинок з виділеною частинкою у випадку сингулярного потенціалу взаємодії пружних куль, колективна поведінка яких описується кінетичним рівнянням Фоккера-Планка. Доведено існування глобального розв'язку задачі Коші для сформульованих еволюційних рівнянь в просторі послідовностей обмежених функцій.

*Evolution of states of a system of particles, which collective behavior governed by the Fokker-Plank kinetic equation, namely, an infinite-particle system with a tagged particle interacting as hard spheres, is described on the base of the BBGKY hierarchy. An existence of a global solution of the Cauchy problem for formulated evolution equations is proved in the space of sequences of bounded functions.*

#### 1. Вступ

Однією з фундаментальних проблем сучасної математичної фізики є проблема обґрунтування еволюційних рівнянь, якими описуються стохастичні процеси, на основі динаміки системи взаємодіючих частинок [1,4]. Вперше результати про стохастичну поведінку багаточастинкових систем були отримані у працях Боголюбова [1,4] за допомогою теорії збурень. В останні роки отримано низку нових строгих результатів з обґрунтування дифузійної динаміки одновимірної системи пружних куль з виділеною масивною кулею [5,7] і системи квантових частинок з виділеною частинкою для певних класів потенціалу взаємодії [9,10].

Однією з відкритих математичних задач, яка виникає при строгому дослідженні динаміки виділеної частинки в оточенні інших частинок, є побудова динаміки нескінченного числа частинок. У даній статті еволюція станів